# UNIDAD 4

# ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

OBJETIVOS

- Identificarás y reconocerás los parámetros de una elipse o de una circunferencia así como sus elementos ya sea si te dan la ecuación o su gráfica con algunos elementos.

- Transitarás de la forma ordinaria a la forma general y viceversa, para ello utilizarás el método de completar cuadrados como la técnica para encontrar los parámetros tanto de la elipse como de la circunferencia.

- Desarrollarás habilidades para cuando te den los elementos esenciales de una elipse o una circunferencia podrás encontrar la ecuación que la representa, así también como su lugar geométrico; y viceversa, si te dan la ecuación de una elipse o una circunferencia podrás describir los elementos que la forman y trazar su gráfica.

- Comprenderás que la circunferencia es el caso límite de la elipse, tanto en sus ecuaciones como en su lugar geométrico.

- Aplicarás los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas.

**INTRODUCCIÓN**

Para continuar nuestro estudio con la geometría analítica, es indispensable tener conocimiento acerca de la elipse y la circunferencia así como sus propiedades. Ya que el conocimiento de estas curvas es necesario para resolver una gran diversidad de problemas que se nos pueden presentar, donde se involucra el concepto de elipse o de circunferencia por ejemplo:

- Al girar los planetas alrededor del Sol lo hacen en órbitas que tienen la forma de una elipse, y el Sol se encuentra en uno de sus focos.
- La órbita de la luna es una elipse con la tierra como foco.
- El trazo de círculos concéntricos en un mapa para establecer las tarifas de ciertos transportes.
- Para encontrar un lugar que este a igual distancia de otros tres conocidos.
- Las curvas que se forman al lanzar una piedra en el agua tranquila, tienen forma circular.
- En arquitectura la construcción de ciertos arcos pueden ser en forma elíptica o circular.

En el estudio y desarrollo de esta unidad, se tratan los temas básicos que un alumno de bachillerato debe saber para adquirir los conocimientos elementales de las ecuaciones cartesianas de la ELIPSE y la CIRCUNFERENCIA.

Se comienza estudiando la ecuación cartesiana de la ELIPSE, empezando con su definición, así como el trazado de la misma y el conocimiento de sus elementos, se indica su forma ordinaria o canónica y su forma general, como utilizarlas y aplicarlas; después de forma similar seguimos con la CIRCUNFERENCIA.

En cada tema se resuelven ejemplos y se proponen ejercicios para que los resuelvas y refuerces lo estudiado, y al final de la unidad se dan las respuestas a estos ejercicios, también se te propone un examen de autoevaluación que servirá para que tu mismo evalúes en que medida has aprendido el tema.

## 4.1 LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO

La elipse se define como el lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante positiva.

A los puntos fijos F y F’ se les llama focos y a la constante positiva se le denomina como $2a$, como se ve en la figura 1.

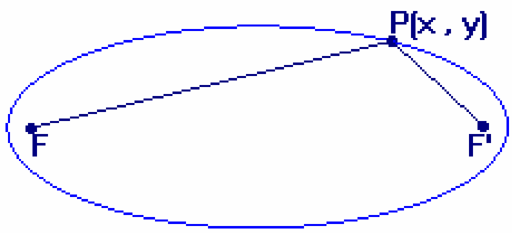



Figura 1

Con FP + PF’ = $2a$

### 4.1.1 TRAZO DE LA ELIPSE Y SUS EJES DE SIMETRÍA

Puedes trazar una elipse de diferentes formas, pero la más fácil es trazarla con “el método del jardinero”, que consiste en clavar dos alfileres o “tachuelitas” sobre un pedazo de cartón; se rodean con un hilo que no este tirante como se ve en la figura 2. Y con la punta de tu lápiz tiras del hilo suavemente y lo mueves alrededor con el hilo siempre tenso, la curva que dibujaste será una elipse como se ve en la figura.

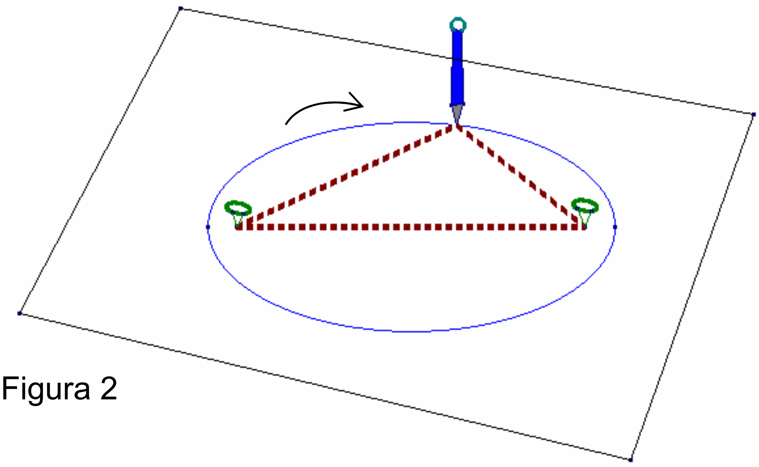


Figura 2

Observa que esta figura es simétrica a un eje horizontal y a un eje vertical y también al centro de la elipse, por eso es que a cada segmento de simetría que empieza y termina en la elipse se le llama eje mayor o eje menor según sea el caso, en la figura 3 el eje mayor será $V_1V_2$ y el eje menor $B_1B_2$.

