UNIDAD 5

LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

OBJETIVOS

- Avanzar en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren tanto a la parábola como a otros lugares geométricos ya vistos.

- Identificar y reconocer los parámetros de la parábola así como sus elementos ya sea si te dan la ecuación o su gráfica con algunos elementos.

- Transitar y reconocer las ventajas o desventajas de cada una de las formas de la ecuación de la parábola.

- Desarrollar habilidades para cuando se conozcan algunas características de la parábola puedan encontrar la ecuación que la representa, así también como su lugar geométrico; y viceversa, si se conoce la ecuación de una parábola puedan describir los elementos que la forman y trazar su gráfica.

INTRODUCCIÓN

Para continuar nuestro estudio con la geometría analítica, es indispensable tener conocimiento acerca de la parábola así como sus elementos y propiedades. Ya que el conocimiento de esta curva es necesario para resolver una gran diversidad de problemas que se nos pueden presentar, donde se involucra el concepto de parábola, por ejemplo:

- El cable de suspensión de un puente colgante describe un arco de parábola.
- La trayectoria de un proyectil, despreciando la resistencia del aire, es una parábola.
- La curva que describe el agua al salir de un orificio en la base de un tanque es parabólica.
- En Economía y Administración ciertos tipos de curvas parabólicas resultan apropiadas para representar la oferta y la demanda, los de producción y muchas otras.

En el estudio y desarrollo de esta unidad, se tratan los temas básicos que un alumno de bachillerato debe saber para adquirir los conocimientos elementales de las ecuaciones cartesianas de la PARÁBOLA .

Se comienza definiéndola como lugar geométrico, así como el trazado de las mismas y el conocimiento de sus elementos, se indica su forma ordinaria o canónica y su forma general, como utilizarlas y aplicarlas.

En cada tema se resuelven ejemplos y se proponen ejercicios para que los resuelvas y refuerces lo estudiado, y al final de la unidad se dan las respuestas a estos ejercicios, también se te propone un examen de autoevaluación que servirá para que tu mismo evalúes en que medida has aprendido el tema.

PROBLEMA INTRODUCTORIO

Hugo, Paco y Luis son tres estudiantes de bachillerato con un poco de dificultades con su materia de matemáticas, además son integrantes de un club de exploradores.

El sábado fueron a acampar a el bosque del Chico Hidalgo, y en uno de sus recorridos cuando ya casi se metía el sol se encontraron con una cueva.

Hugo: *Mira que cueva tan grande y obscura.*

Paco: *Se ve muy profunda, pero su entrada tiene la forma de una parábola.*

Luis: *Que gran idea me has dado para llevarle un problema a nuestra maestra de matemáticas.*

Hugo: *Pero yo no veo como podemos usar las matemáticas en esta cueva.*

Paco: *Recuerden que estamos viendo el tema de PARABOLA, aunque no entiendo muy bien pero sí se que tiene un vértice, un foco y un lado recto.*

Luis: *¿Que tal si con nuestra cinta métrica checamos cuál es la altura y cuanto mide de ancho la entrada de la cueva?, para con estos datos que podemos decir de la entrada de la cueva usando las matemáticas que estamos aprendiendo.*

Hugo: *Yo mido, ¡pásame la cinta Paco!.*

Hugo midió y encontró que la altura máxima de la entrada de la cueva era de 2 metros y su anchura era de 3.5 metros, entonces Luis dijo:

Luis: *Si la entrada de la cueva es un arco parabólico vertical, ¿estará el foco sobre el suelo o debajo o encima de él, a que distancia del suelo se encontrará?.*

Los tres se miraron con preocupación ya que además del problema que se plantearon ya estaba anocheciendo y tenían que regresar a la base del campamento, entonces intervino Paco.

Paco: *Creo que tenemos que regresar ya que si se obscurece más no encontraremos el camino hacia el campamento.*

Hugo: *Si, si,... y el problema se lo llevamos a la maestra y nos dirá si lo podemos resolver con los datos que tenemos, además le pediremos que nos ayude.*

Y los tres regresaron corriendo al campamento.

¿Tu puedes ayudar a Hugo, Paco y Luis a resolver el problema?, si tu respuesta es no, te invitamos a estudiar esta unidad y antes de terminarla creemos que ya tendrás la respuesta. Pero si ya sabes la respuesta te invitamos a hacer el examen de autoevaluación que viene al final de la unidad y si lo apruebas estas listo para presentar tu examen del curso de matemáticas III, y te aseguro que te va a in muy bien.

5.1 DEFINICIÓN DE PARÁBOLA.

De tu curso de matemáticas II, en la primera unidad que es funciones cuadráticas, aprendiste las características de éstas funciones y que al graficarlas nos daban parábolas verticales con vértice y eje de simetría. Ahora aprenderás la definición en general de una parábola desde el punto de vista de la geometría analítica, así como sus demás elementos que la caracterizan.

La parábola es el conjunto de puntos que están en el mismo plano y que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo y de una recta fija; al punto fijo se le llama Foco (F) y a la recta dada Directriz ***d***.

Esto quiere decir que todo punto que es parte de la parábola esta a la misma distancia de su foco y de la directriz como se ve en la figura 1, que nos representa una parábola vertical, pero también podemos tener una parábola horizontal o inclinada o como se te ocurra, siempre y cuando cumpla con la definición. Aquí nos limitaremos solamente a las parábolas horizontales y verticales.

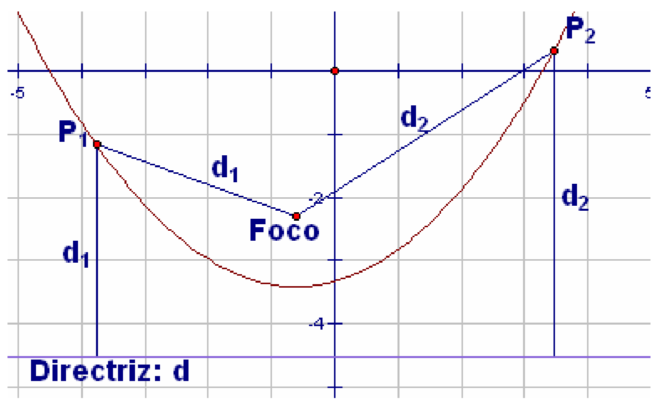


figura 1

5.2 ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA.

Como te habrás dado cuenta, ya se mencionaron más elementos como son **foco** y **directriz** y los que ya conocías **vértice** y **eje de simetría**, ahora vamos a localizarlos en la figura 1 y conocerás otros más:

El **vértice** V y el **foco** $\boldsymbol{F}$ son puntos que deben tener coordenadas (x , y).

La **directriz** ***d*** es una recta, por lo que debe estar dada por una ecuación lineal, y en los casos particulares que veremos es una recta horizontal o vertical como en la figura 2.

El **eje de simetría** o eje de la parábola, pasa por el vértice y divide a la parábola en dos partes iguales, y si te das cuenta, también pasa por el **foco** $\boldsymbol{F}$ y además es una recta perpendicular a la **directriz** ***d***, este eje también debe de estar representada por una ecuación lineal.

A la cuerda LR' que se pasa por el foco, paralela a la **directriz** y perpendicular al **eje de simetría** se le llama **lado recto** o también **ancho focal**, ya que nos da el ancho de la parábola a la altura del foco.

A la distancia del **foco** al **vértice** (segmento FV) se le llama parámetro (ρ) y como el vértice es un punto de la parábola, (de acuerdo a la definición) la distancia del vértice a la directriz ***d*** también es ρ , entonces la distancia del foco a la directriz ***d*** es 2ρ.

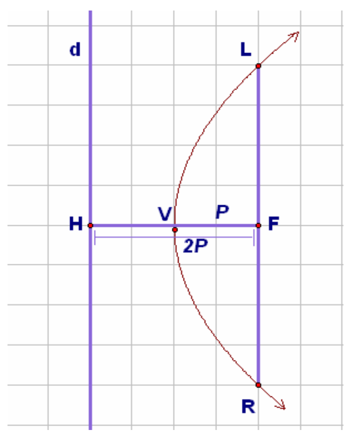


figura 2

5.3 CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA PARÁBOLA.

Hay varias formas de trazar una parábola, utilizando tu juego geométrico o con doblado de papel. Aquí solamente veremos una de ellas, y tu puedes consultar en otros libros o con tu asesor. Para realizar la siguiente construcción necesitas una hoja blanca o de color, regla, escuadra, compás y un lápiz.

- Tracemos primero la directriz ***d*** y el eje de simetría, recordando que son dos rectas perpendiculares, al punto donde se cortan llámale H. Localicemos un punto sobre el eje de simetría y ese será el foco F.
- El vértice se encuentra a la mitad de la distancia que hay del foco F a la directriz ***d*** (lo localizas trazando la mediatriz del segmento FH).
- Dale a tu compás una abertura de F a H y con centro en H marca sobre la directriz ***d*** los puntos A y A'.
- Con la abertura FH y con centro en cada uno de los puntos A, A' y F marca los puntos L y R que serán los extremos del ancho focal.
- Ahora si quieres puntos de la parábola más cercanos al vértice reduce la abertura del compás y con centro en H marca los puntos sobre la directriz B y B'.
- Con esa misma abertura y centro en cada uno de los puntos B, B' y F marca los puntos N y N'
- Así puedes marcar los puntos que quieras, siempre y cuando la abertura sea más grande que la distancia del foco al vértice.
- Para los puntos más alejados que los extremos del ancho focal la abertura del compás debe ser mayor que la distancia del foco al punto H, con esta abertura mayor y con centro en H nuevamente marca los puntos C y C' sobre la directriz.
- Con centro en C, C' y F marca los puntos M y M' y así puedes seguir encontrando varios puntos que formarán la parábola, para que esta te quede bien delineada.

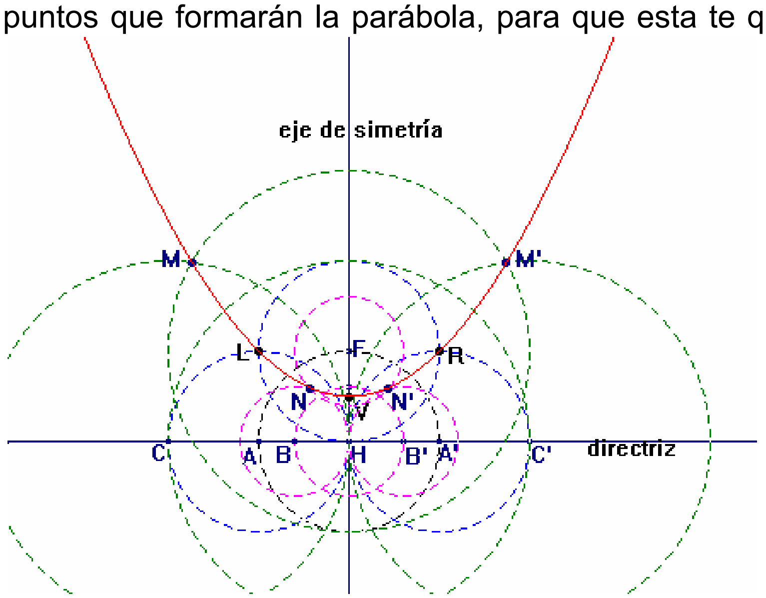


figura 3

5.4 ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA EN FORMA ORDINARIA O CANÓNICA.

5.4.1 Ecuación de la parábola horizontal.

Basándonos en la definición de parábola; "**Es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia (equidistan) de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija *d* llamada directriz**". Aplicaremos esta definición para el caso de una parábola ya sea horizontal o vertical; primero trataremos la parábola horizontal como se ve en la figura 4. Tomaremos un punto cualquiera $M(x, y)$ sobre la parábola; por definición la distancia de M a F $d(MF)$ debe de ser igual a la distancia del punto M a la recta fija ***d***.

Es decir $d(MF) = d(M\boldsymbol{d})$.

Sabemos que si el vértice de la parábola es $V(h, k)$, entonces el foco es $F(h + \rho, k)$ ver la figura 4, y su directriz es una recta vertical que corta al eje X en

$$x = h - \rho$$

y su forma general es: $$x - (h - \rho) = 0$$

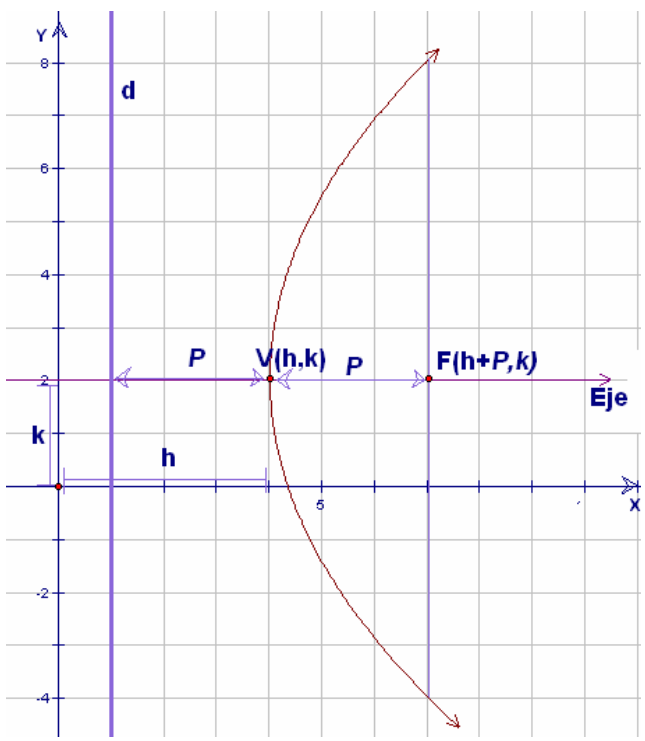


figura 4

Calculemos las distancias, $d(MF)$ y $d(M\boldsymbol{d})$.

Para la distancia de $M(x, y)$ a $F(h + \rho, k)$ aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos del plano.

$$d(MF) = \sqrt{(x-(h+\rho)^2 + (y-k)^2} \qquad \rightarrow \qquad \text{(I)}$$

Para la distancia desde el punto $M(x, y)$ a la recta vertical ***d*** se aplica la fórmula distancia de un punto a una recta que vimos en la unidad 3, en nuestro caso el punto es $M(x, y)$, y la recta es la directriz, su ecuación es $x-(h-\rho)=0$.

$$d(M\boldsymbol{d}) = \frac{|\,(1)x + 0(y) + -(h-\rho)\,|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{|\,x - (h-\rho)\,|}{\sqrt{1}} = |\,x - (h-\rho)\,| \qquad \rightarrow \quad (\text{ II })$$

igualando (I) con (II) y desarrollando, se tiene:

$$d(MF) = d(M\,\boldsymbol{d})$$

$$\sqrt{(x-(h+\rho))^2 + (y-k)^2} = |\,x - (h-\rho)\,|$$

Elevando al cuadrado ambos lados

$$(x-(h+\rho))^2 + (y-k)^2 = (x-(h-\rho))^2$$
$$(x-h-\rho)^2 + (y-k)^2 = (x-h+\rho)^2$$

Desarrollando los cuadrados:

$$x^2 + h^2 + \rho^2 - 2xh - 2x\rho + 2h\rho + (y-k)^2 = x^2 + h^2 + \rho^2 - 2xh + 2x\rho - 2h\rho$$

Reduciendo términos:

$$(y-k)^2 = 2x\rho + 2x\rho - 2h\rho - 2h\rho$$
$$(y-k)^2 = 4x\rho - 4h\rho$$

Factorizando 4ρ del lado derecho tenemos:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4\rho(x-h)} \qquad \rightarrow \qquad \text{(III)}$$

Esta es **la ecuación de la parábola horizontal** en la forma ordinaria o canónica.

La orientación y curvatura están determinadas por el signo y magnitud de "ρ" es decir que:

Si "ρ" es positiva *($\rho > 0$),* la parábola **abre hacia la derecha**, figura 5.

Si "ρ" es negativa *($\rho < 0$),* la parábola **abre hacia la izquierda**, figura 6.

$\rho > 0$ ***$\rho < 0$***

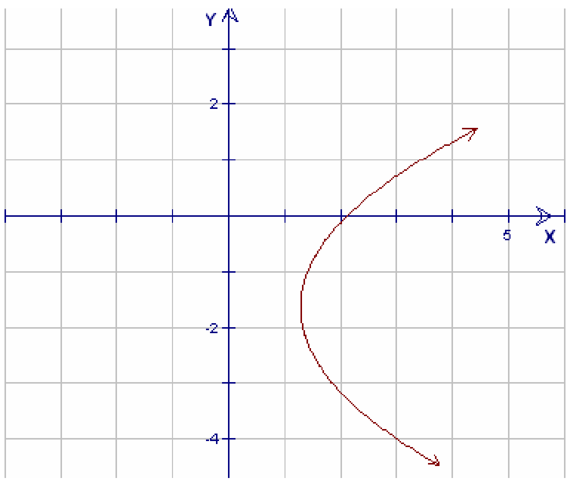


figura 5

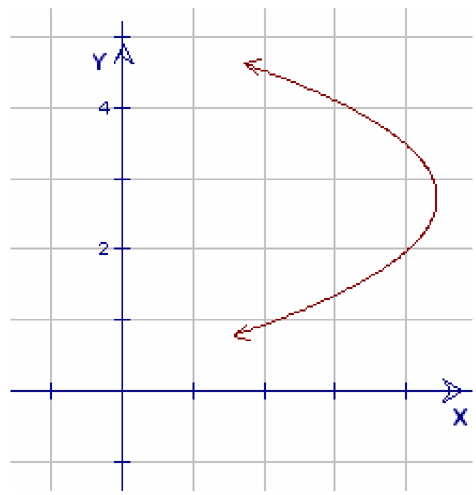


figura 6

Observa que mientras mayor sea la magnitud de *"ρ",* más rápido abre la parábola, es decir es más ancha.

Otra observación muy importante es que si la parábola es horizontal sólo se eleva al cuadrado al binomio en y.

Dada la ecuación de una parábola en forma ordinaria o canónica $(y-k)^2 = 4\rho(x-h)$, se puede conocer las coordenadas del vértice y su parámetro, es decir podemos encontrar los valores de h, k y ρ con los que obtenemos todos los elementos de la curva, como se muestra a continuación:

- Coordenadas del vértice: $V(h,k)$
- Parámetro ρ: $\dfrac{4\rho}{4} = \rho$ El signo de ρ nos indica hacia donde se abre.

Te recomiendo graficar tus datos en un plano cartesiano y luego continuar con:

- Coordenadas del foco: $F(h + r\ ,\ k)$
- Ecuación de la directriz (recta paralela al eje y), corta al eje X en $h-\rho$, entonces su ecuación es: $x = h-\rho$

  su forma general $x-h+\rho = 0$
- Ecuación del eje de simetría (recta paralela al eje X), corta al eje Y en k, entonces su ecuación es: $y = k$

  su forma general $y-k = 0$
- La longitud del lado recto puede determinarse a partir del análisis geométrico en la gráfica de la parábola. Por definición *la distancia de todo punto de la parábola al foco es igual a la distancia del mismo punto a la directriz*, es decir si los extremos del lado recto son los puntos L y R. (ver figura 7), entonces

$$d(LF) = d(L\ \mathbf{d})$$

Pero $d(L\ \mathbf{d})$ = 2 ρ entonces $d(LF)$ = 2 ρ.

Por la misma razón $d(R\ F)$ = 2ρ, así que $d(LR)$ = $|4\rho|$.

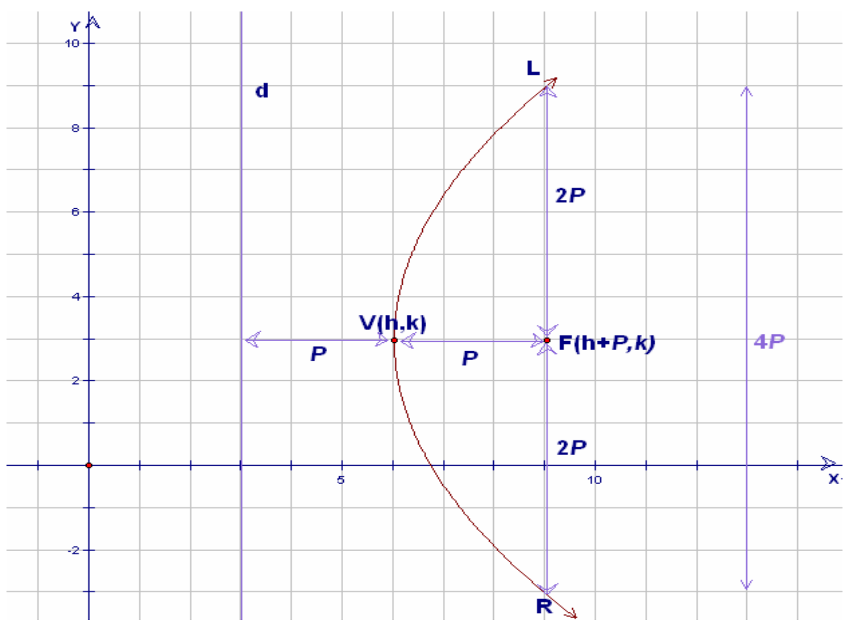


figura 7

Entonces en nuestra fórmula $(y-k)^2 = 4\rho\ (x-h)$, 4 ρ es la longitud del lado recto de la parábola.

EJEMPLOS

Dada la ecuación de la parábola de forma ordinaria, calcula sus elementos y grafícala.

1. $(y-4)^2 = 16(x-3)$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice: $V(h,k);\quad V(3,4)$
- Lado recto: $4\rho = 16$ entonces $\rho = \dfrac{16}{4} = 4$ es decir $\rho = 4$

  Como la parábola es horizontal y ρ es positiva abre a la derecha entonces el foco está a 4 unidades a la derecha del vértice, ver la figura 8.

