Ejemplo 1) Un esqueleto contiene la centésima parte de su cantidad original de carbono 14 (^{14}C). Calcula la antigüedad del esqueleto, con precisión de1000años. (La vida media del ^{14}C es de aproximadamente 5750)

Solución:

La vida media significa que la cantidad original, A, tarda 5750 años en reducirse a la mitad, $A_0 = A/2$. La dependencia entre la cantidad de ^{14}C y el tiempo t es exponencial ________________, así que la expresión que las relaciona es:

$A_0 = Ae^{kt}$ donde el valor de k es _______________

Y no conocemos su valor, así que para determinarlo utilizamos la vida media,

t = __________ años con A_0 = ________

$$\frac{A}{2} = Ae^{5750k}$$

dividiendo entre A, $$\frac{1}{2} = e^{5750k}$$

como no sabemos despejar todavía empecemos por darle valores:

$e^{5750(-0.1)} \approx$ ____________ $e^{5750(-0.01)} \approx$ ___________ $e^{5750(-0.001)} \approx$ ____________

$e^{5750(-0.0001)} \approx$ ___________ $e^{5750(-0.00011)} \approx$ ___________ $e^{5750(-0.00012)} \approx$ _________

el valor es: $k \approx$ _________

Ahora sustituimos este valor para calcular la cantidad de carbono 14

$$A_0 = Ae^{-0.00012t}$$

Como el esqueleto contiene la centésima parte, entonces A_0 = ________

$$\frac{A}{100} = Ae^{-0.00012t}$$

y la ecuación que se tiene que resolver ahora es:

$$\frac{1}{100} = e^{-0.00012t} = 0.01$$

Nuevamente ahora démosle algunos valores a la variable que ahora es t.

$e^{-0.00012(100)} \approx$ ________ $e^{-0.00012(10000)} \approx$ _________ $e^{-0.00012(20000)} \approx$ __________

$e^{-0.00012(30000)} \approx$ ________ $e^{-0.00012(20000)} \approx$ _________ $e^{-0.00012(30000)} \approx$ __________

$e^{-0.00012(40000)} \approx$ ________ ya nos pasamos, hay que regresarnos

$e^{-0.00012(39000)} \approx$ _________ $e^{-0.00012(38000)} \approx$ __________ $e^{-0.00012(37000)} \approx$ _________

Así que podemos decir que el esqueleto tiene aproximadamente _________ años de antigüedad.

Este método de estar aproximando es muy tedioso, pero hay otra forma de hacerlo conociendo la función logaritmo, más adelante te darás cuenta.

Ejercicio 1) Al estudiar el crecimiento de la población de cierta ciudad, por primera vez, se encontró que la población era de 22 000. Se determinó que la población, P, crece en función del tiempo t (años) de acuerdo con la fórmula exponencial $P = (22\,000)(10^{0.0163\,t})$. ¿Cuánto tiempo pasará para que la ciudad tenga el doble de su población actual?

Ejercicio 2) ¿En cuánto tiempo se duplica una inversión de \$4000 si gana el 8 % anual compuesto trimestralmente?

4.8 La función logaritmo como inversa de la función exponencial. Noción de la función inversa.

Como recordarás vimos que la función exponencial era una función uno a uno o _______________, lo cuál quiere decir que su inversa también es una función y su gráfica la podemos obtener intercambiando los valores de x y y en los pares ordenados de la función o lo que es lo mismo reflejando la gráfica de $y = a^x$ en la recta $y = x$, vamos hacerlo para cuando a > 1 (creciente) y cuando $0 < a < 1$ (_____________).

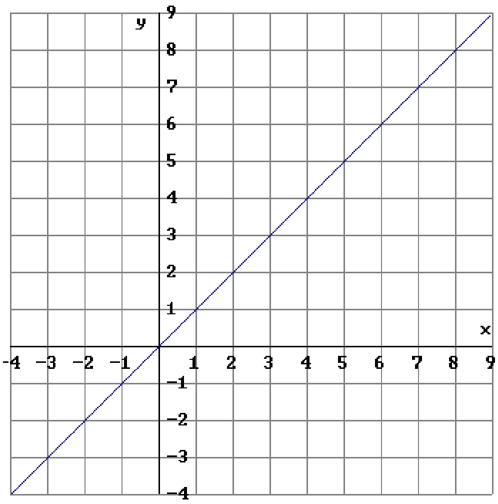
Ejemplo 1) Completa la siguiente tabla y traza la función $f(x) = 2^x$ y su inversa $f^{-1}(x)$.