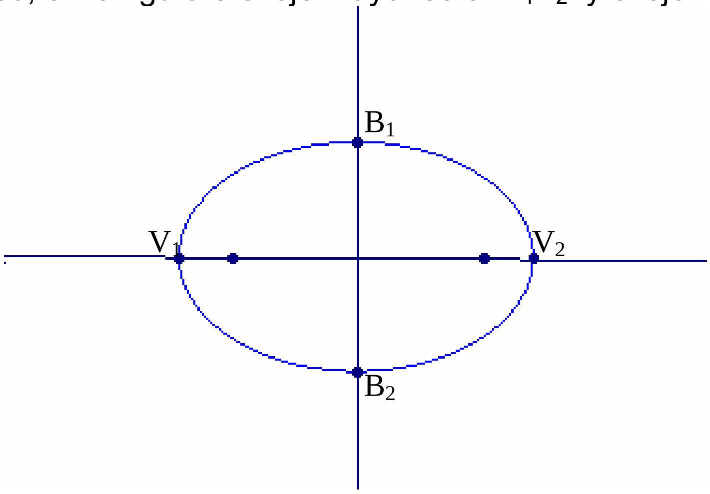



Figura 3

De la simetría se desprenden varias propiedades que nos ayudarán a encontrar su ecuación y a trazar su gráfica como lo veremos en el transcurso de la unidad.

### 4.1.2 ELEMENTOS QUE DEFINEN A LA ELIPSE.

En el estudio de esta unidad nos concretaremos a saber identificar, usar y aplicar los elementos fundamentales de la elipse, para lograr los objetivos mencionados al principio de ésta, por tal razón no nos detendremos en hacer demostraciones tediosas que pueden hacer que te pierdas y este no es el objetivo. Entonces procederemos a definir cada uno de los elementos de la elipse y sus características que los hacen notables.

Los elementos más notables de una elipse son los siguientes:

- Focos de la elipse son $F_1$ y $F_2$ ,
- Vértices de la elipse son: $V_1$ y $V_2$ que son los extremos del eje mayor.
- Extremos del eje menor: $B_1$ y $B_2$ .
- Centro de la elipse: es el punto medio del eje mayor o del eje menor, y lo identificaremos con las coordenadas $(h , k)$.

- Lado recto o ancho focal: es el segmento de recta con extremos en la elipse perpendicular a su eje mayor, pasando exactamente por su foco, lo identificaremos con $L_1R_1$ para el foco $F_1$ y con $L_2R_2$ para el foco $F_2$ .
- Excentricidad de la elipse: es la relación que existe entre el semieje focal y el semieje mayor, lo identificaremos con la letra $e$. Y nos dice que tan redonda o alargada es la elipse, su valor está entre 0 y 1.

Estos elementos podrás identificarlos en la siguiente figura.

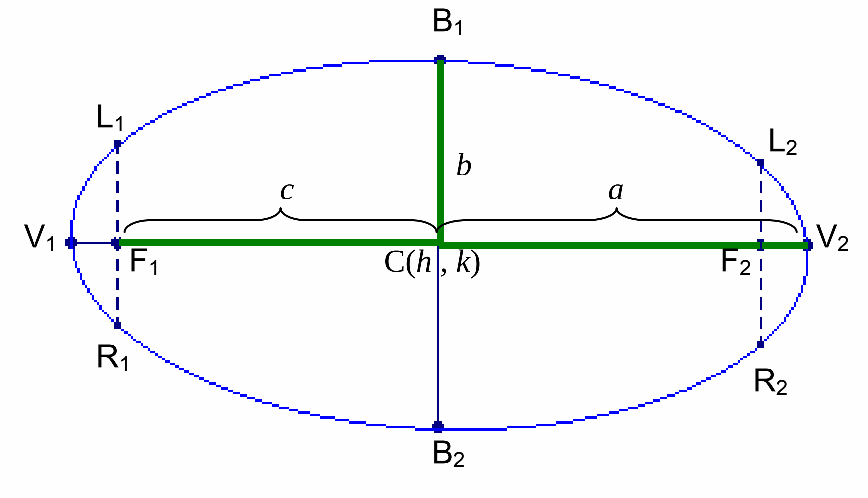



Figura 4

Semieje Focal es la mitad del eje focal que va de $F_1$ a $F_2$, y mide $c$ unidades.

Semieje Mayor es la mitad del eje mayor y mide $a$ unidades.

Semieje Menor es la mitad del eje menor y mide $b$ unidades.

Observa que se forma un triángulo $B_1CF_1$ que es un triángulo rectángulo y en el se cumple el Teorema de Pitágoras, y en consecuencia con nuestros parámetros se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$ . Este último resultado es muy importante para encontrar ecuaciones de elipses y para trazar sus gráficas.

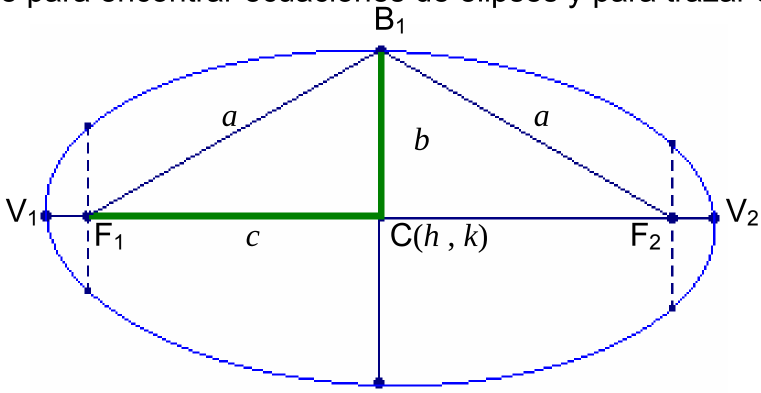



Figura 5

Para que puedas calcular el Lado Recto o ancho focal de la elipse se usa la fórmula $L_1R_1 = L_2R_2 = \frac{2b^2}{a}$.