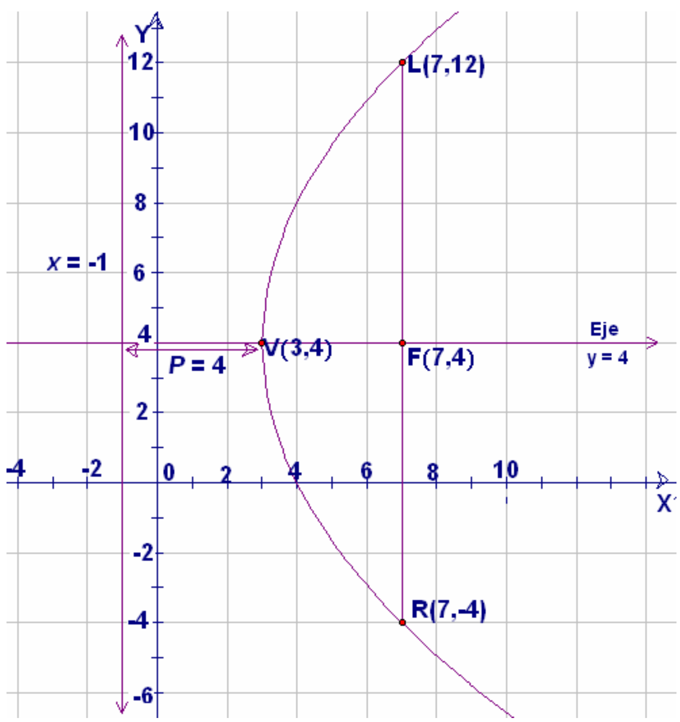


figura 8

- Coordenadas del foco:

Del vértice hacia la derecha contamos 4 unidades, es decir al valor de h le sumamos 4 y tenemos 3 + 4 = 7, entonces las coordenadas del foco son $F(7\ ,\ 4)$.

- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre a la derecha, la directriz es una recta vertical que corta al eje X 4 unidades a la izquierda del vértice, es decir al valor de h le restamos 4 y tenemos $3 - 4 = -1$, entonces la directriz corta al eje X en -1 y su ecuación es: $x = -1$

  Su forma general: $x + 1 = 0$
- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es horizontal su eje de simetría también es horizontal y todo eje de simetría pasa por el vértice, es decir corta al eje de las Y's en 4, entonces su ecuación es $y = 4$.

  Su forma general: $y - 4 = 0$
- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(7,4)$ y $|4\rho| = 16$, entonces del foco hacia arriba contamos ocho unidades y tendremos las coordenadas de L, y del foco hacia abajo contamos otras ocho unidades y tendremos las coordenadas de R, es decir $L(7,12)$ y $R(7, -4)$.

2. $(y + 2)^2 = -12(x + 3)$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice: $V(h,k)$; $V(-3,-2)$
- Lado recto: $4\rho = -12$ entonces $\rho = \frac{-12}{4} = -3$ es decir $\rho = -3$

  Como la parábola es horizontal y ρ es negativa abre a la izquierda entonces el foco está a 3 unidades a la izquierda del vértice, ver la figura 9.
- Coordenadas del foco: Del vértice hacia la izquierda contamos 3 unidades, es decir al valor de h le restamos 3 y tenemos $-3 - 3 = -6$, entonces las coordenadas del foco son $F(-6, -2)$.
- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre a la izquierda, la directriz es una recta vertical que corta al eje X 3 unidades a la derecha del vértice, es decir al valor de h le sumamos 3 y tenemos $-3 + 3 = 0$, entonces la directriz corta al eje X en 0 y su ecuación es: $x = 0$

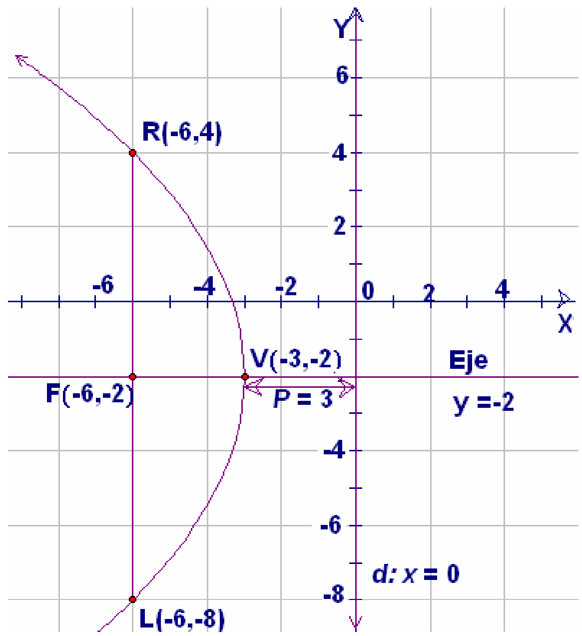


figura 9

- Ecuación del eje de simetría: Como la parábola es horizontal su eje de simetría también es horizontal y pasa por el vértice, es decir corta al eje de las Y's en –2, entonces su ecuación es $y = -2$.

  Su forma general: $y + 2 = 0$
- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(-6,-2)$ y $|4\rho|$ = 12, entonces del foco hacia arriba contamos seis unidades y tendremos las coordenadas de R, y del foco hacia abajo contamos otras seis unidades y tendremos las coordenadas de L, es decir $L(-6, -8)$ y $R(-6, 4)$.

3. $y^2 = -8(x-1)$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice:

  La ecuación dada la podemos escribir como $(y-0)^2 = -8(x-1)$, entonces el vértice $V(h,k)$ es $V(1,0)$.
- Lado recto: $4\rho = -8$ entonces $\rho = \dfrac{-8}{4} = -2$ es decir $\rho = -2$

- Como la parábola es horizontal y ρ es negativa abre a la izquierda entonces el foco está a 2 unidades a la izquierda del vértice, ver la figura 10.

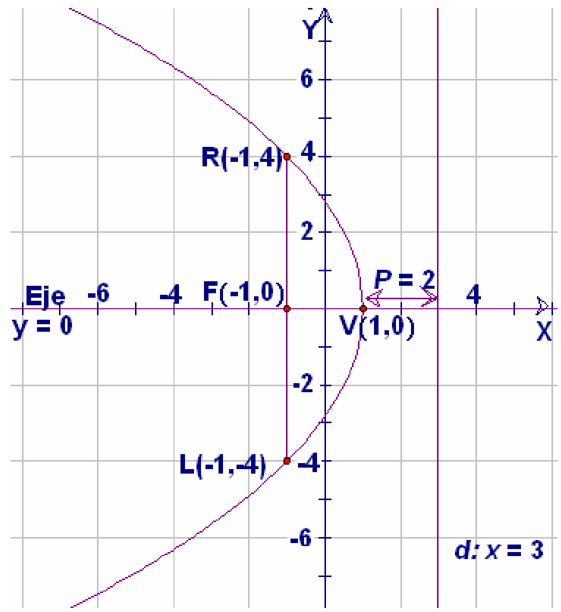


figura 10

- Coordenadas del foco: Del vértice hacia la izquierda contamos 2 unidades, es decir al valor de h le restamos 2 y tenemos $1 - 2 = -1$, entonces las coordenadas del foco son $F(-1\ ,\ 0)$.
- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre a la izquierda, la directriz es una recta vertical que corta al eje X 2 unidades a la derecha del vértice, es decir al valor de h le sumamos 2 y tenemos $1 + 2 = 3$, entonces la directriz corta al eje X en 3 y su ecuación es: $x = 3$

  Su forma general es: $x - 3 = 0$
- Ecuación del eje de simetría: Como la parábola es horizontal su eje de simetría también es horizontal y pasa por el vértice, es decir corta al eje de las Y's en 0, entonces su ecuación es $y = 0$.
- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(-1\ ,\ 0)$ y $|4\rho| = 8$, entonces del foco hacia arriba contamos cuatro unidades y tendremos las coordenadas de R, y del foco hacia abajo contamos otras cuatro unidades y tendremos las coordenadas de L, es decir $L(-1, -4)$ y $R(-1, 4)$.

4. $y^2 = 12x$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice:

La ecuación dada la podemos escribir como $(y-0)^2 = 12(x-0)$, entonces el vértice $V(h, k)$ es $V(0, 0)$.

- Lado recto: $4\rho = 12$ entonces $\rho = \frac{12}{4} = 3$ es decir $\rho = 3$.

  Como la parábola es horizontal y ρ es positiva abre a la derecha entonces el foco está a 3 unidades a la derecha del vértice, ver la figura 11.

- Coordenadas del foco:

  Del vértice hacia la derecha contamos 3 u., es decir al valor de h le sumamos 3 y tenemos 0 + 3 = 3, entonces las coordenadas del foco son $F(3, 0)$.

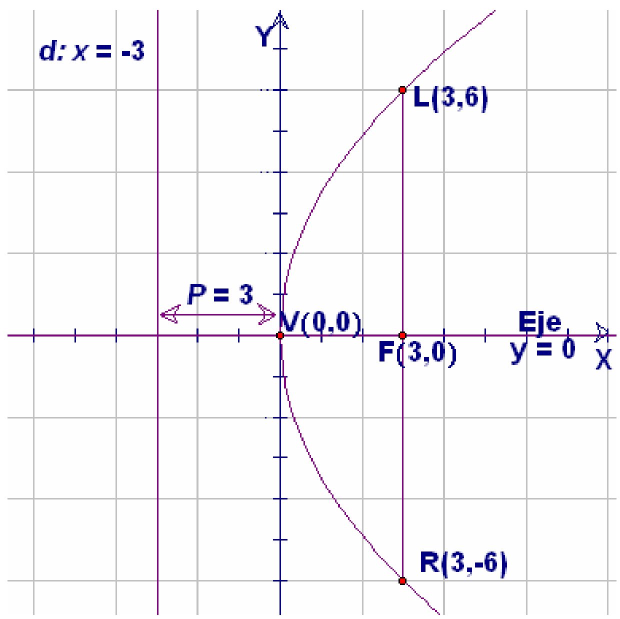


figura 11

- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre a la derecha, la directriz es una recta vertical que corta al eje X 3 u. a la izquierda del vértice, es decir al valor de h le restamos 3 y tenemos 0 – 3 = –3, entonces la directriz corta al eje X en –3 y su ecuación es: $x = -3$

  Su forma general: $x + 3 = 0$

- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es horizontal su eje de simetría también es horizontal y pasa por el vértice, es decir corta al eje de las Y's en 0, entonces su ecuación es $y = 0$.
- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(3\ ,\ 0)$ y $|4\rho| = 12$, entonces del foco hacia arriba contamos seis unidades y tendremos las coordenadas de L, y del foco hacia abajo contamos otras seis unidades y tendremos las coordenadas de R, es decir $L(3\ ,\ 6)$ y $R(3\ ,\ -6)$.

EJERCICIOS 5.4.1

Para las siguientes ecuaciones de parábolas, encontrar sus elementos y graficarlas.

1. $(y-4)^2 = 8(x-2)$
2. $y^2 = -6x$
3. $(y-7)^2 = 12\left(x+\frac{5}{2}\right)$
4. $(y+2)^2 = 2x$
5. $(y+3)^2 = -8(x+5)$
6. $(y+5)^2 = -2(x+3)$
7. $2y^2 = -12(x-2)$
8. $(y-1)^2 = -5(x+3)$

¿Crees poder contestar el problema planteado al principio de la unidad?, si es así comunícaselo a tu asesor o profesor, si todavía no puedes, lee y realiza los ejercicios de la siguiente parte y en el momento que creas poder contestarlo comunícalo para verificar si tu respuesta es correcta.

5.4.2 Ecuación de la parábola vertical.

Hasta ahora hemos analizado sólo parábolas horizontales, pero también estudiaremos las verticales. Para encontrar su ecuación, sus elementos y hacer su gráfica se procede de forma similar que la parábola horizontal, pero en este caso se sumará o restará el valor del parámetro a la ordenada k.

Para encontrar su ecuación se calcula la distancia de un punto cualquiera $M(x, y)$ al foco $F(h\,,\ k+\rho)$, que será igual a la distancia del mismo punto $M(x, y)$ a la directriz $y = k - \rho$ (por definición de parábola), por medio del álgebra resultará que su ecuación es: $\boxed{(x-h)^2 = 4\rho(y-k)}$ $\rightarrow$ (IV)

Donde el vértice de la parábola es $V(h, k)$, su foco es $F(h\,,\ k+\rho)$, y su directriz es una recta horizontal que corta el eje y en $y = k - \rho$, ver la figura 12.

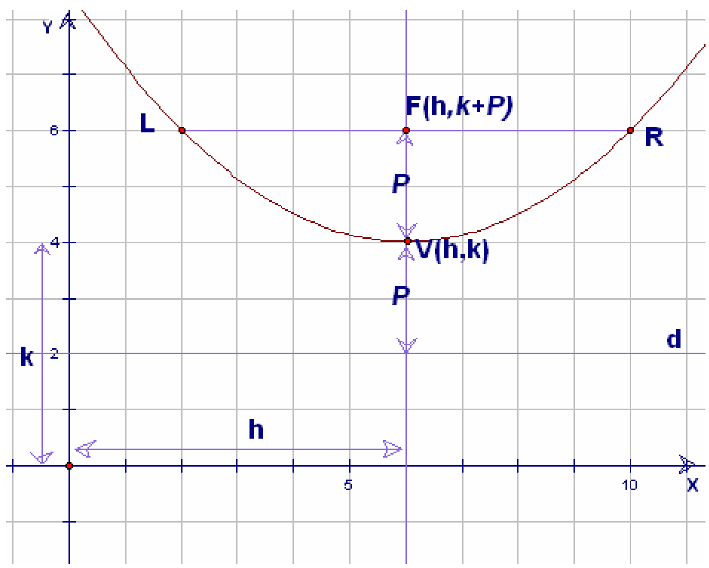


figura 12

También aquí la orientación y curvatura de la parábola se determinan por el <u>signo</u> y <u>magnitud</u> de *"ρ".*

Si *"ρ"* positiva *($\rho > 0$),* la parábola abre hacia arriba, figura 13.

Si "ρ" es negativa ($\rho < 0$), la parábola abre hacia abajo, figura 14.

$\rho > 0$ **$\rho < 0$**

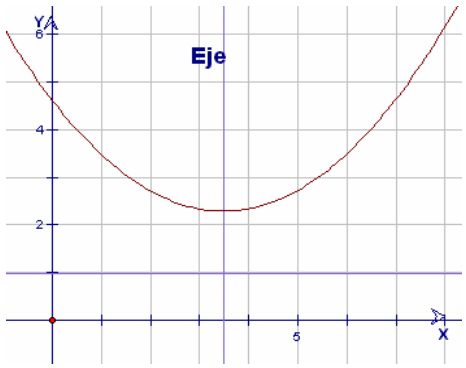


figura 13

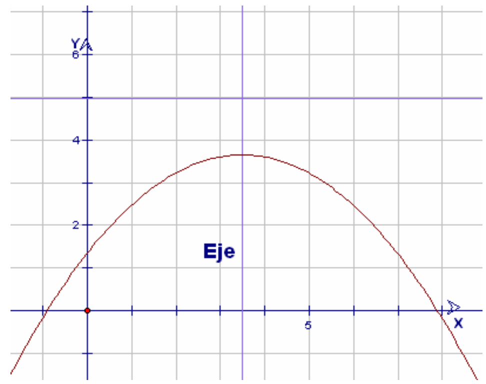


figura 14

Respecto a la magnitud de "ρ" podemos decir que mientras mayor sea el valor de "ρ", más rápido abre la parábola.

Observa que en este caso sólo se eleva al cuadrado al binomio en x, mientras que en la horizontal sólo se elevaba al cuadrado el binomio en y.

Dada la ecuación de la parábola en forma ordinaria o canónica, se pueden conocer las coordenadas del vértice $(h\ ,\ k)$ y su parámetro ρ, conociendo a estos obtendremos todos los demás elementos como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Dada la ecuación de la parábola, calcular sus elementos y graficarla.

1. $(x-3)^2 = 8(y-2)$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice: $V(h\ ,\ k)$: $V(3\ ,\ 2)$
- Lado recto: $4\rho = 8$ entonces $\rho = \dfrac{8}{4} = 2$, es decir $\rho = 2$.

Como la parábola es vertical y ρ es positiva abre hacia arriba entonces el foco está 2 unidades arriba del vértice, ver la figura 15.

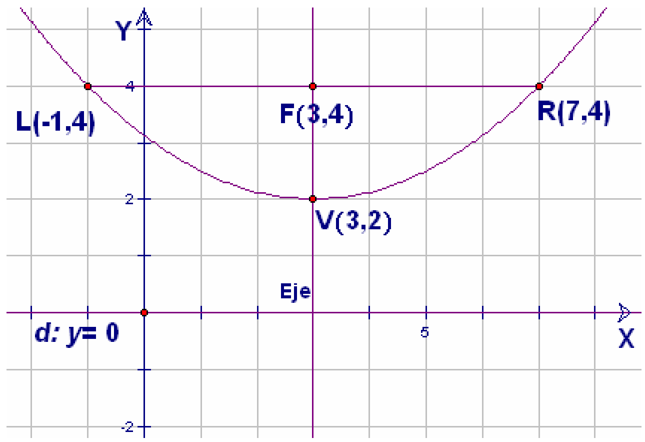


figura 15

- Coordenadas del Foco: Como abre hacia arriba y ρ = 2, del vértice hacia arriba contamos 2 unidades, es decir al valor de k le sumamos 2 y tenemos 2 + 2 = 4, entonces las coordenadas del foco son $F(3\ ,\ 4)$.
- Ecuación de la directriz: Como la parábola abre hacia arriba, la directriz es una recta horizontal que corta al eje Y 2 unidades abajo del vértice, es decir al valor de k le restamos 2 y tenemos 2 – 2 = 0, entonces la directriz corta al eje de las Y's en 0 y su ecuación es $y = 0$.
- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es vertical su eje de simetría también es vertical y sabemos que pasa por el vértice, es decir corta al eje de las X 's en 3. Y su ecuación es: $x = 3$, obsérvalo en la figura 15.
  En forma general: $x - 3 = 0$
- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(3\ ,\ 4)$ y $|4\rho| = 8$ entonces del foco a la derecha contamos 4 unidades y tendremos las coordenadas de R. Y del foco a la izquierda contamos otras 4 unidades y tendremos las coordenadas de L, es decir $L(-1\ ,\ 4)$ y $R(7\ ,\ 4)$.

2. $(x+4)^2 = -12(y+5)$

Solución.
En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice: $V(h\ ,\ k) : V(-4\ ,\ -5)$

- Lado recto: $4\rho = -12$ entonces $\rho = \dfrac{-12}{4} = -3$, es decir $\rho = -3$.

Como la parábola es vertical y ρ es negativa abre hacia abajo entonces el foco está 3 unidades abajo del vértice, ver la figura 16.

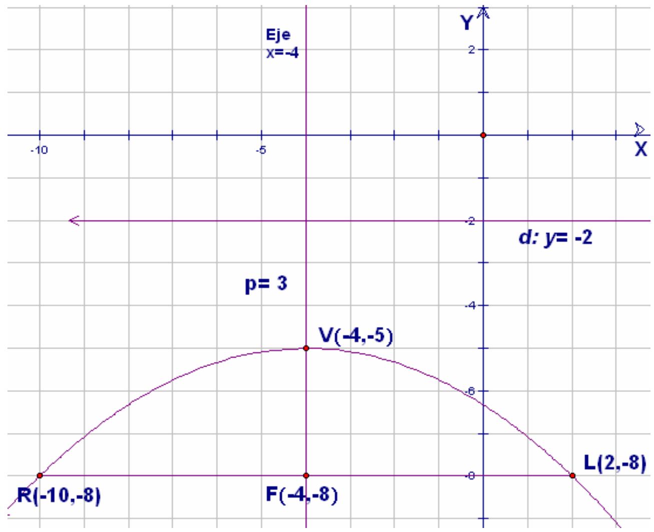


figura 16

- Coordenadas del Foco: Del vértice hacia abajo contamos 3 unidades, es decir al valor de k le restamos 3 y tenemos $-5 - 3 = -8$, entonces las coordenadas del foco son $F(-4\ ,-8)$.
- Ecuación de la directriz: Como la parábola abre hacia abajo, la directriz es una recta horizontal que corta al eje Y arriba del vértice, es decir al valor de k le sumamos 3 y tenemos $-5 + 3 = -2$, entonces la directriz corta al eje de las Y's en -2 y su ecuación es $y = -2$.

  En forma general: $y + 2 = 0$.
- Ecuación del eje de simetría: La parábola es vertical entonces su eje de simetría también es vertical y sabemos que pasa por el vértice, es decir corta al eje de las X 's en -4. Y su ecuación es: $x = -4$, obsérvalo en la figura 16.

  En forma general: $x + 4 = 0$
- Coordenadas de L y R: El foco está en $F(-4\ ,-8)$ y $|4\rho| = 12$ entonces del foco a la derecha contamos 6 u. y tendremos las coordenadas de L. Y del foco a la izquierda contamos otras 6 u. y tendremos las coordenadas de R, es decir $L(2\ ,-8)$ y $R(-10\ ,-8)$.

3. $x^2 = -16(y-4)$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice:

La ecuación que nos dan la podemos escribir como $(x-0)^2 = -16(y-4)$ entonces su vértice es $V(0,4)$.

- Lado recto: $4\rho = -16$ entonces $\rho = \dfrac{-16}{4} = -4$, es decir $\rho = -4$.

Tenemos una parábola es vertical y ρ es negativa entonces abre hacia abajo y su foco está 4 unidades abajo del vértice, ver la figura 17.

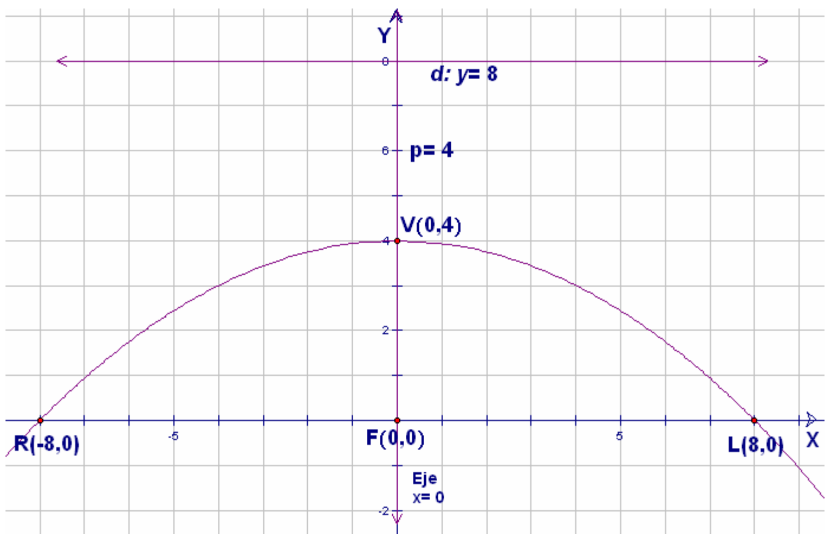


figura 17

- Coordenadas del Foco: Del vértice hacia abajo contamos 4 unidades, es decir al valor de k le restamos 4 y tenemos 4 – 4 = 0, entonces las coordenadas del foco son $F(0\;,\;0)$.
- Ecuación de la directriz: Si la parábola abre hacia abajo, la directriz es una recta horizontal que corta al eje Y 4 unidades arriba del vértice, es decir al valor de k le sumamos 4 y tenemos 4 + 4 = 8, entonces la directriz corta al eje de las Y's en 8 y su ecuación es $y = 8$.