Solución:

La tabla de $f(x)$ ya esta completa, así que intercambiamos los valores de x y y, completamos la tabla de su inversa, $f^{-1}(x)$, y localizamos los puntos sobre el plano delineando ambas funciones.

x	$f(x) = 2^x$
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$f^{-1}(x)$



La función inversa de $f(x) = y = 2^x$, $f^{-1}(x)$, la podemos escribir como: $x = 2^y$, intercambiando los papeles de las variables

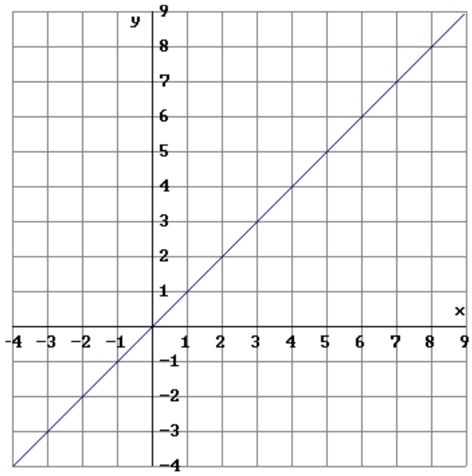
Ejemplo 2) Traza la función $g(x) = ($🗁$)^x$ y su inversa $g^{-1}(x)$, escribe la expresión que la representa.

Solución:

De la tabla de g intercambiamos los valores de x y y, para completar la tabla de la inversa de g, g^{-1}.

x	$g(x)$=(🗁)^x
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125

x	$g^{-1}(x)$



La inversa de $g(x) = y =$ (🗁)^x, $g^{-1}(x)$ la podemos expresar como ____________

Podemos cambiar la base y para sacar la inversa simplemente intercambiamos las variables.

Ejercicio 1) Traza la gráfica de $f(x) = 10^x$ y su inversa, $f^{-1}(x)$ y escribe la expresión que la representa.

Ejercicio 2) traza la gráfica de $h(x) = e^x$ y su inversa, $h^{-1}(x)$ y da su expresión.

De acuerdo a lo anterior podemos decir que, si tenemos una función $f(x) = y = a^x$
su inversa es una función cuya ecuación es: ___________.
Y esta expresión recibe el nombre de *logaritmo de x* y se escribe como
$y = log_a(x)$, esta es la función logarítmica
y se lee "y es igual a logaritmo, base a, de x"

Ahora ya conocemos dos formas que expresan lo mismo, o sea que definen a la misma función, una es la forma exponencial, y otra la forma logarítmica.

La función logarítmica $y = log_a x$, donde $a > 0$ y diferente de 1, es la inversa de la función exponencial ________, por lo tanto $y = log_a x$ si, y sólo si, $x = a^y$

Cuando la base sea 10 simplemente no la ponemos ($log\ x$) y cuando la base sea e entonces le llamamos logaritmo natural ($ln\ x$).

Ejemplo 3) Escribe cada expresión en su forma exponencial

a) $log_4 32 = 5/2$ b) $log_{64} 4 = 1/3$

Solución:

a) La base es ___ y es exponente es ____, por lo que, $32 = 4^{5/2}$

b) La base es _64_ y el exponente es ____, entonces ________

Ejemplo 4) Escribe cada ecuación en su forma logarítmica:

a) $6^{-2} = 1/36$ b) $(1/8)^{-3} = 512$

Solución:

a) La base es _____ y el exponente o logaritmo es ____, así que $log_6\,(1/36) = -2$

b) La base es ____ y el exponente o logaritmo es –3 , por lo que _____________

Ejemplo 5) Evalúa cada expresión

a) $log_8\,16$ b) $log_{49}343$

Solución:

a) Pasamos a la forma exponencial, la base es 8, así que $8^y = 16$, $2^{3y} = 2^4$, $3y = 4$, $y = 4/3$, $log_6 16 = 4/3$

b) La forma exponencial es: $49^y = 343$, $(7^2)^y = 7^3$, $7^{2y} = 7^3$ por lo que $2y = 3$, $y = 3/2$, $log_{49}343 = 3/2$

Ejercicio 3) Pasa de la forma exponencial a logarítmica o viceversa según sea el caso.