Para calcular la excentricidad de la elipse se usa $e = \frac{c}{a}$.

Parece que ya tienes todos los elementos que necesitas para poder escribir la ecuación de la Elipse, solo falta que tengas bien claro que estudiaremos sólo dos tipos de elipses, unas con eje Mayor horizontal y las otras con eje Mayor vertical.

## 4.2 ELIPSE CON EJE MAYOR HORIZONTAL.

Usando la definición de elipse con sus respectivas operaciones y cálculos necesarios se llega a la ecuación en forma ordinaria de la **elipse horizontal** con centro en ($h$ , $k$): $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Donde $a$ y $b$ son los parámetros antes mencionados, **observa que $a^2$ está debajo del término con $x$.**

Si el centro de la elipse fuera el Origen de coordenadas esta ecuación se convierte en: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ya que $h = 0$ y $k = 0$.

Estas listo para empezar a resolver algunos ejercicios de elipse como los siguientes:

**EJERCICIO 1:**

Una elipse tiene por ecuación $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4} = 1$ , encontrar las longitudes de los semiejes mayor($a$) y menor ($b$), las coordenadas de los focos y de los vértices, la longitud del lado recto y su excentricidad, también trazar su gráfica.

**Solución:**

La ecuación que nos dan está en forma ordinaria y al observarla podemos decir que:

- El centro de la elipse es el punto C(3 , 1).
- $a^2 = 9$ entonces $a = 3$
- $b^2 = 4$ entonces $b = 2$
- Es una elipse horizontal ya que $a^2$ está debajo del término con $x$.

Con estos datos podemos encontrar el valor del parámetro $c$ usando la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ : $9 = 4 + c^2$, despejando $c^2$ tenemos: $9 – 4 = c^2$

Es decir $c^2 = 5$ entonces $c = \sqrt{5} = 2.23$

Con esta información ya podemos trazar la gráfica de la elipse localizando el centro y con la medida de cada parámetro podemos localizar los 2 vértices, los extremos del eje menor y los 2 focos como se ve en la siguiente figura.

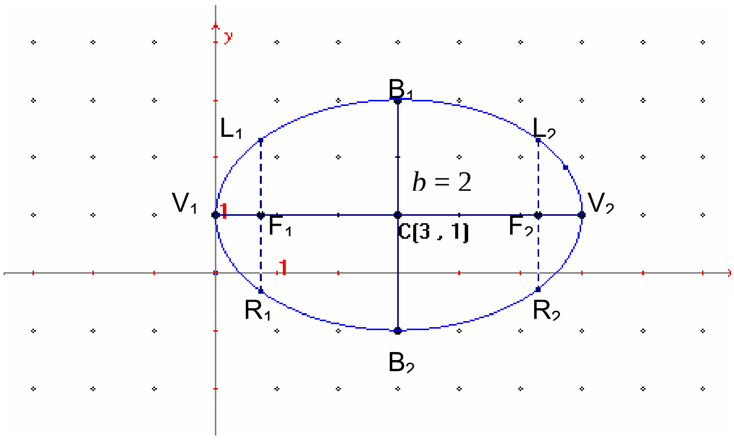



Figura 6

Ya con la gráfica podemos dar todos los elementos que se nos piden, que son:

- Semieje Mayor $a = 3$.
- Semieje Menor $b = 2$.
- $F_1$ $(3 – \sqrt{5}$ , 1), $F_2$ $(3 + \sqrt{5}$ , 1) que es lo mismo que $F_1$ (0.76 , 1) y $F_2$ (5.23 , 1).
- $V_1$ (0 , 1) y $V_2$ (6 , 1).

- $B_1(3\ ,\ 3)$ y $B_2(3\ ,\ -1)$.
- Longitud del lado recto $L_1R_1 = L_2R_2 = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4)}{3} = 2.66$
- Excentricidad $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 0.745$ .

**EJERCICIO 2:**

Una elipse tiene por ecuación $\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-5)^2}{10} = 1$ , encontrar las longitudes de los semiejes mayor ($a$) y menor ($b$), las coordenadas de los focos y de los vértices, la longitud del lado recto y su excentricidad, también trazar su gráfica.

**Solución:**

Procederemos de forma similar al ejercicio anterior.

La ecuación que nos dan también está en forma ordinaria, y al observarla podemos decir que:

- El centro de la elipse es el punto C($-2$ , $5$).
- $a^2 = 25$ entonces $a = 5$
- $b^2 = 10$ entonces $b = \sqrt{10} = 3.16$
- Es una elipse horizontal ya que $a^2$ está debajo del término con $x$.
  Ya observaste que $a^2$ es el valor del número mayor?

Con estos datos podemos encontrar el valor del parámetro $c$ usando la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ : $25 = 10 + c^2$, despejando $c^2$ tenemos: $25 - 10 = c^2$
Es decir $c^2 = 15$ entonces $c = \sqrt{15} = 3.87$

Con esta información ya podemos trazar la gráfica de la elipse localizando el centro y con la medida de cada parámetro podemos localizar los 4 vértices y los 2 focos como se ve en la siguiente figura.