  En forma general: $y - 8 = 0$.

- Ecuación del eje de simetría: La parábola es vertical entonces su eje de simetría también es vertical y sabemos que pasa por el vértice, es decir corta al eje de las X ‘s en 0. Y su ecuación es: $x = 0$, obsérvalo en la figura 17.
- Coordenadas de L y R: El foco es el punto $F(0\ ,\ 0)$ y $|4\rho| = 16$ entonces del foco a la derecha contamos 8 unidades, y tendremos las coordenadas de L. Y del foco a la izquierda contamos otras 8 unidades, y tendremos las coordenadas de R, es decir $L(8\ ,\ 0)$ y $R(-8\ ,\ 0)$.

4. $(x-3)^2 = y$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice: $V(h\ ,\ k) : V(3\ ,\ 0)$
- Lado recto: $4\rho = 1$ entonces $\rho = \dfrac{1}{4}$.

Como la parábola es vertical y ρ es positiva abre hacia arriba entonces el foco está $\dfrac{1}{4}$ = 0.25 unidades arriba del vértice, ver la figura 18.

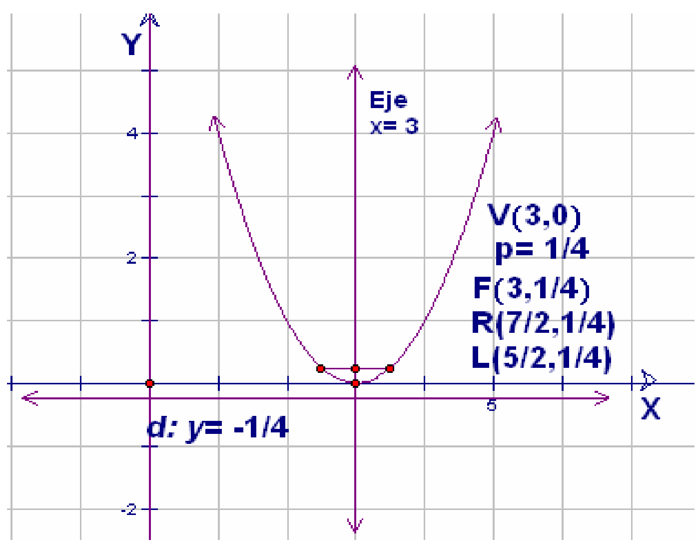


figura 18

- Coordenadas del Foco: Del vértice hacia arriba contamos $\frac{1}{4}$ = 0.25 unidades es decir al valor de k le sumamos $\frac{1}{4}$ y tenemos $0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, entonces las coordenadas del foco son $F(3\ ,\ \frac{1}{4})$.
- Ecuación de la directriz: Como la parábola abre hacia arriba, la directriz es una recta horizontal que corta al eje Y abajo del vértice, es decir al valor de k le restamos $\frac{1}{4}$ y tenemos $0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, entonces la directriz corta al eje de las Y's en $-\frac{1}{4}$ y su ecuación es $y = -\frac{1}{4}$.

  Su forma general es $4y + 1 = 0$
- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es vertical su eje de simetría también es vertical y pasa por el vértice, es decir corta al eje de las X 's en 3. Y su ecuación es: $x = 3$, obsérvalo en la figura 18.

  En forma general: $x - 3 = 0$
- Coordenadas de L y R: El foco es el punto $F(3\ ,\ \frac{1}{4})$ y $|4\rho| = 1$ entonces del foco a la derecha contamos media unidad y tendremos $R(\frac{7}{2}\ ,\ \frac{1}{4})$. Y del foco a la izquierda contamos otra media unidad y tendremos $L(\frac{5}{2}\ ,\ \frac{1}{4})$.

5. $x^2 = 4y$

Solución.

En un plano cartesiano vamos localizando lo siguiente:

- Coordenadas del vértice:

La ecuación que nos dan la podemos escribir como $(x-0)^2 = 4(y-0)$, es decir su vértice es $V(0\ ,\ 0)$.

- Lado recto : Como $4\rho = 4$ entonces $\rho = 1$.

Es positivo entonces la parábola abre hacia arriba.

- Coordenadas del foco:

  Como abre hacia arriba y $\rho = 1$, el foco se encuentra en:

$$F(h\ ,\ k+\rho);\quad F(0\ ,\ 0+1);\quad F(0\ ,\ 1)$$ ver la figura 19.

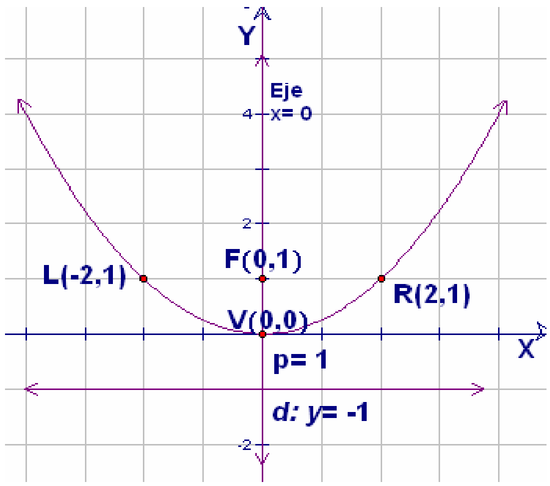


figura 19

- Ecuación de la directriz: Corta al eje Y en:

$$y = k - \rho;\quad y = 0 - 1;\quad y = -1$$

Forma general : $y + 1 = 0$

- Ecuación del eje de simetría:

  Corta el eje X en 0, es decir su ecuación es $x = 0$

- Coordenadas de L y R:

  Observando la figura 19, como el foco es $F(0, 1)$ y $|4\rho| = 4$, entonces del foco hacia la derecha contamos dos unidades y del foco hacia la izquierda contamos otras dos unidades, es decir $L(-2\ ,\ 1)$ y $R(2\ ,\ 1)$.

EJERCICIOS 5.4.2

Dada la ecuación de la parábola, calcular sus elementos y graficarla.

1. $(x-2)^2 = 12(y-4)$
2. $(x-2)^2 = y$
3. $(x-4)^2 = -12(y-3)$
4. $(x+5)^2 = 8(y+3)$
5. $x^2 = -4(y+1)$
6. $(x+3)^2 = 4(y+2)$

5.4.3 Observaciones de la ecuación de la parábola en forma ordinaria o canónica.

- La ecuación $(y-k)^2 = 4\rho(x-h)$, pertenece a una **parábola horizontal** ya que se eleva al cuadrado el binomio en y, y recuerda que el vértice es (h , k) además 4ρ que es el ancho focal nos dice el valor del parámetro ρ.
  - Si ρ es positiva, la parábola abre hacia la derecha
  - Si ρ es negativa, la parábola abre hacia la izquierda.

- La ecuación $(x-h)^2 = 4\rho(y-k)$, pertenece a una **parábola vertical** ya que se eleva al cuadrado el binomio en x, también en esta ecuación el vértice es (h , k) y 4ρ que es el ancho focal nos dice el valor del parámetro ρ.
  - Si ρ es positiva, la parábola abre hacia arriba.
  - Si ρ es negativa, la parábola abre hacia abajo.

- Observa que en ambas ecuaciones la h siempre aparece junto con la x, y la k junto con la y. Así que para obtener las coordenadas del vértice de la parábola, sólo tiene que escribir los valores que aparecen en cada binomio cambiándoles el signo.
- Además en el segundo miembro de estas ecuaciones aparece el parámetro ρ multiplicado por cuatro, y para obtener su magnitud sólo hay que dividirlo entre cuatro.

¿AHORA SI YA PUEDES AYUDAR A CONTESTAR LA PREGUNTA QUE SE PLANTEARON HUGO, PACO Y LUIS EN EL PROBLEMA INTRODUCTORIO?, ¿CUÁL SERÍA?

____

____

____

5.5 ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA EN FORMA GENERAL.

La ecuación de la parábola en su forma general es aquella en la que tenemos sólo un término cuadrático puede ser en x o en y, dos términos lineales uno en x y el otro en y, y un término independiente, esta ecuación debe de estar igualada a cero. La ecuación es de la forma $\boxed{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0} \longrightarrow$ (1)

o $\boxed{By^2 + Dx + Ey + F = 0} \longrightarrow$ (2)

Donde A, B, D, E y F son números.

En cualquiera de las ecuaciones puede faltar el término lineal en x o en y, o el término independiente, pero nunca debe faltar el término cuadrático.

Toda ecuación de la parábola en forma ordinaria o canónica la podemos expresar en su forma general. Para esto sólo hay que desarrollar el binomio al cuadrado, ordenar los términos e igualarla a cero, de la misma forma que lo hicimos en la circunferencia.

EJEMPLOS

1. Expresar la ecuación en forma ordinaria $(y - 3)^2 = 6(x + 1)$ en su forma general.

Solución.

Desarrollamos $(y - 3)^2$, recuerda que es el cuadrado de un binomio entonces:

$$(y - 3)^2 = y^2 + 2y(-3) + (-3)^2 = y^2 - 6y + 9$$

Así nuestra ecuación ordinaria se convierte en:

$$y^2 - 6y + 9 = 6(x + 1)$$

Haciendo el producto del lado derecho, igualando a cero y ordenando tenemos:

$$y^2 - 6y + 9 = 6x + 6$$

$$y^2 - 6y + 9 - 6x - 6 = 0$$

$\boxed{y^2 - 6x - 6y + 3 = 0}$ ecuación en forma general.

2. Expresar la ecuación $(x + 5)^2 = -12(y - 2)$ en su forma general.

Solución.

Desarrollamos $(x + 5)^2$, recuerda que es el cuadrado de un binomio entonces:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2x(5) + (5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Así nuestra ecuación ordinaria se convierte en: $x^2 + 10x + 25 = -12(y - 2)$

Haciendo el producto del lado derecho, igualando a cero y ordenando términos tenemos: $x^2 + 10x + 25 = -12y + 24$

$$x^2 + 10x + 25 + 12y - 24 = 0$$

$$\boxed{x^2 + 10x + 12y + 1 = 0}$$ ecuación en forma general.

3. Expresar la ecuación en forma ordinaria $x^2 = \square(y + 4)$ en su forma general.

Solución.

En este caso no hay que desarrollar el cuadrado de un binomio, solo debemos multiplicar por 3 a toda la ecuación para quitar el denominador del lado derecho:

$$3(x^2) = 3(\square(y + 4))$$

$$3x^2 = 2(y + 4)$$

realizamos el producto: $3x^2 = 2y + 8$

igualamos a cero y ordenamos términos y tenemos:

$$\boxed{3x^2 - 2y - 8 = 0}$$ forma general.

EJERCICIOS 5.5

Para cada caso, obtener la ecuación de la parábola en forma general, y decir si es horizontal o vertical, y hacia donde se abre.

1) $(x + 7)^2 = 2(y - 5)$

2) $(y - 1)^2 = -3(x - 1)$

3) $(y + 3)^2 = 7(x - 2)$

4) $(x + 1)^2 = -6(y + 5)$

5) $(x - 4)^2 = \square(y - 1)$

6) $(y - 7)^2 = -\square(x - 1)$

7) $x^2 = \square(y + 2)$

8) $(x + 6)^2 = -4y$

9) $(y - 5)^2 = -10x$

10) $(y + 9)^2 = \square(x + 1)$

5.5.1 Reducción de la forma general a la forma ordinaria.

Anteriormente aprendiste a llevar una ecuación de una circunferencia de su forma general a su forma ordinaria o canónica, con la ecuación de la parábola se procede de forma similar, pero en este caso completaremos sólo un trinomio cuadrado perfecto veámoslo con los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

En cada caso obtener los elementos de cada parábola y trazar su gráfica.

1. $x^2 - 6 = 6x + 5y$

Solución.

Agrupamos los términos con x del lado izquierdo, ya que el cuadrado lo tiene x.

$$x^2 - 6x = 5y + 6$$

Completamos un trinomio cuadrado perfecto para x.

$$x^2 - 6x + (-3)^2 = 5y + 6 + (-3)^2$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto y efectuamos las operaciones del lado derecho de la igualdad.

$$(x - 3)^2 = 5y + 6 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 5y + 15$$

Factorizamos del lado derecho.

$$\boxed{(x - 3)^2 = 5(y + 3)}$$ forma ordinaria o canónica.

Sus elementos son:

- Vértice: (3 , –3)
- Lado recto: $4\rho = 5$ entonces $\rho = \frac{5}{4}$.

El foco está $\frac{5}{4}$ = 1.25 unidades arriba del vértice ya que si el cuadrado esta en x es vertical y como ρ es positiva abre hacia arriba, ver la figura 20.

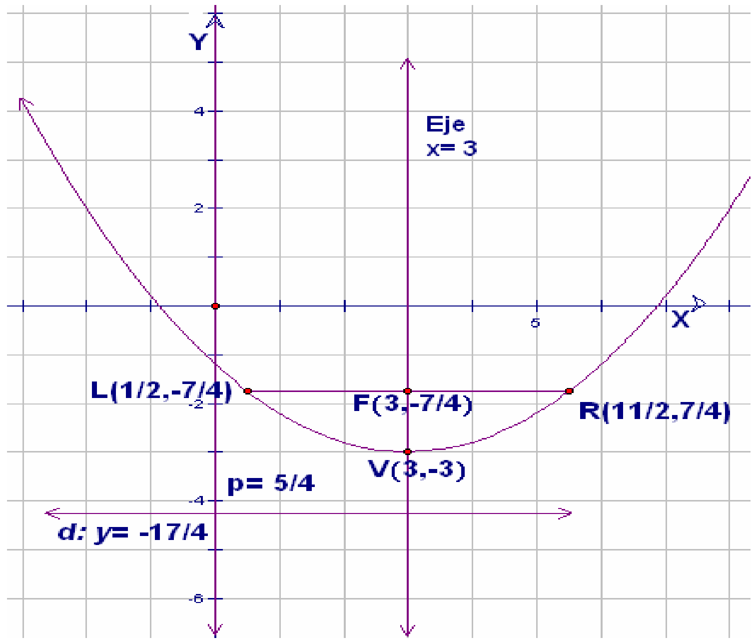


figura 20

- Coordenadas del Foco: Del vértice hacia arriba contamos $\frac{5}{4}$ = 1.25u. es decir al valor de k le sumamos $\frac{5}{4}$ y tenemos $-3 + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}$, entonces las coordenadas del foco son $F(3\ ,\ -\frac{7}{4})$.
- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre hacia arriba, la directriz es una recta horizontal que corta al eje Y abajo del vértice, es decir en

$$-3 - \frac{5}{4} = -\frac{17}{4}$$

entonces la ecuación de la directriz es: $y = -\frac{17}{4}$.

Su forma general: $4y + 17 = 0$

- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es vertical su eje de simetría también es vertical y sabemos que pasa por el vértice, es decir corta al eje de las X 's en 3. Y su ecuación es: $x = 3$, obsérvalo en la figura 20.

Su forma general $x - 3 = 0$

- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(3\ ,\ -\frac{7}{4})$ y $4\rho = 5$ entonces del foco a la derecha contamos 2.5 unidades y ahí serán las coordenadas de R. Y del foco a la izquierda contamos otras 2.5 u. y tendremos las coordenadas de L, es decir $L(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ y $R(\frac{11}{2}\ , -\frac{7}{4})$.

2. $6x - 8y = 8 - y^2$

Solución.

Agrupamos los términos con y del lado izquierdo, ya que el cuadrado lo tiene y.

$$y^2 - 8y = -6x + 8$$

Completamos un trinomio cuadrado perfecto para y.

$$y^2 - 8y + (-4)^2 = -6x + 8 + (-4)^2$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto y efectuamos las operaciones del lado derecho de la igualdad.

$$(y-4)^2 = -6x + 8 + 16$$
$$(y-4)^2 = -6x + 24$$

Factorizamos del lado derecho.

$$\boxed{(y-4)^2 = -6(x-4)} \quad \text{forma ordinaria o canónica.}$$

Sus elementos son:

- Vértice: (4 , 4)
- Lado recto: $4\rho = -6$ entonces $\rho = -\frac{3}{2}$.

El foco está $\frac{3}{2}$ = 1.5 unidades a la izquierda del vértice ya que si el cuadrado esta en y es horizontal y como ρ es negativa abre hacia la izquierda.

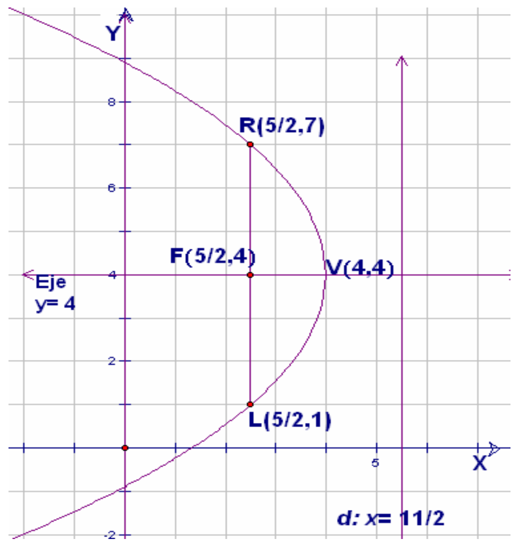


figura 21

- Coordenadas del Foco: Del vértice hacia la izquierda contamos $\frac{3}{2}$ = 1.5 unidades es decir al valor de h le restamos $\frac{3}{2}$ y tenemos $4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, entonces las coordenadas del foco son $F(\frac{5}{2}, 4)$.

- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre hacia la izquierda, la directriz es una recta vertical que corta al eje X a la derecha del vértice, es decir en $4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$; entonces la ecuación de la directriz es: $x = \frac{11}{2}$.
  Su forma general: $2x - 11 = 0$

- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es horizontal su eje de simetría también es horizontal y sabemos que pasa por el vértice, es decir corta al eje de las Y's en 4. Y su ecuación es: $y = 4$, obsérvalo en la figura 21.
  Su forma general $y - 4 = 0$

- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(\frac{5}{2}, 4)$, y $|4\rho| = 6$ entonces del foco hacia arriba contamos 3 unidades y ahí serán las coordenadas de R. Y del foco hacia abajo contamos otras 3 unidades, y localizamos las coordenadas de L, es decir $L(\frac{5}{2}, 1)$ y $R(\frac{5}{2}, 7)$.

3. $2x^2 - 8x + 14y = 18$

Solución.

Agrupamos los términos con x del lado izquierdo, ya que el cuadrado lo tiene x.

$$2x^2 - 8x = -14y + 18$$

Como el coeficiente de x^2 es 2, dividimos toda la ecuación entre 2.

$$\frac{2x^2 - 8x}{2} = \frac{-14y + 18}{2}$$

$$x^2 - 4x = -7y + 9$$

Completamos un trinomio cuadrado perfecto para x.

$$x^2 - 4x + (-2)^2 = -7y + 9 + (-2)^2$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto y efectuamos las operaciones del lado derecho de la igualdad.

$$(x - 2)^2 = -7y + 9 + 4$$

$$(x - 2)^2 = -7y + 13$$

Factorizamos del lado derecho.

$$\boxed{(x - 2)^2 = -7\left(y - \frac{13}{7}\right)}$$ forma ordinaria o canónica.

Sus elementos son:

- Vértice: $(2, \frac{13}{7})$

- Lado recto: $4\rho = -7$ entonces $\rho = -\frac{7}{4}$.

El foco está $\frac{7}{4}$ = 1.75 unidades abajo del vértice ya que si el cuadrado esta en x es vertical y como ρ es negativa abre hacia abajo, ver la figura 22.

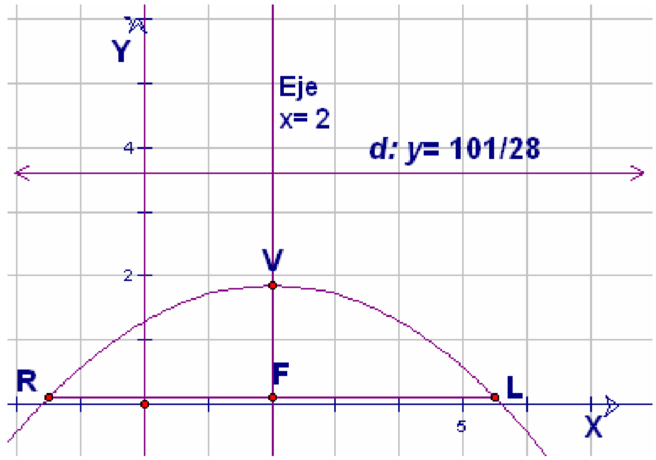


figura 22

- Coordenadas del Foco: Del vértice hacia abajo contamos $\frac{7}{4}$ = 1.75 unidades es decir al valor de k le restamos $\frac{7}{4}$ y tenemos $\frac{13}{7} - \frac{7}{4} = \frac{3}{28}$, entonces las coordenadas del foco son $F(2\ ,\ \frac{3}{28})$.

- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre hacia abajo, la directriz es una recta horizontal que corta al eje Y arriba del vértice, es decir en $\frac{13}{7} + \frac{7}{4} = \frac{101}{28}$; entonces la ecuación de la directriz es: $y = \frac{101}{28}$.

  Su forma general: $28y - 101 = 0$

- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es vertical entonces su eje de simetría también es vertical y sabemos que pasa por el vértice, es decir corta al eje de las X 's en 2. Y su ecuación es: $x = 2$, obsérvalo en la figura 22.

  Su forma general $x - 2 = 0$

- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(2\ ,\ \frac{3}{28})$ y $|4\rho| = 7$ entonces del foco a la derecha contamos 3.5 u. y tendremos las coordenadas de L. Y del foco a la izquierda contamos otras 3.5 u. y tendremos las coordenadas de R, es decir $L(\frac{11}{2}\ ,\ \frac{3}{28})$ y $R(-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{28})$.