a) $17^0 = 1$ b) $log\,0.0001 = -4$ c) $5^{-3} = 1/125$

d) $36^{3/2} = 216$ e) $log_7(1/2401) = -4$ f) $log_{\sqrt{2}}\,2 = 2$

Ejercicio 4) Calcula los valores

a) $log_5\,625$ b) $log_{2/3}\,(8/27)$ c) $log\,10000$ d) $log_2\,(log_4\,256)$

Ejercicio 5) Despeja la variable que se indica

a) $log_b\,(1/128) = -7$ b) $log_8\,x = -3$ c) $log\,1000 = y/2$ d) $log_a(16/81) = 4$

4.9 Propiedades de los logaritmos

Como ya vimos que la función logarítmica y la función exponencial son inversas una de la otra, ya que para obtener la función logarítmica intercambiamos los valores de x y y, y sus gráficas las obtenemos reflejando una sobre la recta $y = x$ (función identidad) para obtener la otra, esto quiere decir que sus composiciones producen la función identidad, por lo que:

Si $y = log_a\,a^x$ (def. de log) $a^y = a^x$ $y = x$, por lo tanto, $\underline{log_a\,a^x = x}$

Si $y = a^{\log_a x}$ (def. de log), $log_a\,y = log_a\,x$, (función uno a uno) $y = x$, por lo tanto, __________

Dado que los logaritmos son exponentes, sus propiedades pueden obtenerse de las propiedades de los exponentes y verificarlas utilizando estas mismas reglas. Recordando que la base es mayor que cero y diferente de 1.

Supongamos que m y n son números positivos ($m > 0$, $n > 0$), a es un número positivo y distinto de 1 ($a > 0$ y $a \neq 1$) y p es cualquier número real: En este caso se cumple lo siguiente:

Propiedad	Definición	Ejemplo
Producto	$log_a\, mn = log_a\, m + log_a\, n$	$log_5\, 7x = log_5\, 7 + log_5\, x$
Cociente	$log_a \dfrac{m}{n} = log_a m - log_a\, n$	
Potencia	$log_a\, m^p = p\, log_a\, m$	

Verifiquemos la propiedad del cociente y luego intentas las otras dos.

Ejemplo 1) Probar la propiedad del cociente: $log_a \dfrac{m}{n} = log_a m - log_a\, n$

Solución: Asignémosle un valor a los logaritmos por separado

$$log_a\, m = r \quad \text{y} \quad log_a\, n = r$$

pasamos a la forma exponencial: $m = a^r$ y __________

dividimos las dos ecuaciones: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{a^r}{a^s} =$ _________

Ahora lo convertimos a la forma logarítmica: $log_a\, mn =$ _________

Sustituimos el valor de r y s: $log_a\, mn = log_a\, m$ – _________

Y esta es la expresión a la que se deseaba llegar.

Ejercicio 1) Probar la propiedad del producto y potencia de logaritmos.

Ejercicio 2) Convierte cada expresión en el logaritmo de una sola expresión de x.

a) $3\, log_a\, x - log_a\, 2 - log_a\, (x + 5)$ b) $\dfrac{1}{3} log_a (x-1) + \log_a 3 - log_a (x+1)$

c) $\dfrac{1}{2}\left[log_b (x^2 + 4x + 4) - log_b (x+2) \right]$

Ejercicio 3) Pasa las siguientes expresiones a sumas, diferencias y múltiplos de logaritmos.

a) $log_a \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ b) $log_a \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(x-2)(x+2)^5}$ c) $log_a \left(x\sqrt{x^2+3} \right)$

Utilizando lo anterior ya podemos resolver ecuaciones que incluyan logaritmos, como las siguientes:

Ejemplo 2) Encuentra el valor de x en cada uno de los siguientes casos

a) $log_2 (x+5) = 2\, log_2 3$ b) $2\, log_3 x = log_3 2 + log_3 (4 - x)$

c) $log_7 4x - log_7 (x + 1) = (½)\, log_7 4$

Solución:

a) $log_2 (x+5) = 2\, log_2 3$

$log_2 (x+5) = log_2 3^2$ $(log_a b^n = n\, log_a b)$

$(x + 5) = 3^2 = 9$ los dos logaritmos tienen la misma base

$x = 9 - 5$ despejando a x

$x = 4$

b) $2\ log_3 x = log_3 2 + log_3 (4 - x)$

$x =$ ________

c) $log_7 4x - log_7 (x + 1) = (½)\ log_7 4$

$$log_7\left(\frac{4x}{x+1}\right) = log_7 4^{\frac{1}{2}}$$ ____________________________

$$\left(\frac{4x}{x+1}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$ ____________________________