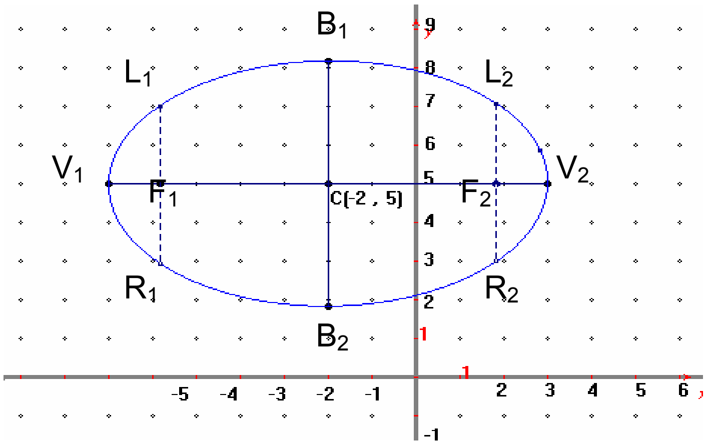



Figura 7

Ya con la gráfica podemos dar todos los elementos que se nos piden, que son:

- Semieje Mayor $a = 5$.
- Semieje Menor $b = \sqrt{10} = 3.16$.
- $F_1$ $(-2-\sqrt{15}, 5)$, $F_2$ $(-2+\sqrt{15}, 5)$ que es lo mismo que $F_1$ $(-5.87, 5)$ y $F_2$ $(1.87, 5)$.
- $V_1$ $(-7, 5)$ y $V_2$ $(3, 5)$.
- $B_1(-2, 8.16)$ y $B_2$ $(-2, 1.83)$.
- Longitud del lado recto $L_1R_1 = L_2R_2 = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(10)}{5} = 4$
- Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0.77$

**EJERCICO 3:**

Una elipse tiene por ecuación $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, encontrar las longitudes de los semiejes mayor $(a)$ y menor $(b)$, las coordenadas de los focos y de los vértices, la longitud del lado recto y su excentricidad, también trazar su gráfica.

**Solución:**

Al observar la ecuación se ve que $h$ y $k$ valen cero, es decir el centro de nuestra elipse es el origen de coordenadas $(0, 0)$, en estos casos es más fácil encontrar los elementos y graficar.

En la ecuación vemos que:

- $a^2$ = 20 entonces $a = \sqrt{20}$ = 4.47
- $b^2$ = 5 entonces $b = \sqrt{5}$ = 2.23
- $c^2$ = 20 – 5 = 15 entonces $c = \sqrt{15}$
- También es una elipse horizontal.

En un plano cartesiano graficamos deduciendo cada uno de sus elementos como se ve en la figura.

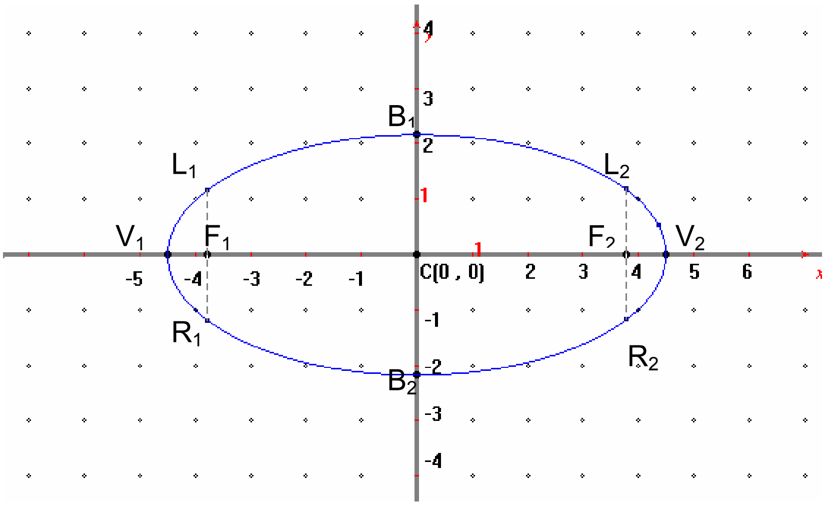



Figura 8

Con la ayuda de la gráfica podemos ver que sus elementos son:

- Semieje Mayor $a = \sqrt{20}$ .= 4.47
- Semieje Menor $b = \sqrt{5}$ = 2.23
- $F_1$ $(-\sqrt{15}$ , 0), $F_2$ $(\sqrt{15}$ , 0) que es lo mismo que $F_1$ (– 3.87 , 0) y $F_2$ (3.87 , 0).
- $V_1$ (–4.47 , 0) y $V_2$ (4.47 , 0).
- $B_1$(0 , 2.23) y $B_2$ (0 , –2.23).
- Longitud del lado recto $L_1R_1 = L_2R_2 = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(5)}{\sqrt{20}}$ = 2.23
- Excentricidad $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$ = 0.86 que nos dice que es más alargada que las anteriores.

Esto último lo observarás si las trazas con la misma escala en tu cuaderno.

**EJERCICIO 4:**

Encontrar la ecuación en forma ordinaria y trazar la gráfica de la elipse horizontal con centro C(1 , –1), el valor del semieje mayor $a$ = 6 y el del semieje menor $b$ = 2.

**Solución:**

Lo primero que tenemos que hacer es trazar los elementos que nos dan en un plano cartesiano y tendremos de inmediato la idea de cómo es la elipse, trata de hacerlo en tu cuaderno y después compara tu figura con la figura 9.