4. $3y^2 - 24x + 6 = 0$

Solución.

Agrupamos los términos con y del lado izquierdo, ya que el cuadrado lo tiene y.

$$3y^2 = 24x - 6$$

Como el coeficiente de y^2 es 3, dividimos toda la ecuación entre 3.

$$\frac{3y^2}{3} = \frac{24x - 6}{3}$$

$$y^2 = 8x - 2$$

En este caso no hay necesidad de completar un trinomio cuadrado perfecto, solo factorizamos el lado derecho.

$$\boxed{y^2 = 8(x - \frac{1}{4})}$$ forma ordinaria o canónica.

Sus elementos son:

- Vértice: $(\frac{1}{4}\ ,\ 0)$
- Lado recto: $4\rho = 8$ entonces $\rho = 2$.

El foco está 2 unidades a la derecha del vértice ya que si el cuadrado esta en y es horizontal y como ρ es positiva abre hacia la derecha, ver la siguiente figura.

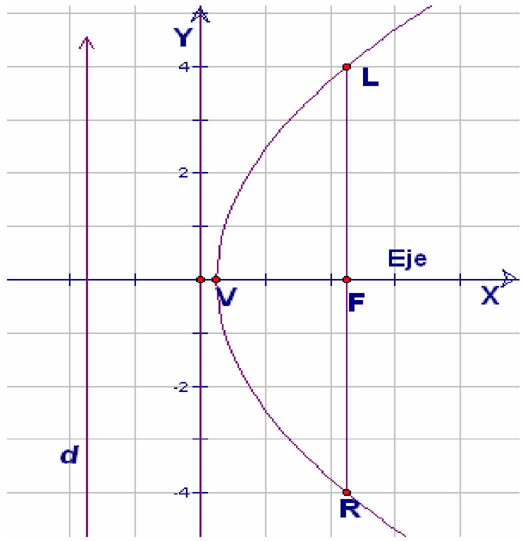


figura 23

- Coordenadas del Foco: Del vértice hacia la derecha contamos 2 unidades, es decir al valor de h le sumamos 2 y tenemos $\frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, entonces las coordenadas del foco son $F(\frac{9}{4}, 0)$.
- Ecuación de la directriz: Como la parábola se abre hacia la derecha, la directriz es una recta vertical que corta al eje X a la izquierda de su vértice, es decir en $\frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$, entonces la ecuación de la directriz es: $x = -\frac{7}{4}$.
  Su forma general: $4x + 7 = 0$

- Ecuación del eje de simetría: Si la parábola es horizontal su eje de simetría también es horizontal y sabemos que pasa por el vértice, es decir corta al eje de las Y's en 0. Y su ecuación es: $y = 0$, obsérvalo en la figura 23.
- Coordenadas de L y R: Como las coordenadas del foco son $F(\frac{9}{4}, 0)$, y $|4\rho| = 8$ entonces del foco hacia arriba contamos 4 unidades y ahí serán las coordenadas de L. Y del foco hacia abajo contamos otras 4 unidades, y localizamos las coordenadas de R, es decir $L(\frac{9}{4}, 4)$ y $R(\frac{9}{4}, -4)$.

5. $y^2 - 8y + 19 = 0$

Solución.

Agrupando términos: $y^2 - 8y = -19$

Completando cuadrados:
$$y^2 - 8y + (-4)^2 = -19 + (-4)^2$$
$$y^2 - 8y + (-4)^2 = -19 + 16$$
$$(y-4)^2 = -3$$

Esto quiere decir que el cuadrado de un número real es negativo, lo cual **no es posible**. Por lo tanto no existe gráfica que represente a la ecuación dada, es decir la ecuación dada **no representa a una parábola**. Este es un *caso degenerado* de la parábola.

6. $x^2 + 3x - 28 = 0$ (Observa que no hay término en y)

Solución.

Agrupando términos: $x^2 + 3x = 28$

Completando cuadrados:
$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 28 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$(x + \frac{3}{2})^2 = 28 + \frac{9}{4}$$
$$(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{121}{4}$$
$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{121}{4}}$$
$$x = -\frac{3}{2} \pm\sqrt{\frac{121}{4}}$$
$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$$
$$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{11}{2} = 4 \qquad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{11}{2} = -7$$

Tenemos que $x = 4$ y $x = -7$ que es lo mismo que $x - 4 = 0$ y $x + 7 = 0$, que representan a dos rectas verticales como se ve en la siguiente figura.

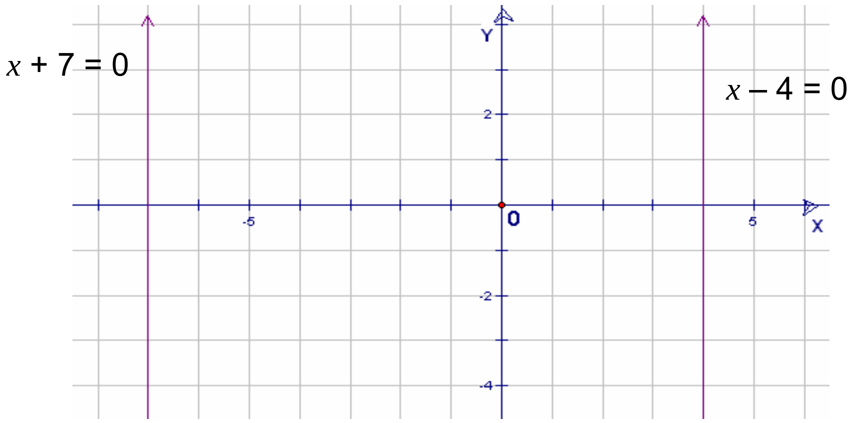


figura 24

Este es otro caso en que la ecuación dada **no representa a una parábola**, sino a dos rectas verticales. Este es otro *caso degenerado* de la parábola.

NOTA:

La ecuación dada se pudo haber resuelto factorizando, sin necesidad de completar trinomio cuadrado perfecto.

$x^2 + 3x - 28 = (x + 7)(x - 4) = 0$ entonces $x + 7 = 0$ o $x - 4 = 0$.

También se podía resolver usando la formula general para resolver una ecuación de segundo grado.

7. $y^2 - 12y + 36 = 0$ (Observa que no hay término en x)

Solución.

Factorizando tenemos : $(y - 6)(y - 6) = 0$

Entonces $y - 6 = 0$ o $y - 6 = 0$

Sus gráficas son dos rectas coincidentes, que es otro *caso degenerado* de la parábola, su gráfica quedaría así:

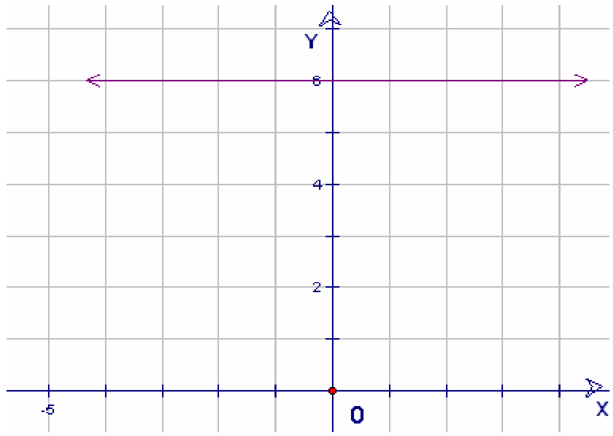


figura 25

Debes tomar en cuenta la diferencia entre los ejemplos 1 a 4 que representan a una parábola y los ejemplos 5, 6 y 7 que son casos degenerados de una parábola.

EJERCICIOS 5.5.1

Convertir cada ecuación a la forma ordinaria o canónica y graficarla marcando sus elementos.

1) $x^2 - 8 = 4x + 3y$
2) $4x - 10y = 3 - y^2$
3) $3x^2 - 12x + 6y = 24$
4) $2y^2 - 14x + 42 = 0$
5) $y^2 - 6y + 11 = 0$
6) $3y^2 + 9x + 12y = 21$
7) $4x^2 + 4x + 9 = 0$
8) $4x^2 + 12x = 16y - 41$
9) $y^2 - y - 6 = 0$
10) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
11) $3y + 10x = 11 - x^2$
12) $3y = 18 - 3x^2 + 6x$

5.5.2 Observaciones de la ecuación de la parábola en forma general.

- Recuerda que si se te presenta una ecuación en forma general y solo una variable tiene cuadrado, esta puede ser una ecuación de una parábola.

- Si la ecuación de la parábola está en su forma general, para graficarla con mayor facilidad hay que expresarla en forma ordinaria o canónica para determinar todos sus elementos.

- Si en la ecuación de la parábola en forma general el cuadrado está en la y, entonces se trata de una **parábola horizontal** y su eje de simetría también es horizontal pero su directriz es vertical .

- Si en la ecuación de la parábola en forma general el cuadrado está en la x, entonces se trata de una **parábola vertical** y su eje de simetría también es vertical, pero su directriz es horizontal.

- Si una ecuación está en su forma general y al convertirla a la forma ordinaria ésta queda de la forma:

  - $(y-k)^2 = -$ **n** o $(x-h)^2 = -$ **n** donde **n** es un número positivo, entonces **no existe gráfica** en los reales.
  - $(y-k)(y-h) = 0$ o $(x-h)(x-k) = 0$ entonces la gráfica son dos **rectas paralelas**.
  - $(y-k)^2 = 0$ o $(x-h)^2 = 0$ entonces la gráfica son dos **rectas coincidentes**.

En estos tres casos se dice que la ecuación es de una *parábola degenerada*.

5.6 Más problemas de parábola.

A continuación se te mostrará algunos ejemplos de como debes de proceder para encontrar la ecuación de una parábola que satisfaga ciertas condiciones.

EJEMPLOS

1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(-2\ ,5)$ y la ecuación de su directriz es $x + 4 = 0$. Trazar su gráfica y encontrar todos sus elementos.

Solución.
En un plano cartesiano localizamos el foco y trazamos su directriz como se muestra en la figura siguiente:

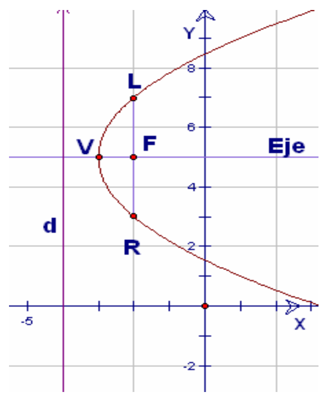


figura 26

1º) Observa que si $x + 4 = 0$ es la ecuación de la directriz, ésta es equivalente a $x = -4$, que es una recta vertical que corta al eje X en –4, como se ve en la figura.

2º) Podemos deducir que la parábola es horizontal y se abre a la derecha, entonces su ecuación es de la forma $(y - k)^2 = 4\rho\,(x - h)$ con ρ positiva. Debemos encontrar los valores de h, k y el parámetro ρ .

3º) El vértice está en medio del foco y la directriz, entonces sus coordenadas son $V(-3\ ,\ 5)$ es decir $h = -3$ y $k = 5$.

4º) El parámetro ρ es la distancia que hay entre el vértice y el foco o entre el vértice y la directriz y si te fijas en la figura 26 es igual a 1, entonces $\rho = 1$.

5º) Sustituyendo estos valores en la ecuación $(y - k)^2 = 4\rho\,(x - h)$ tenemos que la ecuación de la parábola que nos piden es: $(y - 5)^2 = 4(1)\,(x - (-3))$

Forma ordinaria o canónica $\boxed{(y-5)^2 = 4\,(x+3)}$

Desarrollando: $y^2 - 10\,y + 25 = 4x + 12$

Forma general $\boxed{y^2 - 4x - 10\,y + 13 = 0}$

6º) Los demás elementos son:

- Lado recto: $4\rho = 4$
- Ecuación del eje de simetría: La parábola es horizontal entonces su eje de simetría también es horizontal, es decir corta al eje de las Y 's en 5.

  Su ecuación es: $y = 5$ o $y - 5 = 0$
- Coordenadas de L y R: El foco es $F(-2\ ,\ 5)$ y $|4\rho| = 4$ entonces del foco hacia arriba contamos 2 u. y tendremos las coordenadas de L. Y del foco hacia abajo contamos otras 2 u. y tendremos las coordenadas de R, es decir $L(-2\ ,\ 7)$ y $R(-2\ ,\ 3)$.

2. Hallar la ecuación de la parábola, si su vértice es $V(1\ ,\ 3)$ y su foco es $F(1\ ,\ 1)$. Trazar su gráfica y encontrar todos sus demás elementos.

Solución.

En un plano cartesiano localizamos el vértice y su foco, ver la figura siguiente:

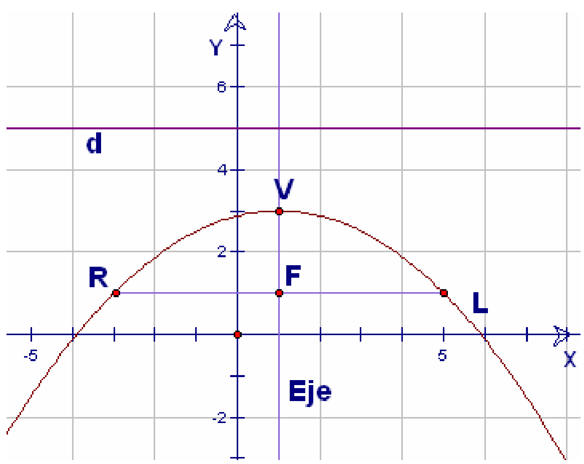


figura 27

1º) Su vértice está arriba del foco entonces podemos afirmar que la parábola es vertical y se abre hacia abajo, su ecuación debe ser de la forma $(x-h)^2 = 4\rho\,(y-k)$ con ρ negativa.

2º) Conocemos los valores de $h = 1$ y de $k = 3$, sólo tenemos que encontrar el valor del parámetro ρ . Al fijarte en la figura 27, la magnitud de ρ es la distancia del vértice al foco que es 2 y como $\rho < 0$, entonces $\rho = -2$.

3º) Sustituyendo estos valores en la ecuación $(x-h)^2 = 4\rho\,(y-k)$ tenemos que la ecuación de la parábola que nos piden es: $(x-1)^2 = 4(-2)\,(y-3)$

Forma ordinaria o canónica $\boxed{(x-1)^2 = -8\,(y-3)}$

Desarrollando: $x^2 - 2x + 1 = -8y + 24$

Forma general $\boxed{x^2 - 2x + 8y - 23 = 0}$

4º) Los demás elementos son:

- Lado recto: $4\rho = -8$
- Ecuación del eje de simetría: La parábola es vertical entonces su eje de simetría también es vertical, es decir corta al eje de las X's en 1.

  Su ecuación es: $x = 1$ o $x - 1 = 0$
- Coordenadas de L y R: El foco es $F(1\,,\,1)$ y $|4\rho| = 8$ entonces del foco a la derecha contamos 4 u. y tendremos las coordenadas de $L(5\,,\,1)$. Y del foco a la izquierda contamos otras 4u. y tendremos las coordenadas de $R(-3\,,\,1)$.

3. Hallar la ecuación de la parábola, si se dan su vértice $V(-1\,,\,-4)$ y $\rho = 1$, sabiendo que su eje de simetría es paralelo al eje Y. Trazar su gráfica y encontrar todos sus demás elementos.

Solución.

En un plano cartesiano ubicamos las coordenadas del vértice, trazamos su eje de simetría paralelo al eje y, como se muestra en la figura 28.

1°) Observa su eje de simetría, como es paralelo al eje y, se puede deducir que se trata de una parábola vertical, además sabemos que si el parámetro $\rho > 0$ la parábola abre hacia arriba, entonces su ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4\rho\,(y-k)$.

2°) Sustituyendo los valores que se tienen en la ecuación $(x-h)^2 = 4\rho\,(y-k)$ tenemos que la ecuación de la parábola que nos piden es: $(x-(-1))^2 = 4(1)\,(y-(-4))$

Forma ordinaria o canónica $\quad (x+1)^2 = 4\,(y+4)$

Desarrollando $\quad x^2 + 2x + 1 = 4y + 16$

Forma general $\quad x^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

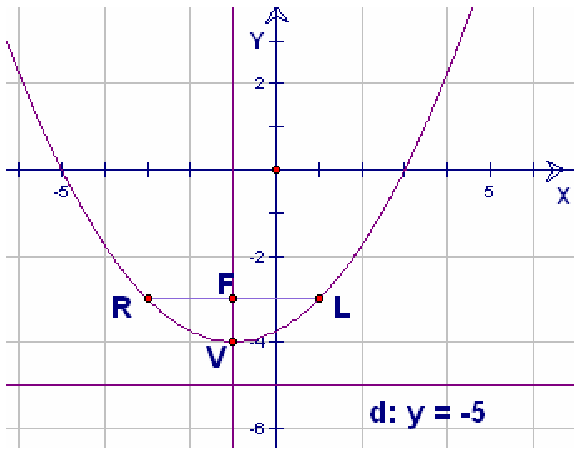


figura 28

3°) Para localizar las coordenadas del foco del vértice hacia arriba contamos una unidad y tenemos $F(-1\,,-3)$.

4°) Los demás elementos son:

- Lado recto: $4\rho = 4$
- Ecuación del eje de simetría: Como es paralelo al eje Y y corta al eje X en -1 su ecuación es $x = -1$ ó $x + 1 = 0$
- Ecuación de la directriz: Si la parábola es vertical su directriz debe de ser horizontal entonces corta al eje Y, y debe de pasar una unidad abajo del vértice, esto es $y = -4 - 1$; $y = -5$ ó $y + 5 = 0$.

Coordenadas de L y R : El foco es $F(-1, -3)$ y $|4\rho| = 4$ entonces del foco a la derecha contamos 2 unidades y tendremos las coordenadas de $R(1, -3)$ y del foco a la izquierda contamos otras 2 unidades y tendremos las coordenadas de $L(-3, -3)$.

4. Hallar la ecuación de la parábola con vértice $V(3\ ,\ 5)$, y un punto sobre ésta es $Q(-1\ ,\ 1)$, sabiendo que su eje de simetría es paralelo al eje de las Y's. Trazar su gráfica y encontrar todos sus demás elementos.

Solución.

En un plano cartesiano localizamos las coordenadas del vértice, el punto que esta sobre la parábola y trazamos el eje de simetría paralelo al eje Y, como se muestra en la figura siguiente:

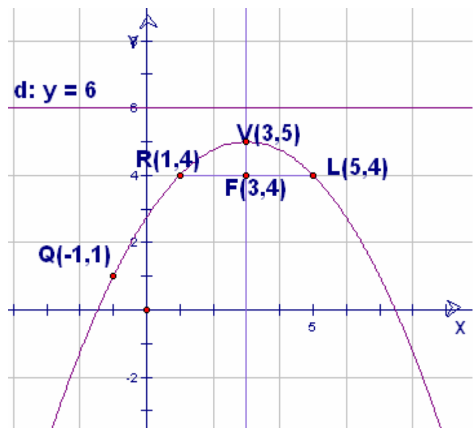


figura 29

1°) Como su eje de simetría es paralelo al eje Y, se puede deducir que se trata de una parábola vertical, entonces su ecuación es de la forma $(x - h)^2 = 4\rho\,(y - k)$.

2°) Sustituyendo las coordenadas del vértice $V(3, 5)$, donde $h = 3$ y $k = 5$, en la ecuación $(x - h)^2 = 4\rho\,(y - k)$, tenemos $(x - 3)^2 = 4\rho\,(y - 5)$

3°) Recuerda que si la parábola pasa por el punto $Q(-1, 1)$, sus coordenadas satisfacen la ecuación, por lo tanto sustituyendo $x = -1$ y $y = 1$ en la ecuación anterior se puede calcular "ρ" :

$$((-1) - 3)^2 = 4\rho\,(1 - 5)$$

$$16 = -16\rho \qquad \text{entonces } \rho = -1$$

4°) Sustituyendo los valores que se tienen, en la ecuación $(x - h)^2 = 4\rho\,(y - k)$ tenemos que la ecuación de la parábola que nos piden es: $(x - 3)^2 = 4(-1)\,(y - 5)$

Forma ordinaria o canónica $\quad (x - 3)^2 = -4\,(y - 5)$

Desarrollando $\quad x^2 - 6x + 9 = -4y + 20$

Forma general $\quad x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$

5°) Los demás elementos son:

- Coordenadas del foco: Como $\rho = -1$ entonces la parábola abre hacia abajo, y del vértice hacia abajo contamos 1 unidad , es decir que al valor de k le restamos 1 y tenemos $5 - 1 = 4$, entonces las coordenadas del foco son $F(3 , 4)$
- Lado recto: $|4\rho| = 4$
- Ecuación del eje de simetría: El eje de simetría corta al eje X en 3 entonces su ecuación es $x = 3$ ó $x - 3 = 0$
- Ecuación de la directriz: Como la parábola es vertical su directriz es horizontal entonces corta al eje de las Y's, y pasa una unidad arriba del vértice es decir pasa por $y = 5 - (-1)$; $y = 6$ y su ecuación es $y - 6 = 0$.
- Coordenadas de L y R : El foco es $F(3 , 4)$ y $|4\rho| = 4$ entonces del foco a la derecha contamos 2 unidades y tendremos las coordenadas de $L(5, 4)$ y del foco a la izquierda contamos otras 2u. y tendremos las coordenadas de $R(1, 4)$.

5. Dados el vértice $V(4 , -2)$ y la ecuación de la directriz $x - 6 = 0$, encontrar la ecuación de la parábola, trazar su gráfica y encontrar sus demás elementos.

Solución.

En un plano cartesiano localizamos las coordenadas del vértice y trazamos su directriz $x - 6 = 0$ (recta vertical que corta al eje X en 6), como lo ves en la siguiente figura:

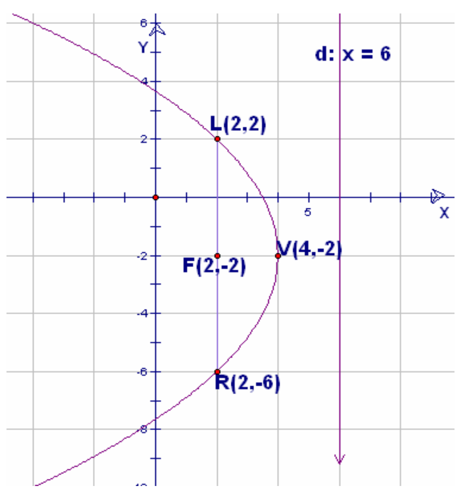


figura 30

1°) Observa la figura, el vértice se encuentra a 2 unidades a la derecha de la directriz, entonces $\rho = -2$, se entiende que la parábola abre hacia la izquierda y su ecuación es de la forma: $(y - k)^2 = 4\rho\,(x - h)$.