$4x = 2(x + 1)$ ____________________________

$4x = 2x + 2,\quad 2x = 2,\quad x =$ ____

Ejercicio 4) resuelve cada ecuación

a) $log_6 (4x + 4) = log_6 64$

b) $2\ log_4 4$ - □ $log_4 16 = log_4 x$

c) $log_8 48 - log_8 w = log_8 6$

d) $log_{11} x = \frac{1}{2} log_{11} 9 + \frac{1}{3} log_{11} 27$

e) $log_2 (x^2) - log_2 (x - 2) = 3$

f) $log_{1/3} (12x^2) - log_{1/3} (20x - 9) = -1$

Ejemplo 3) Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones

a) $5^x = 4^{x+3}$ b) $e^{3x+5} = 100$

Solución:

a) $5^x = 4^{x+3}$ aplicando logaritmo base 10 de ambos lados,

$log\ 5^x = log\ 4^{x+3}$ propiedad $log_a m^p = p\ log_a m$

$x\ log\ 5 = (x + 3)\ log\ 4 = x\ log\ 4 + 3\ log\ 4$ despejamos x

$x\ log\ 5 - x\ log\ 4 = 3\ log\ 4$

$x(log\ 5 - log\ 4) = 3\ log\ 4$

$$x = \frac{3log4}{log5 - log4}$$ con ayuda de la calculadora

$x = 18.63770232$

$5^x =$ __________________ y $4^{x+3} =$ ________________

mientras más decimales le des a x estos valores se aproximan cada vez más

b) $e^{3x+5} = 100$ ahora apliquemos logaritmo natural o base e

$ln\ (e^{3x+5}) = ln100$ $log_a a^x = x$

$3x + 5 = ln\ 100$ despejamos a x

$3x = ln\ 100 - 5,\quad x = \frac{ln100 - 5}{3}$ __$x = -\ 0.\ 131609938$__

Ejercicio 5) Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $4e^x = 91$ b) $5^{x+2} = 3^{2x+1}$ c) $8(10^{3x}) = 12$

d) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$ e) $6^{3x-5} = 2^{7x}$ f) $6e^{1-x} = 25$

Cambio de base

También podemos cambiar la base de los logaritmos y esto a veces es conveniente saberlo porque las calculadoras por lo regular tienen logaritmo en base 10 y logaritmo natural solamente, así que necesitamos la forma de calcular logaritmo en cualquier base, así que hay que pasarlo a base 10 para utilizar la calculadora.

Si tenemos, $y = \log_a x$ en forma exponencial es: $a^y = x$

Aplicando logaritmo de ambos lados nos queda: ________ = ________

Propiedad de potencia $y \log a = \log x$

Despejamos a y, $y = \dfrac{\log x}{\log a} = \log_a x$

Esta es la expresión para cambiar de cualquier base a base 10, ahora en general

También se pudo haber aplicado logaritmo natural y se llegaría a la expresión:

____

Para cambiar de una base a otra, simplemente aplicamos el logaritmo en la base a la que queramos cambiar, por ejemplo base b

$\log_b a^y = \log_b x,\ y \log_b a = \log_b x,$ así que, $y = \log_a x =$ _______________

Vamos a calcular logaritmos en cualquier base (mayor que cero y diferente de 1) utilizando la calculadora.

Ejemplo 4) Calcula los siguientes logaritmos

a) $\log_4 7$ b) $\log_{1/3} 125$ c) $\log_{13} 44$

Solución:

a) Utilizando logaritmo natural, $\log_4 7 = \ln 7/\ln 4 = 1.403677461$

b) ahora utilizando logaritmo base 10, $\log_{1/3} 125 = \dfrac{\log 125}{\log(1/3)} = -4.\ 39492$

c) aplica cualquiera de los dos, $\log_{13} 44 = \dfrac{\qquad}{\qquad} =$ __________

Ejercicio 6) Encuentra el valor de cada logaritmo cambiando de base

a) $\log_6 24 =$ b) $\log_7 4 =$ c) $\log_{0.5} 0.4 =$