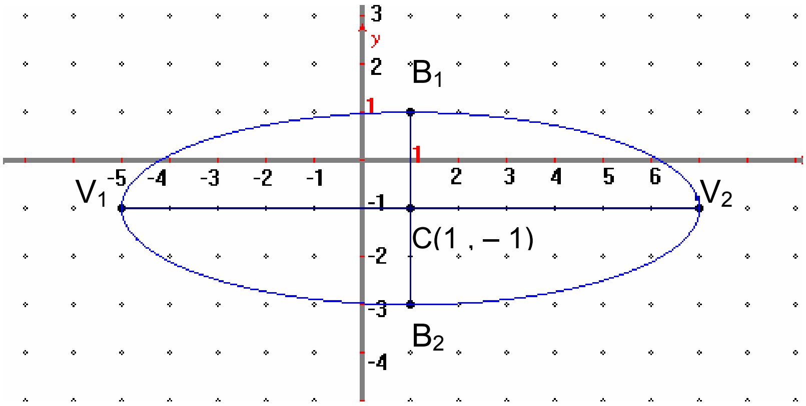



Figura 9

Como la elipse es horizontal vamos a utilizar la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}$ = 1

En la cual sólo tenemos que sustituir los valores de $h$, $k$, $a$ y $b$, y nos queda de la siguiente forma: $\frac{(x-1)^2}{6^2}+\frac{(y--1)^2}{2^2}$ = 1 que es lo mismo que:

$$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

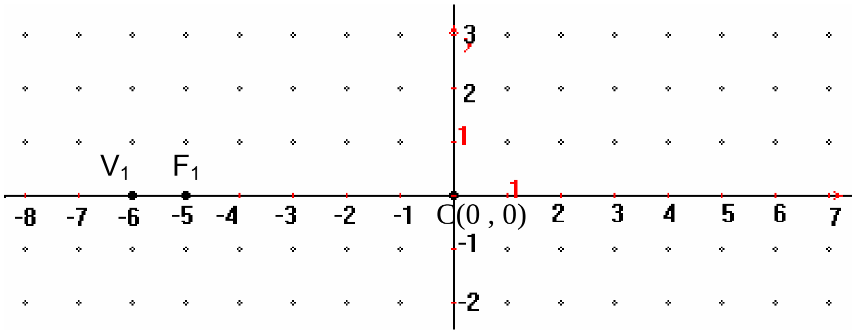
Es la ecuación de la elipse pedida en forma ordinaria.

**EJERCICIO 5:**

Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen, un vértice en (–6 ,0) y un foco en (–5 , 0), trazar su gráfica.

**Solución:**

De nuevo te recomendamos que en un plano coloques los datos que nos dan, ya que al visualizarlos de inmediato te das idea de los elementos que necesitas para escribir la ecuación.




Como lo ves en la figura, el vértice y el foco están sobre el eje de las $X$'s, de esto se deduce que la elipse es horizontal, y como el centro es el origen vamos a utilizar la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ = 1.

De la cual ya sabemos que $a$ = 6, nos falta saber el valor de $b$.

Encontremos el valor de $b$: un foco es (–5 , 0) y observando la figura 10, $c$ = 5.

Sustituimos los valores de $a$ y $c$, en la expresión $a^2 = b^2 + c^2$

$$6^2 = b^2 + 5^2$$

Despejando $b$ tenemos: $36 - 25 = b^2$

$$b^2 = 11$$

$$b = \sqrt{11} = 3.31$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación ordinaria: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}$ = 1

Que será la ecuación pedida.

Si observas tu trazo podrás encontrar todos los demás elementos de la elipse y su gráfica te debe de quedar como en la siguiente figura.

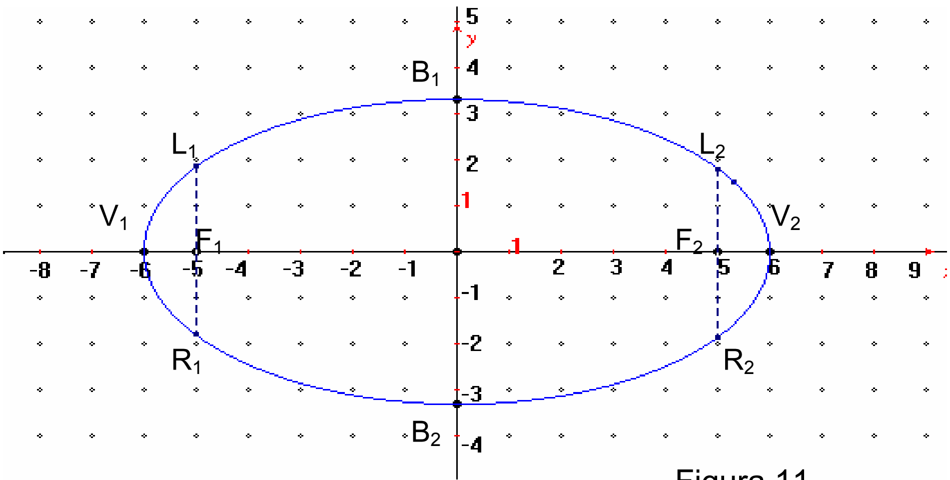



Figura 11

**EJERCICIO 6:**

Hallar la ecuación y trazar la gráfica de la elipse con centro en el origen, un vértice en (– 7 , 0) y excentricidad igual a ⅔.

**Solución:**

Si el centro de la elipse es el origen y un vértice está en (– 7 , 0) entonces el valor de $a = 7$ y su ecuación será de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Así que sólo nos falta saber el valor del parámetro $b$, que lo encontraremos usando la expresión $a^2 = b^2 + c^2$ , pero para esto necesitamos saber el valor del parámetro $c$ que con los datos que nos dan podemos conocerlo.