2°) Sustituyendo los valores que se tienen en la ecuación : $(y - k)^2 = 4\rho\,(x - h)$ tenemos que la ecuación de la parábola que nos piden es: $(y - (-2))^2 = 4(-2)\,(x - 4)$

Forma ordinaria o canónica $(y + 2)^2 = -8\,(x - 4)$

Desarrollando $y^2 + 4y + 4 = -8x + 32$

Forma general $y^2 + 8x + 4y - 28 = 0$

3°) Los demás elementos son:

- Coordenadas del foco: Como la parábola abre hacia izquierda y $\rho = -2$, del vértice hacia la izquierda contamos 2 unidades, es decir que al valor de h le restamos 2 y tenemos 4–2 = 2, entonces las coordenadas del foco son $F(2\ ,\ -2)$.
- Lado recto: $|4\rho| = 8$
- Ecuación del eje de simetría que es horizontal y corta al eje Y en –2: $y + 2 = 0$.
- Ecuación de la directriz $x = 6$ ó $x - 6 = 0$.
- Coordenadas de L y R : El foco es $F(2\ ,\ -2)$ y $|4\rho| = 8$ entonces del foco a la arriba contamos 4 unidades y tendremos las coordenadas de $L(2\ ,\ 2)$ y del foco abajo contamos otras 4 unidades y tendremos las coordenadas de $R(2\ ,\ -6)$.

6. Hallar la ecuación de la parábola y graficarla, si te dan el foco $F(2\ ,\ 2)$, y los extremos del lado recto $R(8\ ,\ 2)$ y $L(-4\ ,\ 2)$.

Solución.

En un plano cartesiano ubicamos las coordenadas del foco y las del lado recto, como se muestra en la figura 31.

1°) Observa los punto F, L, R; de acuerdo a su posición el eje de simetría es paralelo al eje de la Y's, entonces la parábola es vertical y su ecuación es de la forma:

$$(y - k)^2 = 4\rho\,(x - h).$$

2°) Para encontrar el parámetro, sabemos que $d(FL) = d(FR) = |2\rho|$, entonces contamos las unidades que hay de F a L, es decir $d(FL) = 6$, por lo tanto $|2\rho| = 6$, entonces $\rho = 3$ ó $\rho = -3$, porque los dos valores satisfacen la igualdad, pues se obtiene su valor absoluto $|2(-3)| = |2(3)| = 6$.

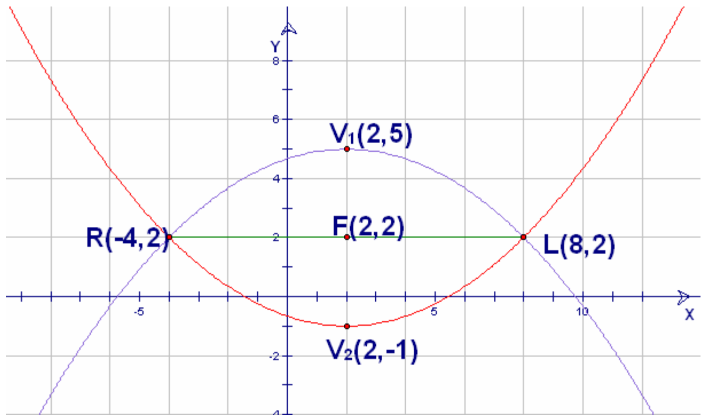


figura 31

3°) Para localizar el vértice, sabemos que se trata de una parábola vertical, además que la distancia de $FV = |\rho| = 3$, pero como $\rho = 3$ ó $\rho = -3$, entonces vamos a tener dos vértices.

Uno es si contamos 3 unidades arriba del foco y tenemos $V_1(2, 5)$.

El otro es si contamos 3 unidades abajo del foco y tenemos $V_2(2, -1)$.

4°) Como tenemos dos vértices entonces vamos a obtener dos ecuaciones.

a) Para el vértice $V_1(2, 5)$:

El vértice esta arriba del foco, es decir se abre hacia abajo entonces $\rho = -3$; y sabemos que $h = 2$ y $k = 5$; sustituyendo en la ecuación $(x - h)^2 = 4\rho\,(y - k)$ tenemos que la ecuación de la parábola que nos piden es: $(x - 2)^2 = 4(-3)\,(y - 5)$

Forma ordinaria o canónica $(x - 2)^2 = -12\,(y - 5)$

Desarrollando $x^2 - 4x + 4 = -12y + 60$

Forma general $x^2 - 4x + 12y - 56 = 0$

b) Para el vértice $V_2(2, -1)$:

El vértice esta abajo del foco, es decir la parábola se abre hacia arriba entonces $\rho = 3$, y sabemos que $h = 2$ y $k = -1$; sustituyéndolos en la ecuación tenemos

$$(x-2)^2 = 4(3)\,(y-(-1))$$

Forma ordinaria o canónica $\quad (x-2)^2 = 12\,(y+1)$

Desarrollando $\quad x^2 - 4x + 4 = 12y + 12$

Forma general $\quad x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$

7. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está sobre la recta $x - 3 = 0$, si la magnitud de su lado recto $LR = 4$ y $\rho < 0$, además $Q(-1, -2)$ es un punto sobre la parábola y su eje de simetría es paralelo al eje X.

Solución.

En un plano cartesiano trazamos la recta $x - 3 = 0$ donde se encuentra el vértice y el punto $Q(-1, -2)$, como se muestra en la figura:

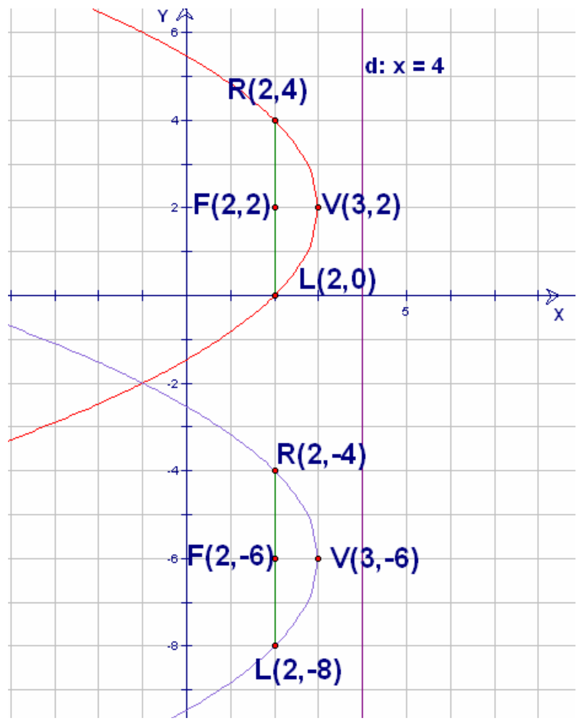


figura 32

1°) Como el eje de simetría es paralelo al eje de las X's, entonces la parábola es horizontal y su ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4\rho\,(x-h)$.

2°) Si el vértice esta sobre la recta $x - 3 = 0$ o $x = 3$, entonces la coordenada en h es $h = 3$, es decir su vértice es de la forma $V(3, k)$.

3°) Sabemos que $LR = |4\rho| = 4$ y $\rho < 0$; entonces $4\rho = -4$, e decir $\rho = -1$.

4°) Sustituyendo $h = 3$ y $\rho = -1$, en la ecuación, se tiene: $(y-k)^2 = 4(-1)\,(x-3)$.

5°) Para obtener el valor de k , sustituimos las coordenadas del punto $Q(-1\ ,\ -2)$ en la ecuación anterior, ya que por ser punto de la parábola la satisfacen y tenemos:

$$(-2-k)^2 = -4\ (-1 - 3)$$

Desarrollándola se tiene $4 + 4k + k^2 = -4(-4)$

$$4 + 4k + k^2 = 16$$

$k^2 + 4k - 12 = 0$ es una ecuación de segundo grado.

Que resolveremos con la fórmula general $k_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o por factorización,

y nos da como resultado $k_1 = 2$ y $k_2 = -6$.

6°) Como obtuvimos dos valores para k, entonces tendremos dos vértices.

Sustituyendo los valores de k en $V(3, k)$ obtenemos $V_1(3\ ,\ 2)$ y $V_2(3\ , -6)$.

7°) Encontremos la ecuación para cada vértice.

a) Para el vértice $V_1(3\ ,\ 2)$:

Sustituimos $h = 3$, $k = 2$ y $\rho = -1$ en la ecuación $(y-k)^2 = 4\rho\ (x-h)$:

$$(y-2)^2 = 4(-1)\ (x-3)$$

Forma ordinaria o canónica $(y-2)^2 = -4\ (x-3)$

Desarrollando $y^2 - 4y + 4 = -4x + 12$

Forma general $y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$

b)) Para el vértice $V_2(3\ , -6)$:

Sustituimos $h = 3$, $k = -6$ y $\rho = -1$ en la ecuación $(y-k)^2 = 4\rho\ (x-h)$:

$$(y-(-6))^2 = 4(-1)\ (x-3)$$

Forma ordinaria o canónica $(y+6)^2 = -4\ (x-3)$

Desarrollando $y^2 + 12y + 36 = -4x + 12$

Forma general $y^2 + 4x + 12y + 24 = 0$

8. Obtener la ecuación de la recta tangente a la parábola cuya ecuación es $2x^2 + 6y - 8x - 4 = 0$, en el punto T(5 , –1) .

Solución:

1º) Al observar la ecuación te habrás dado cuenta que como el cuadrado lo tiene la variable x, es una parábola vertical y al llevarla a su forma ordinaria tenemos:

$$2x^2 + 6y - 8x - 4 = 0$$

Dividiendo entre 2: $x^2 + 3y - 4x - 2 = 0$

Completando el trinomio cuadrado perfecto para x y factorizando para y tenemos:

$$(x - 2)^2 = -3(y - 2)$$

Su vértice es V(2 , 2) y $4\rho = -3$

entonces $\rho = -\dfrac{3}{4}$, entonces la parábola abre hacia abajo, como se ve en la figura.

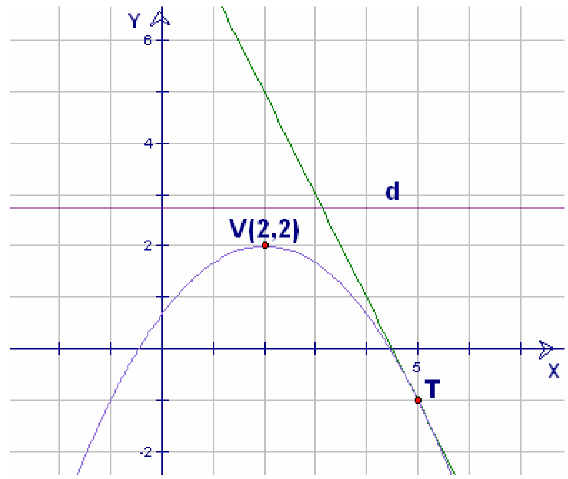


figura 33

2º) Por un resultado matemático se sabe que la tangente a una parábola de la forma $(x - h)^2 = 4\rho\,(y - k)$ en el punto T(x_1 , y_1) esta dada por la expresión:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{x_1 - h}{2\rho}$$

Sustituyendo los valores de h, ρ y los de T(5 , –1) donde $x_1 = 5$ y $y_1 = -1$ tenemos:

$$\frac{y - (-1)}{x - 5} = \frac{5 - 2}{2(-3/4)}$$

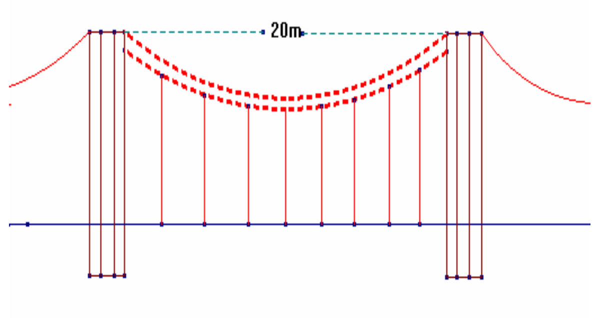
$$\frac{y + 1}{x - 5} = \frac{3}{(-6/4)}$$

$$\frac{y + 1}{x - 5} = -2$$

$$y + 1 = -2(x - 5)$$

$2x + y - 9 = 0$ es la ecuación pedida.

9) Los puntos de suspensión de un puente colgante están situados a una misma altura y a una distancia de 20 m. La magnitud de la flexión a la distancia de dos metros de los puntos de suspensión en sentido horizontal, es igual a 0.144m = 14.4 cm.



Determinar la magnitud de la flexión de este puente en su punto medio, suponiendo que el puente colgante tiene la forma de un arco de parábola.

Solución:

Hacemos un esquema en el plano cartesiano que ilustre el problema, supongamos que el punto medio entre la horizontal que une los extremos del puente es el origen de coordenadas, como se ve en la figura 34. Entonces:

Su vértice es $V(0\ ,\ k)$ y como la parábola es vertical usaremos la ecuación:

$(x-h)^2 = 4\rho\,(y-k) \longrightarrow$ (IV), además la magnitud de la flexión del cable en su punto medio es el valor de k.

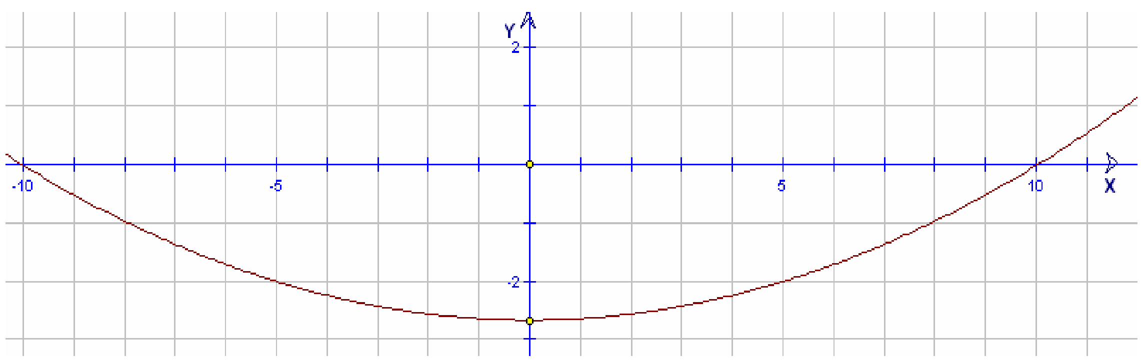


figura 34

Como el vértice es $V(0\ ,\ k)$ sustituimos en la ecuación (IV):

$$(x-0)^2 = 4\rho\,(y-k)$$

$$x^2 = 4\rho\,(y-k) \longrightarrow (1)$$

Como la curva corta al eje X en B(10 , 0), entonces sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación (1) es decir:

$$(10)^2 = 4\rho\,(0 - k)$$

$$100 = -4\rho\, k \longrightarrow (2)$$

De igual forma como el punto P_1 (8 , –0.144) está sobre la parábola entonces también satisface la ecuación (1):

$$(8)^2 = 4\rho\,(-0.144 - k)$$

$$64 = -0.576\rho - 4\rho\, k \longrightarrow (3)$$

Resolviendo (2) y (3) como un sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

Despejamos a k en (2) y sustituimos en (3):

$$k = \frac{100}{-4\rho} \quad ; \quad k = -\frac{25}{\rho} \longrightarrow (4)$$

$$64 = -0.576\rho - 4\rho\left(-\frac{25}{\rho}\right)$$

$$64 = -0.576\rho + 100$$

$$0.576\rho = 100 - 64$$

$$\rho = \frac{36}{0.576} \quad ; \quad \rho = 62.5 \longrightarrow (5)$$

Sustituimos el valor de ρ en (4) y tenemos:

$$k = -\frac{25}{62.5} \quad ; \quad k = -0.40 \text{ m} \quad \text{ó} \quad k = -40 \text{ cm.}$$

Donde el signo (–) indica que la medida de 40cm es de la horizontal hacia abajo.

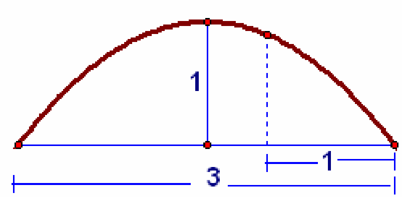
Entonces podemos afirmar que la magnitud de flexión de este puente colgante en su punto medio es igual a 40 cm y la ecuación de la curva parabólica es:

$$x^2 = 250\,(y + 0.4)$$

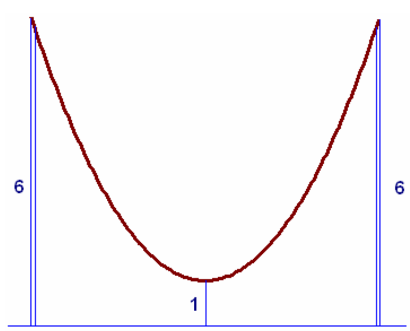
EJERCICIOS 5.6

En cada caso, obtener la ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones que se dan:

1. $F(1\ ,\ 4)$ y la ecuación de su directriz es $x - 5 = 0$.
2. $V(-2\ ,\ -3)$ y $F(-2\ ,\ -2)$.
3. $V(-1\ ,\ 3)$ y $\rho = -1$, sabiendo que su eje de simetría es paralelo al eje Y.
4. $V(3\ ,\ -4)$, y un punto sobre ésta es $Q(7\ ,\ 0)$, sabiendo que su eje de simetría es paralelo al eje de las X's.
5. $V(3\ ,\ 1)$ y la ecuación de la directriz $2y + 1 = 0$.
6. $F(1\ ,\ -3)$, y los extremos del lado recto $L(1\ ,\ 1)$ y $R(1\ ,\ -7)$.
7. Su vértice está sobre la recta $x - 4 = 0$, y si la magnitud de su lado recto $LR = 8$ y $\rho < 0$, además $Q(-4\ ,\ 6)$ es un punto sobre la parábola y su eje de simetría es paralelo al eje X.
8. Obtener la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0$, en el punto Q(5 , 10).
9. $F(-4\ ,\ -1)$, y los extremos del lado recto $L(-1\ ,\ 5)$ y $R(-1\ ,\ -7)$.
10. Pasa por los puntos L(1 , 1), M(3 , 0) y N(4 , –4).
11. Una ventana tiene la forma de un arco de una parábola vertical, si ese arco tiene en su centro una altura de 1 metro y en su base una longitud de 3 metros, determinar la altura a la distancia de 1 metro de uno de sus extremos.



12. Una cuerda de 10 metros de longitud, tiene sus extremos atados a la parte superior de dos postes de 6 metros de altura cada uno, como se ve en la figura.
¿Cuál es la separación de ambos postes?



12.

AUTOEVALUACIÓN

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos que se te han expuesto a lo largo de esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas tu formulario que puedes consultar.

1) Dada la ecuación de la parábola $y^2 = 12x$, encontrar sus elementos y graficarla.
2) Decir hacia donde se abren las siguientes parábolas y dar las coordenadas de sus vértices, si sus ecuaciones son:
   a) $(y + 2)^2 = 5(x - 1)$
   b) $(x - 5)^2 = -8(y + 3)$
3) Dada la ecuación de la parábola en su forma ordinaria $(x - 2)^2 = 8(y + 6)$, encontrar sus elementos y graficarla.
4) Obtener la ecuación general de la parábola si su Foco es $F(1 , -5)$ y su directriz es la recta $y + 3 = 0$.
5) Obtener la ecuación de la parábola con vértice V(–1 , 3) y pasa por (1 , 5), sabiendo que su eje de simetría es paralelo al eje X, trazar su gráfica y encontrar todos sus elementos.
6) Encuentra el Vértice, Foco, parámetro y di hacia donde se abre la parábola cuya ecuación es $y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$.

ESCALA:

Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3, y 4. Si resuelves también la 6 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 5, ¡FELICIDADES!, tienes mucho futuro. Si resuelves menos de 4 preguntas, tienes que estudiar con mayor conciencia el folleto y hacer todos sus ejercicios.

SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

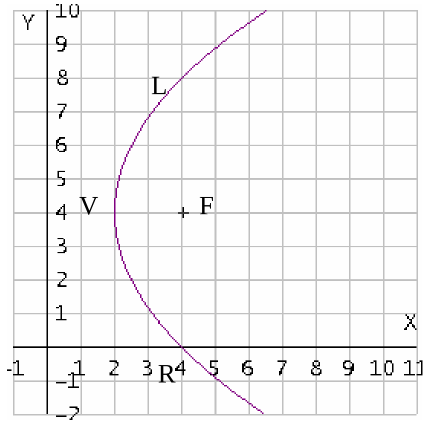
EJERCICIOS 5.4.1

1. $V(2, 4)$; $F(4, 4)$

   $\rho = 2$; $\boldsymbol{d}$: $x = 0$

   Eje : $y - 4 = 0$

   $LR = 8$: $L(4, 8)$; $R(4, 0)$

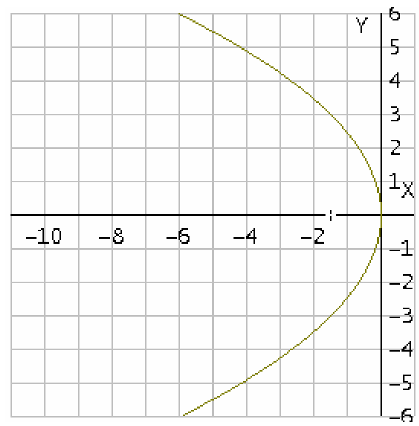


2. $V(0, 0)$; $F\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$

   $\rho = -\dfrac{3}{2}$; $\boldsymbol{d}$: $2x - 3 = 0$

   Eje : $y = 0$ LR = 6

   $L\left(-\dfrac{3}{2}, 3\right)$; $R\left(-\dfrac{3}{2}, -3\right)$

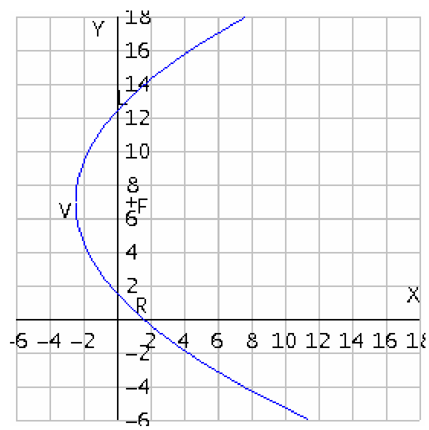


3. $V\left(-\dfrac{5}{2}, 7\right)$; $F\left(\dfrac{1}{2}, 7\right)$

   $\rho = 3$; $\boldsymbol{d}$: $2x$

   Eje : $y - 7 = 0$; $LR = 12$

   L(½ , 13); R(½ , 1)

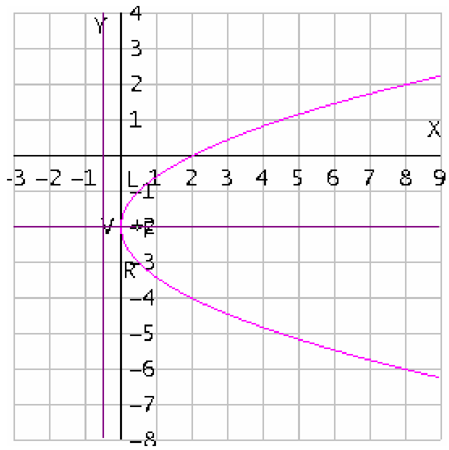


4. $V(0\,,-2)$; $F\left(\dfrac{1}{2},-2\right)$

$\rho = \dfrac{1}{2}$; $\boldsymbol{d}: 2x + 1 = 0$

Eje : $y + 2 = 0$; $LR = 2$

$L\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$; $R\left(\dfrac{1}{2},-3\right)$

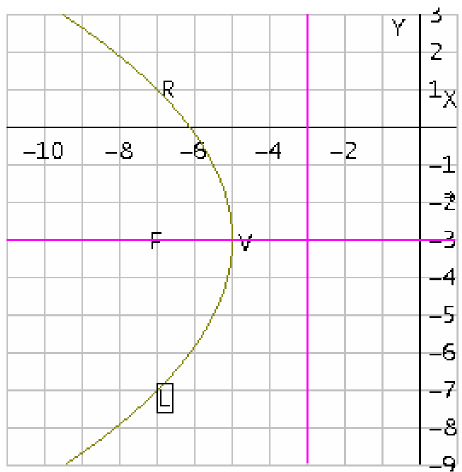


5. $V(-5,-3)$; $F(-7,-3)$

$\rho = -2$; $\boldsymbol{d}: x + 3 = 0$

Eje : $y + 3 = 0$: $LR = 8$

$L(-7,-7)$; $R(-7, 1)$

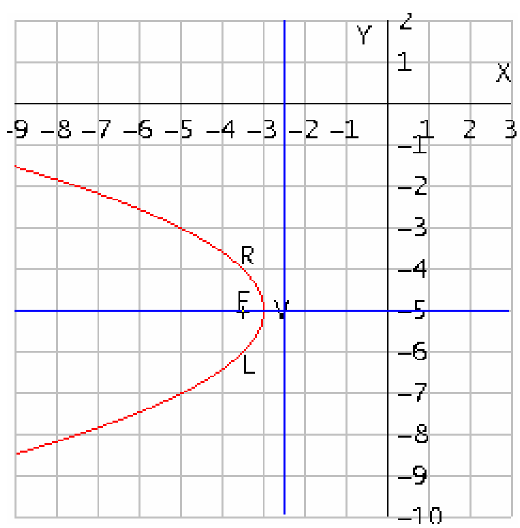


6. $V(-3,-5)$; $F\left(-\dfrac{7}{2},-5\right)$

$\rho = \dfrac{1}{2}$: $\boldsymbol{d}: 2x + 5 = 0$

Eje : $y + 5 = 0$; $LR =$

$L\left(-\dfrac{7}{2}\,,\,-6\right)$; $R\left(-\dfrac{7}{2},-4\right)$



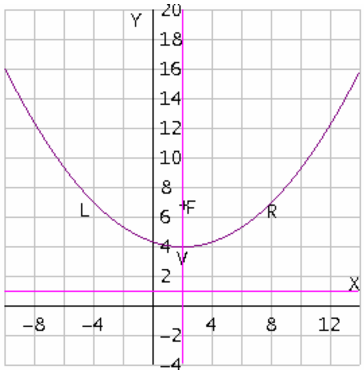
EJERCICIOS 5.4.2

1. $V(2, 4)$; $F(2, 7)$

   $\rho = 3$; $\boldsymbol{d}$: $y - 1 = 0$

   Eje : $x - 2 = 0$; $LR = 12$

   $L(-4, 7)$; $R(8, 7)$

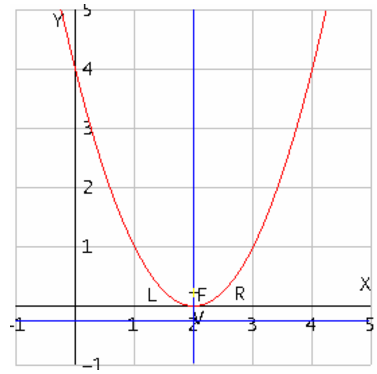


2. $V(2 , 0)$; F $(2 , ¼)$

   $\rho = ¼$; $\boldsymbol{d}$: $4y + 1 = 0$

   Eje : $x - 2 = 0$; $LR = 1$

   $L(1.5 , ¼)$; $R(2.5 , ¼)$

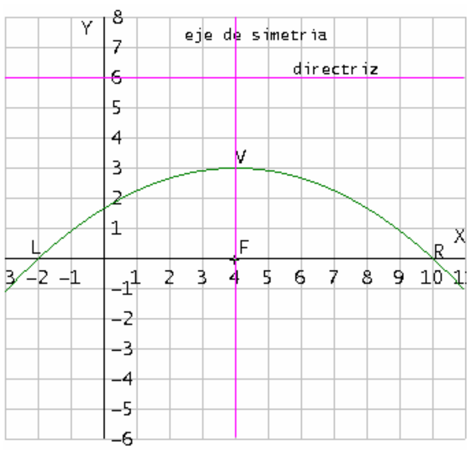


3. $V(4, 3)$; $F(4, 0)$

   $\rho = -3$; $\boldsymbol{d}$: $y - 6 = 0$

   Eje : $x - 4 = 0$; $LR = 12$

   $L(-2, 0)$; $R(10, 0)$

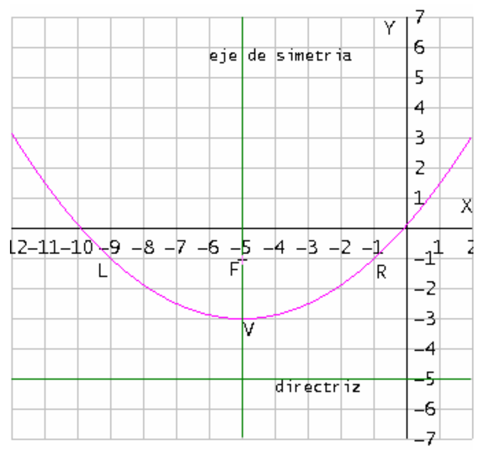


4. $V(-5, -3)$; $F(-5, -1)$

   $\rho = 2$; $\boldsymbol{d}$: $y + 5 = 0$

   Eje : $x + 5 = 0$; $LR = 8$

   $L(-9, -1)$; $R(-1, -1)$



5. $V(0 , -1)$; $F(0 , -2)$

   $\rho = -1$; $\boldsymbol{d}$: $y = 0$

   Eje : $x = 0$; $LR = 4$

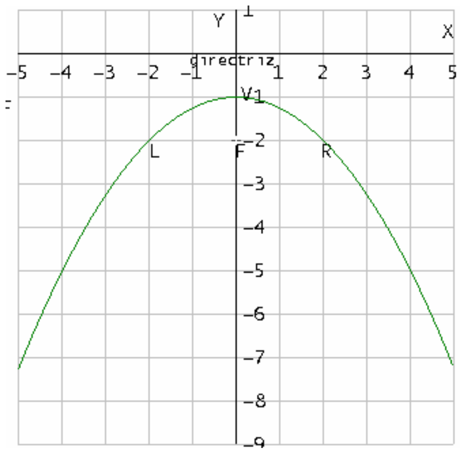
   $L(-1, -1)$; $R(1 , -1)$

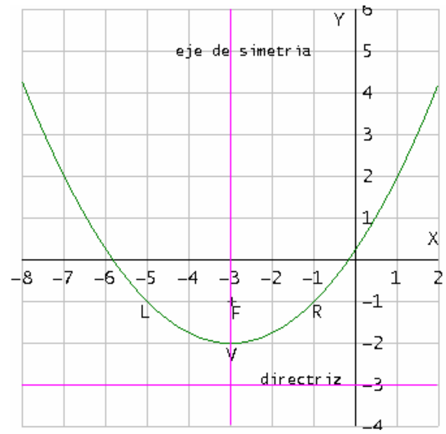
6. $V(-3 , -2)$; $F(-3 , -1)$

   $\rho = 1$; $\boldsymbol{d}$: $y + 3 = 0$

   Eje : $x + 3 = 0$ LR = 4

   $L(-5 , -1)$; $R(-1 , -1)$



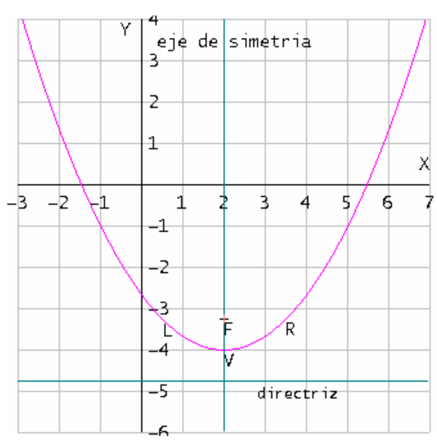


EJERCICIOS 5.5

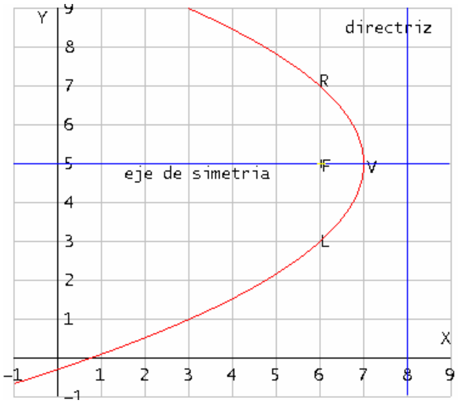
1) $x^2 + 14x - 2y + 59 = 0$; vertical; abre hacia arriba
2) $y^2 + 3x - 2y - 2 = 0$; horizontal; abre a la izquierda
3) $y^2 - 7y + 6x + 23 = 0$; horizontal; abre a la derecha
4) $x^2 + 2x + 6y + 31 = 0$; vertical; abre hacia abajo
5) $7x^2 - 56x - 2y + 114 = 0$; vertical; abre hacia arriba
6) $2y^2 + 3x - 28y + 95 = 0$; horizontal; abre a la izquierda
7) $8x^2 - 3y - 6 = 0$; vertical; abre hacia arriba
8) $x^2 + 12x + 4y + 36 = 0$; vertical; abre hacia abajo
9) $y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$; horizontal; abre a la izquierda
10) $5y^2 - 4x + 90y + 401 = 0$; horizontal; abre a la derecha

EJERCICIOS 5.5.1

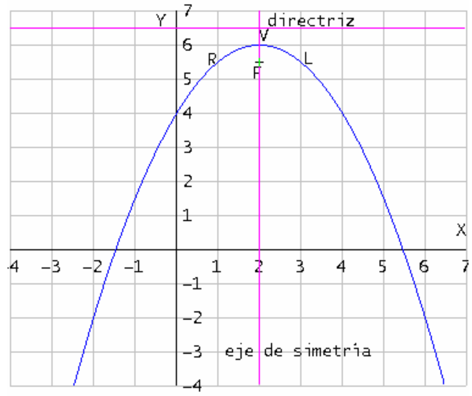
1) $(x-2)^2 = 3(y+4)$
V: $(2, -4)$; $F(2, -\frac{13}{4})$
$L.R. = 3$; $\boldsymbol{d}$: $4y + 19 = 0$
$\rho = \frac{3}{4}$; Eje: $x - 2 = 0$
$L(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4})$ y $R(\frac{7}{2}, -\frac{13}{4})$



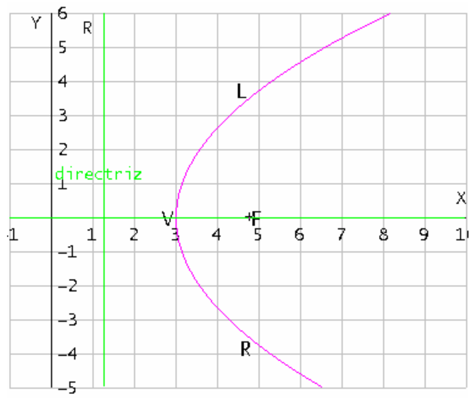
2) $(y-5)^2 = -4(x-7)$
V: $(7, 5)$; $F(6, 5)$
$L.R. = 4$; $\boldsymbol{d}$: $x - 8 = 0$
$\rho = -1$; *Eje*: $y - 5 = 0$
$L(6, 3)$ y $R(6, 7)$



3) $(x-2)^2 = -2(y-6)$
V: $(2, 6)$; $F(2, \frac{11}{2})$
$L.R. = 2$; $\boldsymbol{d}$: $2y - 13 = 0$
$\rho = -\frac{1}{2}$; *Eje*: $x - 2 = 0$
$L(3, \frac{11}{2})$ y $R(1, \frac{11}{2})$

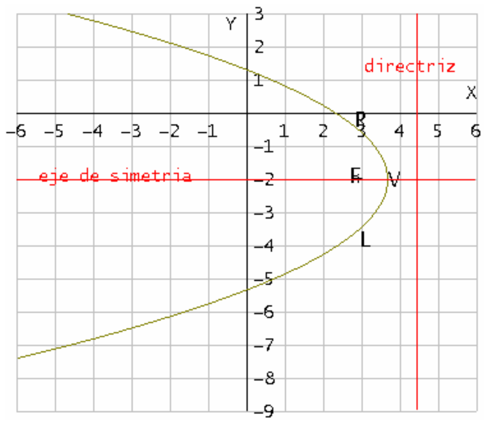


4) $2y^2 = 7(x-3)$
V: $(3, 0)$; $F(\frac{19}{4}, 0)$
$L.R. = 7$; $\boldsymbol{d}$: $4x + 5 = 0$
$\boldsymbol{\rho} = \frac{7}{4}$; *Eje*: $y = 0$
$L(\frac{19}{2}, \frac{7}{2})$ y $R(\frac{19}{4}, -\frac{7}{2})$



5) No es posible, no existe grafica, la ecuación no representa una parábola.

6) $(y+2)^2 = -3(x - \frac{11}{3})$
V: $(\frac{11}{3}, -2)$; $F(\frac{35}{12}, -2)$
$L.R. = 3$; $\boldsymbol{d}$: $12x - 53 = 0$
$\rho =$; *Eje*: $y + 2 = 0$
$L(\frac{35}{12}, -\frac{1}{2})$ y $R(\frac{35}{12}, -\frac{7}{2})$



7) no es posible, no existe grafica, no representa una parábola

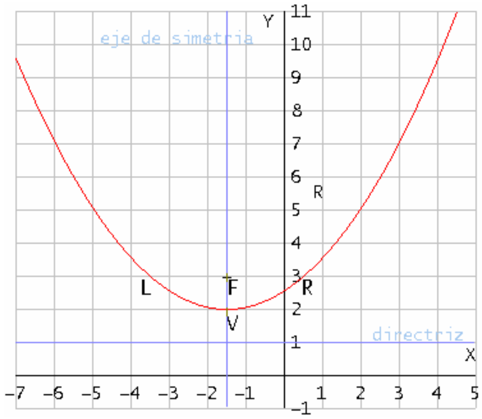
8) $(x + \frac{3}{2})^2 = 4(y - 2)$

V: $(-\frac{3}{2}\ , 2)$; $F(-\frac{3}{2}\ , 3)$

$L.R. = 4$; $\mathbf{d}$: $y - 1 = 0$

$\rho = 1$; *Eje*: $2x + 3 = 0$

$L(-\frac{7}{2}\ , 3)$ y $R(\frac{1}{2}\ , 3)$



9) no es posible, no existe grafica, no representa una parábola

10) no es posible, no existe grafica, no representa una parábola

11) $(x + 5)^2 = -3(y - 12)$

V: $(-5, 12)$; $F(-5, \frac{45}{4})$

$L.R. = 3$; $\mathbf{d}$: $4y - 51 = 0$

ρ = ☞; *Eje*: $x + 5 = 0$

$L(-\frac{7}{2}, \frac{45}{4})$ y $R(-\frac{13}{2}, \frac{45}{4})$

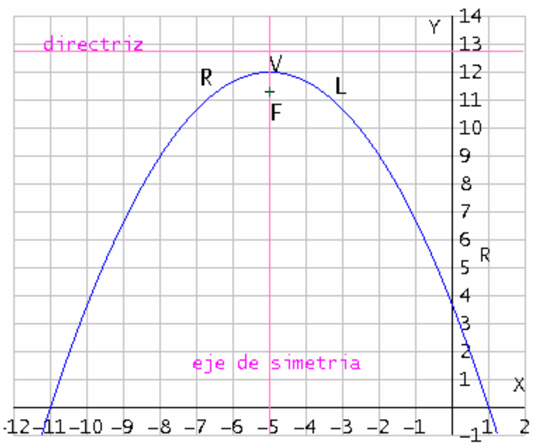
12) $(x - 1)^2 = -1(y - 7)$

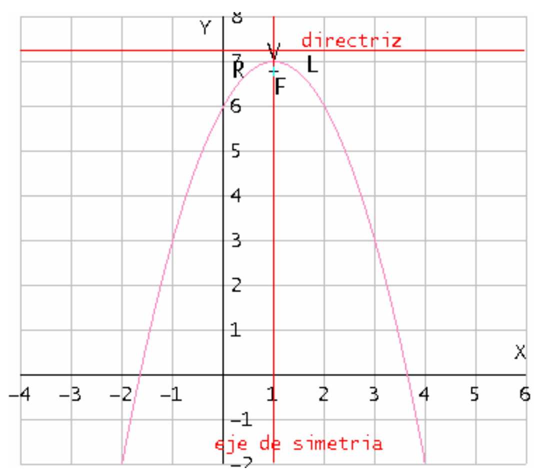
V: $(1, 7)$; $F(1, \frac{27}{4})$

$L.R. = 1$; $\mathbf{d}$: $4y - 29 = 0$

$\boldsymbol{\rho} = -\frac{1}{4}$; *Eje*: $x - 1 = 0$

$L(\frac{3}{2}\ , \frac{27}{4})$ y $R(\frac{1}{2}\ , \frac{27}{4})$





EJERCICIOS 5.6

1. $(y - 4)^2 = -8(x - 3)$ o $y^2 - 8y + 8x + 40 = 0$
2. $(x + 2)^2 = 4(y + 3)$ o $x^2 + 2x - 4y - 8 = 0$
3. $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$ o $x^2 + 2x + 4y - 11 = 0$
4. $(y + 4)^2 = 4(x - 3)$ o $y^2 + 8y - 4x + 28 = 0$
5. $(x - 3)^2 = 6(y - 1)$ o $x^2 - 6x - 6y + 15 = 0$

6. a) $(y + 3)^2 = 8(x + 1)$ o $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$

   b) $(y + 3)^2 = -8(x - 3)$ o $y^2 + 6y + 8x - 15 = 0$

7. a) $(y - 14)^2 = -8(x - 4)$ o $y^2 - 28y + 8x + 164 = 0$

   b) $(y + 2)^2 = -8(x - 4)$ o $y^2 + 4y + 8x - 28 = 0$

8. Ecuación de la tangente $y - 2x = 0$

9. a) $(y + 4)^2 = 6\left(x + \frac{5}{2}\right)$ o $y^2 + 8y - 6x + 1 = 0$

   b) $(y + 4)^2 = -6\left(x - \frac{1}{2}\right)$ o $y^2 + 8y + 6x + 13 = 0$

10. $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x - 0)$ o $4y^2 + 4y - x + 1 = 0$

11. Tomando el punto medio de la base de la ventana como origen de coordenadas, resulta que el vértice es $V(0\ ,\ 1)$ y la ecuación del arco parabólico es de la forma $(x - h)^2 = 4\rho(y - k)$, sustituyendo las coordenadas del vértice se tiene que la ecuación del arco de la ventana es: $x^2 = 4\rho(y - 1) \rightarrow$ □

    Como un extremo de la ventana corta al eje X en $(1.5\ ,\ 0)$, este punto satisface la ecuación anterior, sustituyendo sus coordenadas en ella obtenemos el valor de ρ cómo sigue: $(1.5)^2 = 4\rho(0 - 1)$ entonces $-2.25 = 4\rho$

    Sustituyendo este valor en (□) obtenemos la ecuación del arco de la ventana que es $x^2 = -2.25(y - 1)$.

    En el punto que dista 1 m de un extremo, resulta que $x = \pm 1$, por lo tanto, el valor correspondiente de y es:

    $1^2 = -2.25(y - 1)$ despejando a y tenemos $y = \frac{1.25}{2.25} = 0.5555$

    Es decir la altura a la distancia de 1 m de uno de sus extremos es 55.5 cm.

12. La separación es cero, puesto que los postes están juntos.

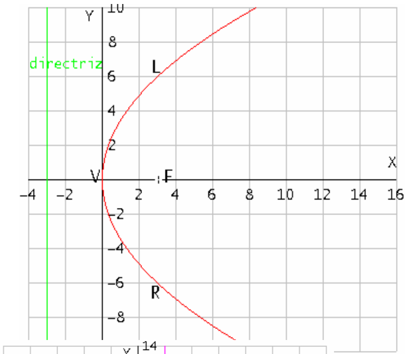
SOLUCIÓN A LA AUTOEVALUACIÓN

1) $V(0\ ,\ 0)$; $\rho = 3$; $F(3\ ,\ 0)$

Directriz: $x + 3 = 0$

Eje: $y = 0$; $LR = 12$

$L(3\ ,\ 6)$; $R(3\ ,\ -6)$



2) a) Abre hacia la derecha; V(1 , –2);

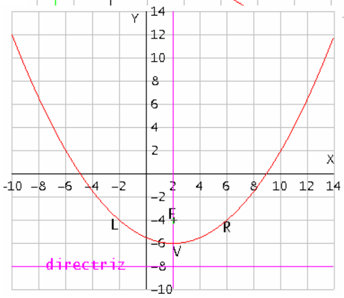
b) Abre hacia abajo; V(5 , –3).