Con el dato de la excentricidad podemos encontrar el valor de $c$, ya que la excentricidad se calcula con $e = \frac{c}{a}$ , sustituimos lo que conocemos y tenemos:

$$\tfrac{2}{3} = \frac{c}{7}$$

Despejando a $c$ resulta: $7(\tfrac{2}{3}) = c$

$$c = \frac{14}{3} = 4.66$$

Conociendo el valor de $a$ y de $c$ sustituimos en la expresión $a^2 = b^2 + c^2$ y resulta:

$$7^2 = b^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^2$$

$$49 - \frac{196}{9} = b^2$$

$$b^2 = \frac{245}{9}$$

Ahora sustituimos en la forma ordinaria y tenemos:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{\frac{245}{9}} = 1$$

Que es lo mismo que: $\frac{x^2}{49} + \frac{9y^2}{245} = 1$ que es la ecuación de la elipse.

Conociendo los parámetros es fácil trazar la gráfica en un plano cartesiano y de la gráfica puedes dar todos sus demás elementos.

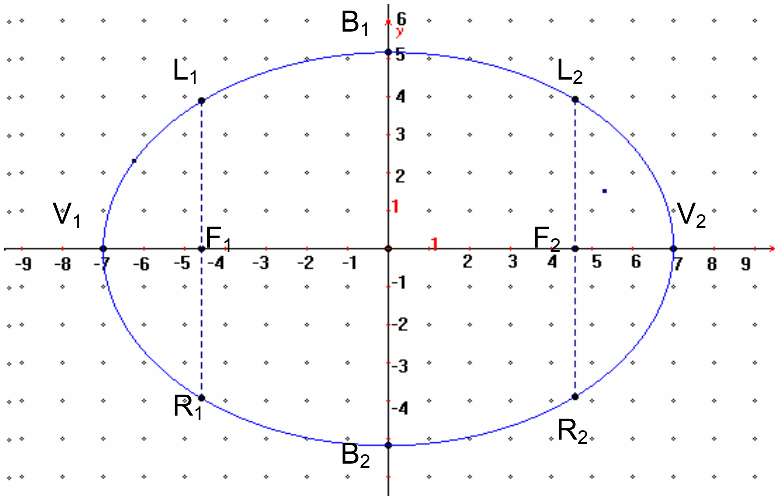



Figura 12

**EJERCICIOS 4.2**

I. Dadas las ecuaciones en forma ordinaria de las siguientes elipses, encontrar todos sus elementos y trazar sus gráficas.

1) $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{4} = 1$

2) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{1} = 1$

3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$

4) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9} = 1$

5) $\frac{x^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{5} = 1$

II. Obtener la ecuación en su forma ordinaria de las elipses horizontales que cumplen las siguientes condiciones y trazar sus gráficas.

6) Centro en el origen, $a$ = 5, $b = \sqrt{2}$ .

7) Centro en (2 , – 3), $a$ = $\sqrt{7}$ , $b$ = $\sqrt{3}$

8) Centro en (–3 , –2), el eje mayor mide 10 unidades y el eje menor mide 6 unidades.

9) Focos en (6 , –3) y en (–2 , –3), el eje mayor mide 12 unidades.

10) Vértices en (–5 , 2) y (3 , 2), focos en (–4 , 2) y (2 , 2).

## 4.3 ELIPSE CON EJE MAYOR VERTICAL

De igual forma que para la elipse horizontal, usando la definición de elipse con sus respectivas operaciones y cálculos necesarios se llega a la ecuación en forma ordinaria de la **elipse vertical** con centro en $(h , k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Donde $a$ y $b$ son los parámetros antes mencionados, en este caso observa que $a^2$ está debajo del término con $y$.

Si el centro de la elipse fuera el Origen de coordenadas esta ecuación se convierte en: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$ ya que $h = 0$ y $k = 0$.

Resolvamos algunos ejercicios de elipses verticales como los siguientes:

**EJERCICIO 7:**

Una elipse tiene por ecuación $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{36} = 1$, encontrar las longitudes de los semiejes mayor($a$) y menor ($b$), las coordenadas de los focos y de los vértices, la longitud del lado recto y su excentricidad, también trazar su gráfica.

**Solución:**

Lo primero que debes observar son los parámetros de la ecuación, en este caso son 4 y 36, de los cuales el mayor debe de ser de $a^2$ y está debajo del término con $y$ entonces se deduce que la elipse tiene su eje mayor vertical.

Este análisis es muy importante para colocarlos en un plano cartesiano como se muestra en la figura 13.

De la ecuación se deduce que su Centro es (2 , – 1)

Los parámetros $a^2 = 36$ entonces $a = 6$

$b^2 = 4$ entonces $b = 2$

Para encontrar el valor de $c$ se sustituye en la expresión:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$36 = 4 + c^2$$
$$36 - 4 = c^2$$
$$c^2 = 32$$
$$c = \sqrt{32}$$
$$c = 5.65$$

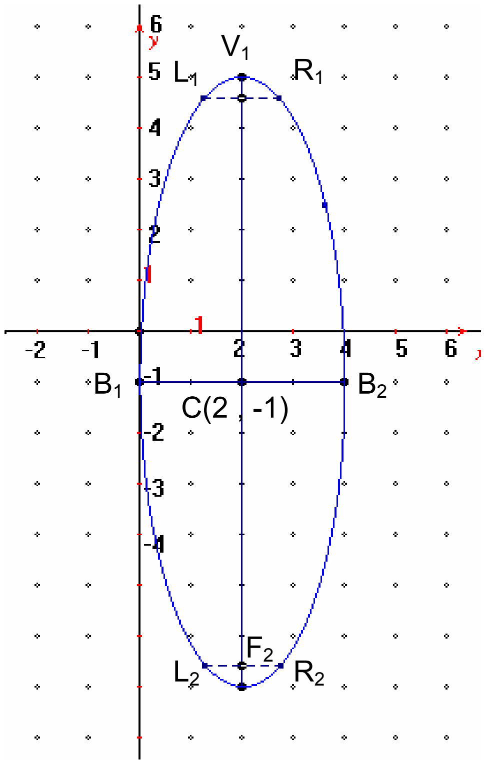



Figura 13

Ya con la gráfica podemos dar todos los elementos que nos piden, que son:

- Semieje Mayor $a = 6$.
- Semieje Menor $b = 2$.
- $V_1 (2 \ , \ 5)$ y $V_2 (2 \ , -7)$.
- $B_1(0 \ , \ -1)$ y $B_2 (4 \ , \ -1)$.
- $F_1(2 \ , -1 + \sqrt{32}\,)$, $F_2(2 \ , -1 - \sqrt{32}\,)$ que es lo mismo que $F_1(2 \ , 4.65)$ y $F_2(2 \ , \ -6.65)$.
- Longitud del lado recto $L_1R_1 = L_2R_2 = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{6} = 1.333$
- Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{32}}{6} = 0.94$

**EJERCICIO 8:**

Una elipse tiene por ecuación $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{40} = 1$, encontrar las longitudes de los semiejes mayor ($a$) y menor ($b$), las coordenadas de los focos y de los vértices, la longitud del lado recto y su excentricidad, también trazar su gráfica.

**Solución:**

Al observar la ecuación se ve que $h$ y $k$ valen cero, es decir el centro de nuestra elipse es el origen de coordenadas (0 , 0), como ya lo dijimos estos casos son más fáciles de encontrar sus elementos y de graficar.

En la ecuación vemos que:

- $a^2$ = 40 entonces $a = \sqrt{40}$ = 6.32
- $b^2$ = 2 entonces $b = \sqrt{2}$ = 1.41
- Es una elipse vertical, observa que el número mayor está debajo del término donde está la $y$.

Con estos datos podemos encontrar el valor del parámetro $c$ usando la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ sustituyendo tenemos $40 = 2 + c^2$, despejando $c^2$ resulta: $40 – 2 = c^2$

Es decir $c^2 = 38$ entonces $c = \sqrt{38} = 6.16$

En un plano cartesiano graficamos deduciendo cada uno de sus elementos como se ve en la figura.

- Semieje Mayor $a = \sqrt{40} .= 6.32$
- Semieje Menor $b = \sqrt{2} = 1.41$
- $F_1$ ($\sqrt{38}$ , 0), $F_2$ ($-\sqrt{38}$ , 0) que es lo mismo que $F_1$ (6.16 , 0) y $F_2$ (–6.16 , 0).
- $V_1$ (0 , $\sqrt{40}$) y $V_2$ (0 , $-\sqrt{40}$).
- $B_1$ ($-\sqrt{2}$ , 0), $B_2$ ($\sqrt{2}$ , 0) que es lo mismo que $B_1$ (– 1.41 , 0) y $B_2$ (1.41 , 0).

$$LR = \frac{2(2)}{\sqrt{40}} = 0.63$$

$e = 0.97$

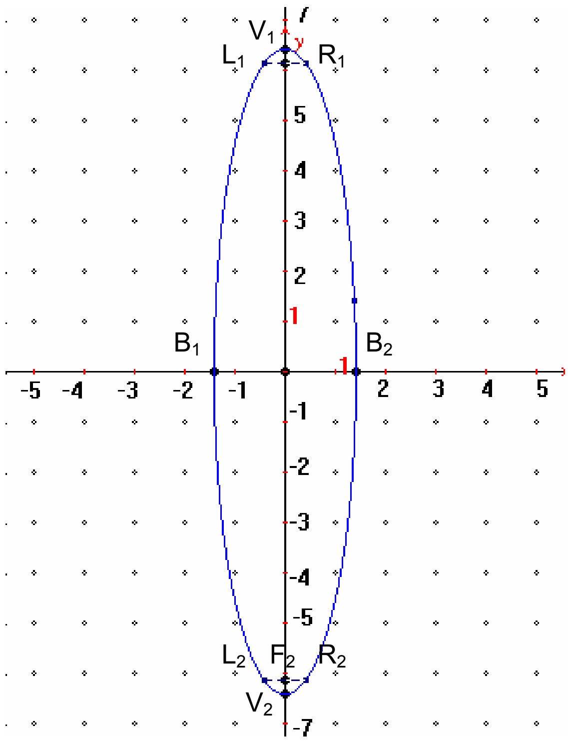



Figura 14

**EJERCICIO 9:**

Hallar la ecuación y trazar la gráfica de la elipse con centro en el origen, un foco en (0 , – 7) y excentricidad igual a $\frac{3}{8}$.

**Solución:**

Como la elipse tiene centro en el origen y la abscisa del foco dado es cero, entonces se trata de una elipse con eje focal sobre el eje $Y$, y su parámetro $c = 7$, y la ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

El otro dato que nos dan es la excentricidad de la elipse que es $\frac{3}{8}$, recordando la expresión que la representa $e = \dfrac{c}{a}$ sustituyendo tenemos $\dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{a}$

Despejando $a$: $3a = 7(8)$

$$a = \frac{56}{3} = 18.66$$

Nos falta encontrar el valor del parámetro b que lo encontraremos usando la expresión $a^2 = b^2 + c^2$ , sustituyendo los valores de $a$ y $c$:

$$\left(\frac{56}{3}\right)^2 = b^2 + 7^2$$

Despejando $b$: $\dfrac{3136}{9} - 49 = b^2$

$$b^2 = \frac{3136}{9} - \frac{441}{9} = \frac{2695}{9}$$

$$b = \sqrt{\frac{2695}{9}} = 17.3$$

Sustituyendo en la ecuación $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ tenemos: $\dfrac{x^2}{\frac{2695}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{3136}{9}} = 1$

Que es lo mismo que: $\dfrac{9x^2}{2695} + \dfrac{9y^2}{3136} = 1$ es la ecuación pedida.