3) $V(2, -6)$; $F(2, -4)$

$\rho = 2$; Directriz $y = -8$

Eje: $x - 2 = 0$; $LR = 8$

$L(-2, -4)$; $R(6, -4)$



4) General: $4x^2 - 8x + y + 8 = 0$; ordinaria $(x-1)^2 = -\frac{1}{4}(y+4)$

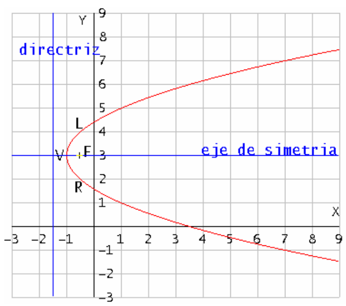
5) Ordinaria $(y-3)^2 = 2(x+1)$; general $y^2 - 2x - 6y + 7 = 0$

$V(-1, 3)$; $F\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$\rho = ½$; Directriz $x = -\frac{3}{2}$

Eje: $y - 3 = 0$

L(– ½ , 4); R(– ½ , –2)



6) $V(8, 4)$; $\rho = -1$; $F(7, 4)$ La parábola abre hacia la izquierda

SOLUCIÓN AL PROBLEMA INTRODUCTORIO

Si el ancho de la entrada de la cueva fuera el lado recto, el foco estaría en medio y el parámetro sería la cuarta parte de 3.5 es decir 0.875. Es decir el vértice estaría arriba del foco a una distancia de 0.875 m; pero la altura de la cueva es de 2 m, es decir el foco quedaría arriba del suelo y a una distancia de 1.61 m ≈ 161 cm.

BIBLIOGRAFIA

- Sullivan, M., Trigonometría y Geometría Analítica, 1997, Editorial Prentice Hall.

- Matemáticas III, Cuaderno de trabajo; de los profesores Jesús H. Morales G., Carlos Ramírez del C., Dolores Brauer B, et. (CCH Azcapotzalco), 2000, Editorial Trillas.

- Arquímedes Caballero, Geometría Analítica, 1990, Editorial Esfinge S. A.

- Fuller, G. Geometría Analítica, 1989, Por Compañía editorial Continental.

- Fundamentos de Geometría Analítica, Unidad VI; Parábola; Dirección General de Proyectos Académicos, 1988, Ediciones SUA, UNAM.

REACTIVOS DE LA UNIDAD 5: LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Para complementar tu estudio sobre esta unidad debes de resolver los siguientes reactivos ya que tu examen extraordinario puede estar formado con preguntas muy parecidas a las que te presentamos a continuación.
Cada reactivo tiene asignada una letra que corresponde a su clasificación según el grado de dificultad, F: fácil, R: regular y D: difícil.
Te recomendamos que los clasificados como D los dejes al final y si es necesario pide ayuda a algún profesor, esperamos no tengas mayor problema con los ejercicios marcados con R y menos con los F.

1(F).- La ecuación de una parábola vertical es:

a) $x^2 - 8y^2 = 5$ b) $y - 4x = 3$ c) $x^2 - 2y + 5 = 0$

d) $y^2 + 4x = 0$ e) $y^2 + 8x = 7$

2(F).- La ecuación de una parábola horizontal es:

a) $x - 8y = 5$ b) $y^2 - 4x = 3$ c) $x^2 - 2y^2 + 5 = 0$

d) $y^2 + 4x^2 = 4$ e) $y + 8x^2 = 7$

3(F).- ¿ Hacia donde abre la parábola con ecuación $x^2 = 8y$?

a) arriba b) abajo c) derecha d) izquierda e) no abre

4(F).- ¿Hacia donde abre la parábola con ecuación $y^2 = -4x$?

a) arriba b) abajo c) derecha d) izquierda e) no abre

5(F).- ¿Cuál es la ecuación de una parábola de F(3, 0) y directriz $x = -3$?

a) $x^2 = 8y$ b) $x^2 = -8y$ c) $y^2 = 12x$ d) $x^2 = -12y$ e) $y^2 = -12x$

6(F).- ¿Cuál es la ecuación de la parábola con foco F(0 , –3) y directriz $y = 3$?

a) $x^2 = 8y$ b) $x^2 = -8y$ c) $y^2 = 12x$ d) $x^2 = -12y$ e) $y^2 = -12x$

7(F).- Si una parábola corta al eje X en (0 , 0) y (4 , 0) ¿Cuál es la abscisa del vértice?

a) –4 b) –2 c) 0 d) 4 e) 2

8(F).- Si la parábola corta al eje y en (0 , 0) y (0 , 6) ¿Cuál es la ordenada del vértice?

a) 3 b) 0 c) –6 d) –3 e) 6

9(F).- ¿Que punto de los siguientes pertenece a la parábola $y^2 = 8x$?

a) (–2 , 0) b) (2 , 0) c) (0 , 0) d) (0 , 2) e) (0 , –2)

10(F).- ¿Qué punto de los siguientes pertenece a la parábola $x^2 = -4y$?

a) (0 , –2) b) (0 , 2) c) (0 , –1) d) (0 , 1) e) (0 , 0)

11(F).- En una parábola la distancia que hay del foco a la directriz es:

a) Igual a la distancia que hay del foco al vértice.
b) Igual a la longitud del lado recto.
c) El doble de la distancia del foco al vértice.
d) Igual a la distancia del foco al lado recto.
e) Igual a la distancia del vértice al lado recto.

12(F).- En una parábola la distancia que hay del vértice a la directriz es:

a) Igual a la distancia que hay del foco al vértice.
b) Igual a la longitud del lado recto.
c) El doble de la distancia del foco al vértice.
d) Igual a la distancia del foco al lado recto.
e) Igual a la distancia del vértice al lado recto.

13(F).- El punto (2 , –1) pertenece a la parábola con ecuación:

a) $3x^2 - y = 1$ b) $y^2 - 4x = 3$ c) $x^2 - 2y^2 - 2 = 0$
d) $y^2 + 4x = 0$ e) $y + 2x^2 = 7$

14(F).- El punto (4 , 6) pertenece a la parábola con ecuación:

a) $y^2 = 8(x - 3)$ b) $y^2 = 4(x + 3)$ c) $x^2 = 8(y - 3)$
d) $(x - 4)^2 = 8(y - 3)$ e) $(x - 2)^2 = 6(y - 2)$

15(F).- La ecuación de una parábola con vértice en el origen y con foco en el punto F(0 , 2), es:

a) $y^2 = 2x$ b) $x^2 = 2y$ c) $x^2 = 8y$ d) $y^2 = 8x$ e) $x^2 = -8y$

16(F).- La ecuación de la parábola con vértice V(0 , 0) y foco F(0 , –1) es:

a) $y^2 = -4x$ b) $y^2 = 4x$ c) $x^2 = 4y$ d) $x^2 = -4y$ e) $y^2 = -x$

17(F).- La ecuación de la parábola con vértice en el origen y su directriz la recta $y - 5 = 0$ es:

a) $x^2 = -20y$ b) $x^2 = -5y$ c) $y^2 = -10x$ d) $y^2 = 5x$ e) $x^2 = 20y$

18(F).- La ecuación de la parábola con F (0 , –3) y directriz $y - 3 = 0$ es:

a) $y^2 = -12x$ b) $y^2 = 12x$ c) $x^2 = 12y$ d) $x^2 = -12y$ e) $(x + 3)^2 = 3y$

19(F).- La ecuación de la parábola con F(2 , 0) y directriz $x + 2 = 0$ es:

a) $x^2 = 8y$ b) $x^2 = -8y$ c) $y^2 = 8x$ d) $y^2 = -8x$ e) $y^2 = 2x$

20(F).- La ecuación de una parábola con vértice en el origen y directriz la recta de $x - 1 = 0$ es:

a) $y^2 = \frac{1}{4}x$ b) $y^2 = 4x$ c) $y^2 = -\frac{1}{4}x$ d) $y^2 = -4x$ e) $y^2 = -x$

21(F).- La ecuación de la parábola con foco (–3 , 0) y directriz $x - 3 = 0$ es:

a) $x^2 = 12y$ b) $x^2 = -12y$ c) $y^2 = -3x$ d) $y^2 = -12x$ e) $y^2 = 3x$

22(R).- La ecuación de la parábola con foco (0 , 4) y directriz $y + 4 = 0$ es:

a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = -4x$ c) $x^2 = 4y$ d) $y^2 = 16x$ e) $x^2 = 16y$

23(R).- Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje focal coincide con el eje X y pasa por el punto Q(–4 , 4). La longitud del lado recto de esta parábola es:

a) ¼ b) 4 c) 8 d) 16 e) 1

24(R).- Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje focal coincide con el eje Y y pasa por el punto Q(4 , –4). ¿Cual es la longitud del lado recto de esta parábola?

a) –4 b) 1 c) 4 d) 8 e) 16

25(R).- Una parábola con vértice en el origen tiene como extremos de su lado recto a los puntos A(–4, 2) y B(4, 2). La ecuación de esta parábola es:

a) $x^2 - 8y = 0$ b) $y^2 - 4x = 0$ c) $x^2 - 2y = 0$ d) $y^2 + 4x = 0$ e) $x^2 + 8y = 0$

26 (R).- Los extremos del lado recto de una parábola son los puntos (–3 , –2) y (–3 , 2) ¿Cual es la ecuación de la parábola si su vértice es el origen?

a) $x^2 = -\frac{4}{3}y$ b) $x^2 = \frac{4}{3}y$ c) $y^2 = -\frac{4}{3}x$ d) $y^2 = -y$ e) $x^2 = y$

27(F).- Si la ecuación de una parábola es $x^2 + 16y = 0$, la ecuación de su directriz es:

a) $y = 4$ b) $y = -4$ c) $y = 16$ d) $x = 16$ e) $x = -4$

28(F).- Una parábola tiene por ecuación $y^2 + 6x = 0$ la ecuación de su directriz es:

a) $x = -6$ b) $y = -6$ c) $x = \frac{3}{4}$ d) $x = \frac{3}{2}$ e) $y = 6$

29(R).- La ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje focal el eje Y y que pasa por el punto (3 , 1) es:

a) $x^2 = -9y$ b) $x^2 = \frac{9}{4}y$ c) $y^2 = -9x$ d) $y^2 = 9x$ e) $x^2 = 9y$

30(R).- La ecuación de una parábola es $3y^2 = 8x$, las coordenadas de su foco son:

a) $(-\frac{2}{3}, 0)$ b) (2 , 0) c) $(0, \frac{2}{3})$ d) $(0, -\frac{2}{3})$ e) $(\frac{2}{3}, 0)$

31(R).- La ecuación de una parábola es $2x^2 = 8y$, ¿Cuáles son las coordenadas del foco?

a) (0 , 1) b) (1 , 0) c) (0 , –1) d) (–1 , 0) e) (1 , –1)

32(R).-En la ecuación de la parábola $2x^2 = 6y$, ¿Cuáles son las coordenadas del foco?

$a)\ F\left(0, \frac{4}{3}\right)$ $b)\ F\left(0, \frac{3}{4}\right)$ $c)\ F\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ $d)\ F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ $e)\ F(0, 0)$

33(R).- En la ecuación de la parábola $3y^2 = 12x$, ¿Cuáles son las coordenadas del foco?

a). F(1 , 0) b) F(–1 , 0) c) F(0, –1) d) (0 , 1) e) (1 , –1)

34(R).- Si las coordenadas del vértice y foco de una parábola son V(–2 , –3) y F(–2 , –2) ; la ecuación de la parábola es:

a) $(x + 3)^2 = 4(y + 2)$ b) $(x + 2)^2 = 4(y + 3)$ c) $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$
d) $(x - 2)^2 = 4(y - 3)$ e) $(y - 2)^2 = 4(x - 3)$

35(R).- La ecuación de la parábola con vértice (2 , 3) y foco (2, – 8) es:

a) $(y-2)^{2} = -44(x-3)$ b) $(x-2)^2 = 44(y-3)$ c) $(x-2)^2 = -44(y-3)$

d) $(y+2)^2 = 44(x-3)$ e) $(x-2)^2 = 44(y+8)$

36(F).- Una parábola tiene su vértice en V(0 , 3) y su foco en F (0 , 5), su ecuación es:

a) $x^2 - 8y + 24 = 0$ b) $y^2 - 8x + 40 = 0$ c) $x^2 - 6y + 18 = 0$

d) $y^2 + 8x - 36 = 0$ e) $x^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

37(F).- Una parábola tiene su vértice en V (3 , 0) y su foco F(5 , 0), su ecuación es:

a) $x^2 - 8y + 24 = 0$ b) $y^2 - 8x + 40 = 0$ c) $x^2 - 6y + 18 = 0$

d) $y^2 - 8x - 24 = 0$ e) $x^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

38(R).- Una parábola tiene su foco en el punto F(4 , –3) y su directriz es la recta $y - 1 = 0$, su ecuación es:

a) $(x-4)^2 = 4(y+3)$ b) $(y-4)^2 = 4(x-3)$ c) $(x+1)^2 = 8(y-4)$

d) $(x-4)^2 = -8(y+1)$ e) $(y+1)^2 = -8(x-4)$

39(R).- Una parábola tiene su foco en el punto F(–3 , 4) y su directriz es la recta $x - 1 = 0$. Su ecuación es:

a) $(x-4)^2 = 4(y+3)$ b) $(y-4)^2 = 4(x-3)$ c) $(x+1)^2 = 8(y-4)$

d) $(x-4)^2 = -8(y+1)$ e) $(y-4)^2 = -8(x+1)$

40(D).- Una parábola tiene su vértice en el punto V(4 , –1), su eje de simetría es $y + 1 = 0$ y pasa por el punto (3 , 1), su ecuación es:

a) $4y^2 + 2x + y - 15 = 0$ b) $y^2 + 4x - 15 = 0$ c) $y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$

d) $(x+1)^2 = -4(y-4)$ e) $x^2 = -4(y-4)$

41(D).-Una parábola tiene su vértice en el punto V(2 , 3), su eje de simetría es $x - 2 = 0$ y pasa por el punto (5 , –1), su ecuación es:

a) $4x^2 - 16x + 9y = 11$ b) $4y^2 - 16x + 9x - 11 = 0$ c) $4x^2 + 16x - 9y + 11 = 0$

d) $4y^2 + 16y - 9x + 11 = 0$ e) $2x^2 - 8x + 9y - 11 = 0$

42(F).- La ecuación de la parábola con foco F(5 , 0) y directriz $y - 2 = 0$ es:

a) $(x-5)^2 = -4(y-1)$ b) $(y-5)^2 = 4(x-1)$ c) $(x+5)^2 = 4(y+1)$
d) $(x-5)^2 = -8y$ e) $(y-5)^2 = 8x$

43(F).- La ecuación de la parábola con foco F(0 , 5) y directriz $x - 2 = 0$ es:

a) $(y-1)^2 = -4(x-1)$ b) $(x-5)^2 = 4(y-1)$ c) $(y+5)^2 = (x+1)$
d) $(y-5)^2 = 4(x+1)$ e) $(x-1)^2 = -4(y-5)$

44(F).- ¿Cuales son las coordenadas del vértice en $(x-5)^2 = 4(y+1)$?

a) (–5 , 1) b) (5 , –1) c) (–1 , 5) d) (0 , 0) e) (1 , –5)

45(F).- ¿Cuales son las coordenadas del vértice en $(y+5)^2 = 4(x-1)$?

a)(0 , –0) b) (5 , –1) c) (–1 , 5) d) (–5 , 1) e) (1 , –5)

46(R).- Las coordenadas del foco de la parábola $(y+3)^2 = -8(x-2)$ son:

a) (0 , –3) b) (4 , –3) c) (–5 , 2) d) (2 , 0) e) (2 , –5)

47(R).- Las coordenadas del foco de la parábola $(x+3)^2 = -8(y-2)$ son:

a) (0 , –3) b) (4 , –3) c) (–3 , 2) d) (–3 , 0) e) (2 , –5)

48(R).- La ecuación de una parábola es $(x-5)^2 = -12y$, la ecuación de su directriz es:

a) $x = 2$ b) $y = 3$ c) $y = 0$ d) $y = 4$ e) $x = 8$

49(R).- ¿Cual es la ecuación de la directriz en la parábola $(y-5)^2 = 12x$?

a) $y = 3$ b) $x = 3$ c) $x = -3$ d) $x = 4$ e) $y = 4$

50(R).- La ecuación de una parábola es $(x+3)^2 = 4y$, los extremos de su lado recto son:

a) L(–1 , –1) R(–5 , –1) b) L(–2 , 2) R(–2 , –2) c) L(–4 , –2) R(–4 , 2) d) L(–5 , 4) R(–1 , 4) e) L(–5 , 1) R(–1 , 1)

51(R).- ¿Cuales son los extremos del lado recto de la parábola $(y+3)^2 = 4x$?

a) L(1 , –1) R(1 , –5) b) L(–2 , 2) R(–2 , –2) c) L(–4 , –2) R(–4 , 2) d) L(–5 , 4) R(–1 , 4) e) L(–5 , 1) R(–1 , 1)

52(R).- La ecuación de una parábola es $(y+4)^2 = 4(x-1)$, los extremos de su lado recto son:

a) L(–3 , 3) R(–3 , –1) b) L(3 , –5) R(–1 , –5) c) L(0 , –6) R(0 , –2) d) L(2 , –2) R(2 , –6) e) L(–1 , –3) R(3 , –3)

53(R).- Una parábola con ecuación $(y-4)^2 = 4(x-1)$ tiene como directriz a la recta:

a) $x = 2$ b) $y = 3$ c) $x = 0$ d) $y = 4$ e) $x = -1$

54(R).- ¿Cual es la directriz de la parábola $(x-4)^2 = 4(y-1)$?

a) $y = 0$ b) $x = 0$ c) $y = 3$ d) $y = 4$ e) $x = -1$

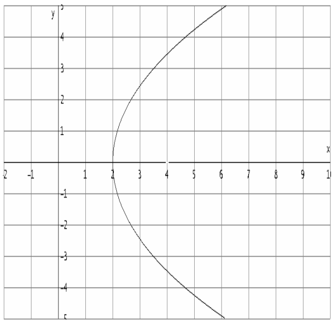
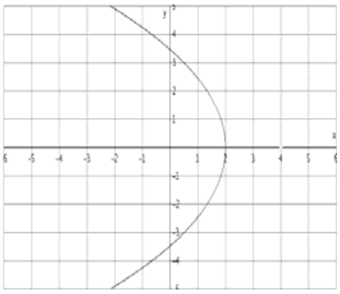
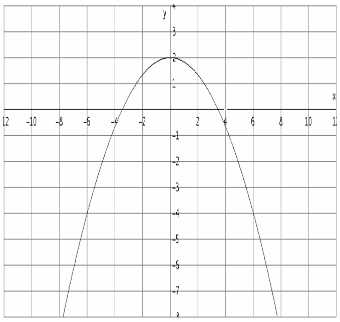
55(R).- Las coordenadas del vértice de la parábola cuya ecuación es $y^2 + 8x + 8 = 0$ son:

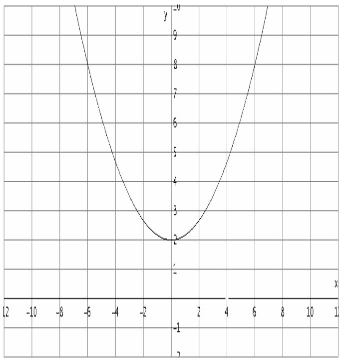
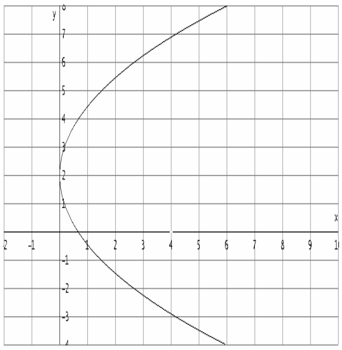
a) (0 , 8) b) (8 , 8) c) (–1 , 1) d) (0 , 0) e) (–1 , 0)

56(R).- ¿Cuales son las coordenadas del vértice de la parábola $x^2 + 8y + 8 = 0$?

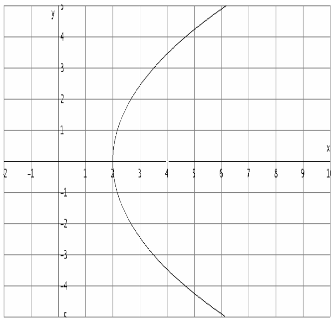
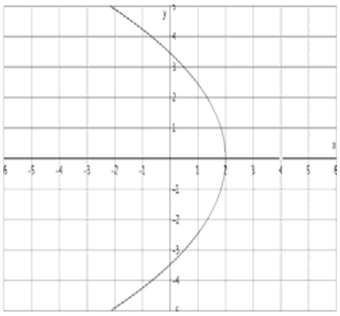
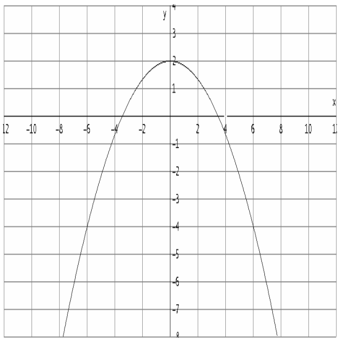
a)(0 , 1) b) (0 , –1) c) (–1 , 0) d) (1 , 0) e)(0 , 0)

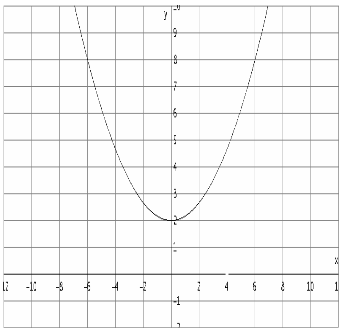
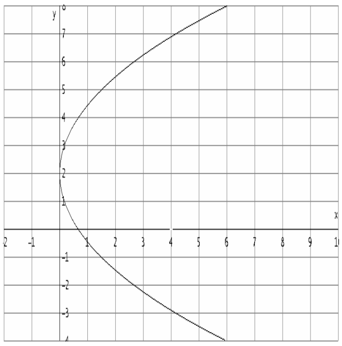
57(F).- La gráfica de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 6x + 12 = 0$ es:

a)  b)  c) 

d)  e) 

58(F).- Cual es la grafica de la parábola $x^2 - 6y + 12 = 0$

a)  b)  c) 

d)  e) 

59(R).- Las coordenadas del foco de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 4x + 8 = 0$ son:

a) (0 , 2) b) (0 , 8) c) (8 , 0) d) (2 , 0) e) (–2 , 8)

60(R).- ¿Cuales son las coordenadas del foco de la parábola $x^2 - 4y + 8 = 0$?

a) (3 , 0) b) (0 , –3) c) (0 , 3) d) (0 , 2) e) (2 , 0)

61(R).- La ecuación de una parábola es $(y + 1)^2 = 16x$, la longitud de su lado recto y la ecuación de su directriz son:

a) LR = 16, $x = -4$ b) LR = –4, $y = 4$ c) LR = –16, $x = 4$ d) LR = 1, $y = 2$ e) LR = 4, $y = -4$

62(R).- De la parábola $(x+1)^2 = 16y$ Cual es la longitud del lado recto y la ecuación de su directriz.

a) LR = 16, $x = -4$ b) LR = –4, $y = 4$ c) LR = –16, $x = 4$ d) LR = 1, $y = 2$ e) LR = 16, $y = -3$

63(R).- La ecuación de una parábola es $x^2 - 6x - 20y + 29 = 0$, las coordenadas de su vértice son:

a) (–3 , –1) b) (3 , 20) c) (3 , 1) d) (1 , 3) e) (3 , 0)

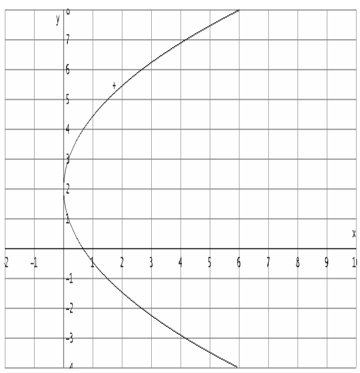
64(R).- Cual es el vértice de la parábola $y^2 - 6y - 20x + 29 = 0$

a) (–3 , –1) b) (3 , 20) c) (3 , 1) d) (1 , 3) e) (3 , 0)

65(R).- El vértice V y el foco F de la parábola cuya ecuación es $y^2 = 8x + 2y - 17$, son:

a) V(1 , 2), F(3 , 2) b) V(2 , 1), F(4 , 1) c) V(2 , 16), F(4 , 16) d) V(2 , 1), F(2 , 3) e) V(–1 , –2), F(1 , –2)

66(R).- ¿Que ecuación le corresponde a la parábola cuya gráfica es la siguiente?



a) $y^2 - 6x + 12 = 0$ b) $y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

c) $x^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ d) $x^2 - 6x - 2y + 12 = 0$

e) $y^2 + 6x - 12 = 0$

67(F).- La parábola con ecuación $y^2 + 2x - 16 = 0$ corta al eje X en:

a) (4 , 0) b) (0 , 4) c) (0 , 8) d) (–16 , 0) e) (8 , 0)

68(F).- La parábola con ecuación $x^2 + 2y - 16 = 0$ corta al eje Y en:

a) (0 , 8) b) (8 , 0) c) (0 , –8) d) (–8 , 0) e) (–16 , 0)

69(R).- Una parábola con ecuación $x^2 + 16x - 20y + 124 = 0$, tiene como directriz a la recta:

a) $y = -2$ b) $x = 3$ c) $x = -4$ d) $y = -8$ e) $x = -16$

70(R).- Una parábola con ecuación $y^2 + 16y - 20x + 124 = 0$, tiene como directriz a la recta.

a) $x = -4$ b) $x = -2$ c) $y = -2$ d) $y = -8$ e) $x = -16$

71(R).- La ecuación de una parábola es $4y^2 - 48x - 20y - 7 = 0$, las coordenadas de su vértice son:

a) (–2.2 , 10) b) (–48 , –20) c) $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$ d) (48 , 20) e) $(\frac{5}{2}, -\frac{2}{3})$

72 (R).- Dada la ecuación de la parábola $4x^2 - 16x + 9y - 11 = 0$ obtener su vértice.

a) V(3 , 2) b) V(2 , 3) c) V(–3 , 2) d) V(3 , –2) e)V(–3 , –2)

73(R).- La longitud del lado recto de la parábola con ecuación $3x^2 - 9x - 5y = 2$ es:

a) $-\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{4}$ c) 5 d) $\frac{5}{3}$ e) $-\frac{5}{3}$

74(R).- Cuales son las coordenadas del foco de la parábola siguiente

$x^2 - 6x + 8y + 25 = 0$

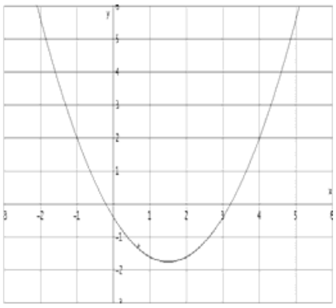
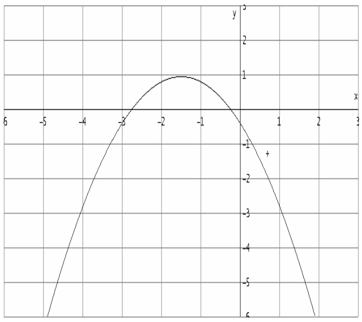
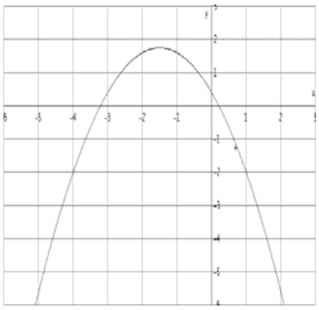
a) F(3 , 4) b) F(–3 , 4) c)F(3 , –4) d) (–3 , –4) e) F(4 , –3)

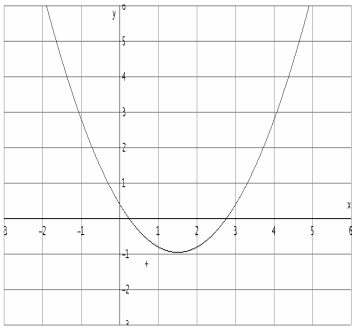
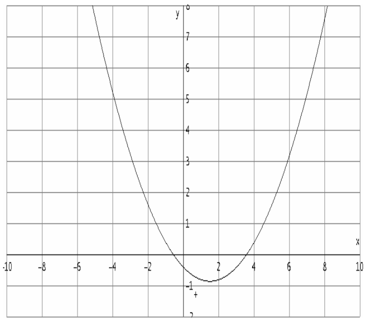
75(R).- Cuales son las coordenadas del foco de la parábola siguiente.

$$y^2 + 2y - 12x + 13 = 0$$

a) F(–1 , 3) b) F(1 , –3) c) F(–3 , 1) d) F(1 , 3) e) F(3 , 1)

76(R).- La gráfica de la parábola $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$ es:

a) 
b) 
c) 

d) 
e) 

77(R).- El valor del parámetro p de la parábola con ecuación $y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$ es:

a) –2 b) 2 c) 8 d) 4 e) – 8

78(R).- Una parábola tiene como ecuación $2x^2 - 10y - 16x + 2 = 0$ ¿Cuales son las coordenadas de su vértice?

a) V(–3 , 4) b) V(3 , –4) c) V(4 , –3) d) V(–4 , 3) e) V(–3 , –4)

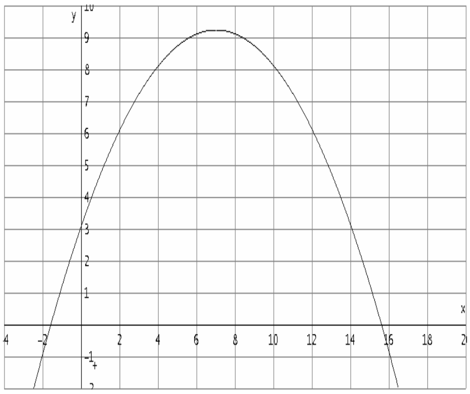
79(R).- Una parábola tiene por ecuación $2y^2 - 10x - 16y + 2 = 0$, ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?

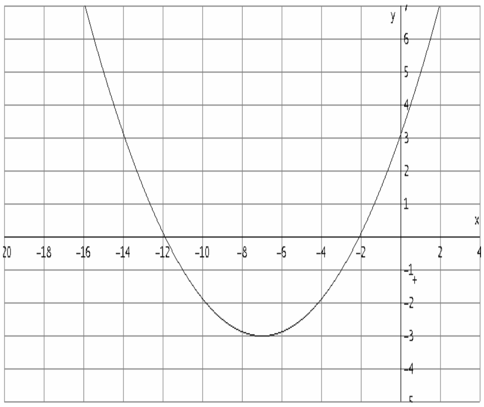
a) V(–3 , 4) b) V(–15 , 16) c) V(4 , –3) d) V(3 , –4) e) V(–4 , 3)

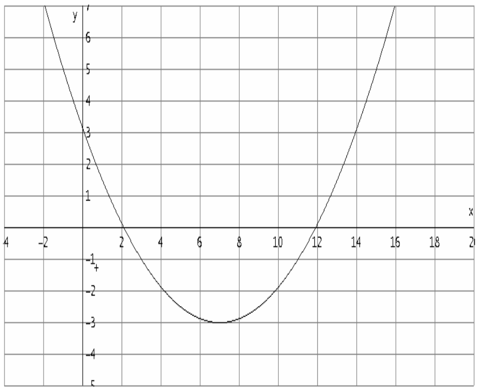
80(D).- La ecuación de una parábola es $x^2 + 14x - 8y + 25 = 0$, los extremos de su lado recto son:

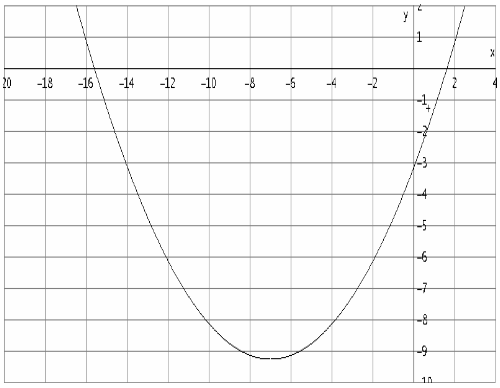
a) L(–11 , –1) R(–3 , –1)   b) L(–3 , –5) R(–11 , –5)   c) L(–5 , 1) R(–5 , –7)   d) L(–9 , –7) R(–9 , 1)   e) L(3 , 5) R(11 , 5)

81(R).- La gráfica de la parábola $x^2 + 14x - 8y + 25 = 0$ es:

a) 

b) 

c) 

d) 

82(D).- Una parábola vertical con vértice en el origen pasa por el punto (–4 , –5), su ecuación es:

a) $y^2 = \frac{16}{5}x$ b) $x^2 = -\frac{16}{5}y$ c) $y^2 = -\frac{16}{5}x$ d) $x^2 = \frac{16}{5}y$ e) $x^2 = -\frac{4}{5}y$

83(D).- Una parábola horizontal con vértice (1 , – 5) pasa por el punto (5 , 3), su ecuación es:

a) $(y - 5)^2 = 4(x + 1)$ b) $(y + 1)^2 = -16(x - 5)$ c) $(x - 5)^2 = 16(y - 3)$

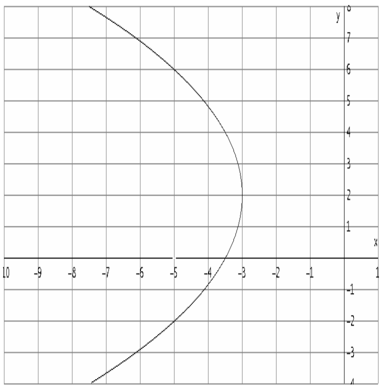
d) $(y + 5)^2 = 16(x - 1)$ e) $(x - 1)^2 = 4(y + 5)$

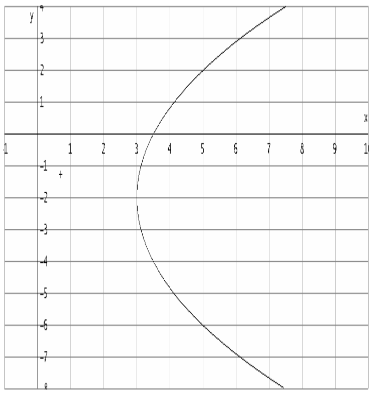
84(R).- El vértice de una parábola es V(3 , – 2) y su parámetro $p = -2$, además su eje de simetría es paralelo al eje X, su ecuación es:

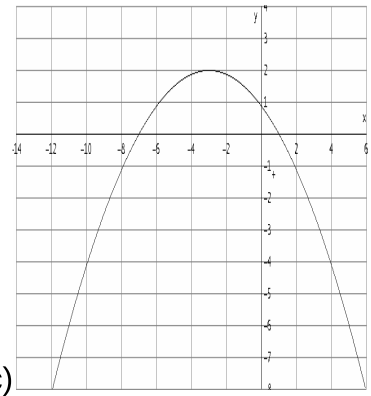
a) $(x-3)^2 = 2(y+2)$ b) $(x+3)^2 = -8(y-2)$ c) $(y+2)^2 = -8(x-3)$

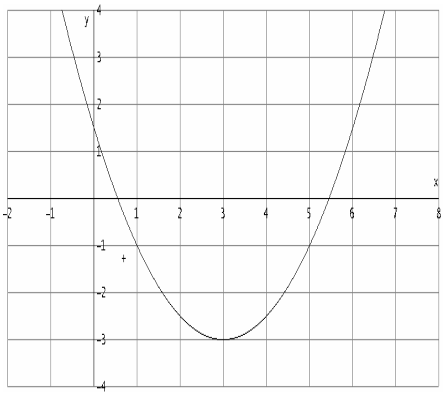
d) $(y+3)^2 = 8(x-2)$ e) $(y-3)^2 = -4(x+2)$

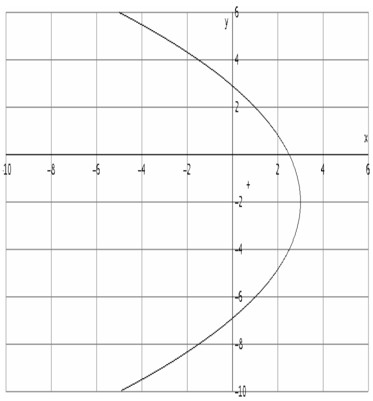
85(R).- La gráfica de la parábola $y^2 + 4y + 8x - 20 = 0$ es:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

86(D).- La ecuación de la parábola con foco en F(3 , –1), parámetro positivo y los extremos de su lado recto son L(1 , – 1) y R(5 , – 1) es:

a) $(x-3)^2 = 4(y+2)$ b) $(x+2)^2 = 4(y-3)$ c) $(y+2)^2 = 16(x-3)$
d) $(y+3)^2 = 4(x-2)$ e) $(y-3)^2 = -4(x+2)$

87(D).- La ecuación de la parábola con foco F(–2 , 3), parámetro negativo y los extremos del lado rectos son L(–2 , 2) y R(–2 , 4) es:

a) $y^2 - 6x + 12 = 0$ b) $y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$ c) $x^2 - 6x + 2y + 9 = 0$
d) $x^2 + 2x - 6y + 12 = 0$ e) $y^2 + 6x - 2y + 11 = 0$

88(R).- Obtener la ecuación de la parábola de F(–3 , 2) y directriz $y + 7 = 0$

$a)\ y^2 - 4y - 8x - 20 = 0$ $b)\ x^2 - 4x - 8y - 20 = 0$ $c)\ y^2 + 4y + 8x - 20 = 0$
$d)\ x^2 - 8x + 4y + 20 = 0$ $e)\ y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$

89(R).- Obtener la ecuación de la parábola de F(1 , –2) y directriz $y - 4 = 0$.

$a)\ y^2 - 2y + 12x + 13 = 0$ $b) x^2 - 2x + 12y + 13 = 0$ $c) y^2 + 2y - 12x - 13 = 0$
$d)\ x^2 + 2x + 12y + 13 = 0$ $e)\ y^2 + 2y + 12x + 13 = 0$

90(R).- Obtener las coordenadas del vértice y foco de la parábola siguiente.

$$y^2 + 2y - 12x + 37 = 0$$

a). V(–1 , 3) F(6 , –1) b) V(3 , –1) F(–1 , 6) c) V(–1 , 3) F(–1 , 6)
d) V(3 , –1) F(6 , –1) e)V(–3 , –1) F(–1 , 6)

91(R).- Obtener las coordenadas del vértice y del foco de la parábola siguiente

$$x^2 - 6x - 8y + 9 = 0$$

a). V(0 , 3) F(3 , 2) b) V(3 , 0) F(2 , 3) c)V(3 , 0) F(3, 2)
d) V(0 , 3) F(3 , –2) e)V(3 , 2) F(3 , 0)

92(D).- Obtener la ecuación de la parábola de V(–3 , 2) y directriz $y = 6$

$a)\ y^2+6y+16x-23=0$ $b)\ y^2-6y-16x+23=0$ $c) x^2-6x+16y+23=0$
$d)\ x^2-6x-16y-23=0$ $e)\ x^2+6x+16y-23=0$

93(D).- La ecuación de la parábola cuyo vértice esta sobre la recta x = –3, la magnitud de su lado recto es 8, su parámetro es positivo, además el punto Q(1 , 1) es un punto de la parábola y su eje de simetría es paralelo al eje Y, es:

a) $x^2 + 2x - 8y - 23 = 0$ b) $y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$
c) $x^2 - 2x - 8y + 9 = 0$ d) $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$
e) $y^2 + 6x - 8y + 17 = 0$

94(R).- Un faro de un automóvil tiene un reflector parabólico de 6 pulgadas de diámetro y 3 pulgadas de profundidad.
¿a que distancia del vértice de la parábola para que tenga la mayor luminosidad?

a) $\frac{3}{4}$ b) ½ c) 3 d) $\frac{3}{2}$ e) ¼

95(R).- Un reflector esta diseñado de manera que la sección transversal que pasa por su eje es una parábola con foco en la fuente de luz. Si el reflector mide 3m de ancho en la abertura y un metro de profundidad. ¿a que distancia del vértice se encuentra el foco?

a) 1 b) 0.5 c) 9/16 d) 4 e) –4/16

96(R).- Se requiere construir un encendedor solar para cigarros, de forma parabólica con luna abertura máxima de 5 cm. Y una profundidad de 1 cm.¿ a que distancia del vértice se debe colocar el cigarro para aprovechar los rayos solares al máximo?

a) 16/25 b) 1 c) –1 d) 25/16 e).5

97.R) Un telescopio tiene un espejo cóncavo parabólico cuyo diámetro mayor es de 8m y profundidad de 1m ¿ a que distancia del vértice se encontrara el foco para poder atrapar la imagen del espacio?

a) 1/6 b) 16 c) $\frac{1}{4}$ d) 4 e) 8

98(D).- En la línea lateral de un campo de fútbol americano se instala un dispositivo para escuchar lo que se dice en el centro de la cancha. Consiste en un plato parabólico con un micrófono en su foco, el plato tiene 2 pies de diámetro y 16 pulgadas de profundidad (1pie =12 pulgadas). Deduce una ecuación de la parábola con su vértice en el origen y que la curva abra hacia la derecha. ¿En que punto se debe colocar el micrófono?

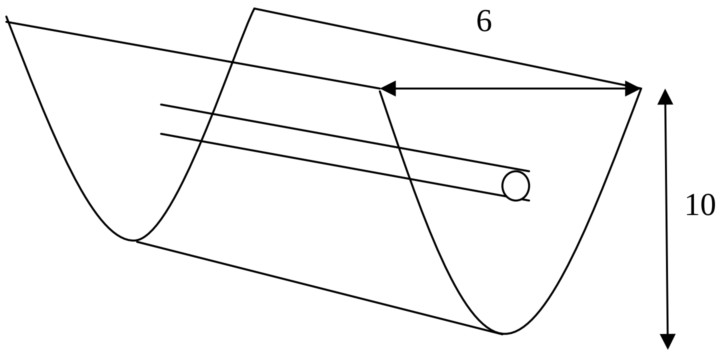
a) 4/9 b) 9/4 c) 9 d) 4 e) 2

99(D).- Un arquero lanza una flecha hacia arriba alcanzando una altura máxima de 40m y cae a una distancia de 30 m. ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria de la flecha?

a) $8x^2-240x-45y=0$ b) $8y^2-240y-45x=0$ c) $x^2-24x-4.5y=0$

d) $y^2-240x-45x=0$ e) $x^2-240y-45y=0$

100(D).- Un calentador solar parabólico con las medidas que se muestran ¿a que distancia del vértice se coloca el tubo para que se obtenga la máxima temperatura?



a) $\frac{25}{3}$ b) $\frac{100}{3}$ c) $\frac{25}{4}$ d) $\frac{100}{25}$ e) $\frac{25}{100}$

SOLUCIÓN DE LOS REACTIVOS

1) c	11) c	21) d	31) a	41) a	51) a	61) a	71) c	81) b	91) c
1) b	12) a	22) e	32) b	42) a	52) d	62) e	72) b	82) b	92) e
2) a	13) e	23) b	33) a	43) d	53) c	63) c	73) d	83) d	93) e
3) d	14) c	24) c	34) b	44) b	54) a	64) d	74) c	84) c	94) a
4) c	15) c	25) a	35) c	45) e	55) e	65) b	75) d	85) e	95) c
5) d	16) d	26) c	36) a	46) c	56) b	66) b	76) a	86) a	96) d
6) e	17) a	27) a	37) d	47) d	57) a	67) e	77) b	87) b	97) d
7) a	18) d	28) d	38) a	48) b	58) a	68) a	78)c	88) a	98) b
8) c	19) c	29) e	39) e	49) c	59) d	69) a	79) a	89)b	99) a
9) e	20) b	30) e	40) c	50) e	60) c	70) b	80) a	90) d	100 a