En un plano cartesiano trazamos los datos que tenemos y poco a poco vamos deduciendo los demás elementos para trazar la gráfica que queda como en la figura 15.

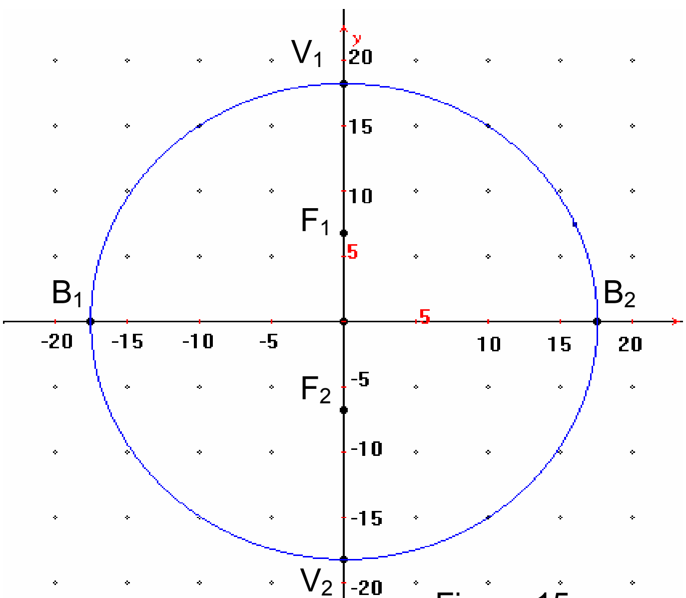


Figura 15

**EJERCICIOS 4.3**

I. Dadas las ecuaciones en forma ordinaria de las siguientes elipses, encontrar todos sus elementos y trazar sus gráficas.

1) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{36}$ = 1

2) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{49}$ = 1

3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36}$ = 1

4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$ = 1

5) $\frac{(x-2)^2}{12} + \frac{y^2}{16}$ = 1

II. Obtener la ecuación en su forma ordinaria de las elipses verticales que cumplen las siguientes condiciones y trazar sus gráficas.

6) Centro en el origen, eje mayor sobre el eje Y, $a = 5$, $b = \sqrt{2}$

7) Centro en el origen, longitud del lado recto $\frac{16}{3}$ y un extremo del eje menor en (4 , 0).

8) Centro en (4 , –2), el eje mayor vertical de 8 unidades y el eje menor de 4.

9) Centro en (–1 , 2), un vértice en (–1 , 8) y un foco en (–1 , –3).

10) Vértices en (–1 , 1) y (–1 , –9), focos en (–1 , –1) y (–1 , –7).

## 4.4 ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

La ecuación general de la elipse surge al quitar denominadores, desarrollando los binomios al cuadrado y efectuando los productos y simplificaciones necesarias en cada una de las ecuaciones en forma ordinaria, es decir en $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}$ = 1 si la elipse es horizontal o en $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}$ = 1 si la elipse es vertical; y en cualquier caso se obtiene la ecuación en forma general que es: $\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Donde $A \neq C$ y ambos del mismo signo.

Para encontrar los elementos de la elipse y trazar su gráfica, tenemos que **reducir la forma general** a la **forma ordinaria** como se muestra en los siguientes ejercicios.

**EJERCICIO 10:**

Encontrar la ecuación en la forma ordinaria, su centro, las longitudes de los semiejes mayor($a$) y menor ($b$), las coordenadas de los focos y de los vértices, la longitud del lado recto y la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y - 311 = 0$. También trazar su gráfica.

**Solución:**

1º) Agrupamos los términos con $x$ y los términos con $y$, y el término independiente lo escribimos en el lado derecho de la igualdad:

$$16x^2 - 64x + 25y^2 + 50y = 311$$

2º) Factorizamos el coeficiente de $x^2$ como factor común de los dos primeros términos, y también factorizamos el coeficiente de $y^2$ como factor común de los términos con $y$ y tenemos: $16(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) = 311$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos dentro de los paréntesis tanto para $x$ como para $y$:

$$16(x^2 - 4x + (-2)^2) + 25(y^2 + 2y + (1^2)) = 311 + 16(-2)^2 + 25(1^2)$$

Observa que lo que se le suma al lado izquierdo también se le debe de sumar al lado derecho de la igualdad, sin olvidar que en el lado izquierdo $(-2)^2$ esta multiplicado por 16 y $(1^2)$ esta multiplicado por 25, no olvides hacerlo también del lado derecho.

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio, y se realizan las operaciones del lado derecho.

$$16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 311 + 64 + 25$$
$$16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$$

5º) Como en la ecuación ordinaria del lado derecho tenemos 1, para obtenerlo dividimos ambos lados de la ecuación entre 400 y tenemos:

$$\frac{16(x-2)^2}{400} + \frac{25(y+1)^2}{400} = 1$$

6º) Simplificamos en cada fracción cada coeficiente, en la fracción donde está $x$ sacamos 16ª , y en la fracción donde está $y$ sacamos 25ª y tenemos:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Que es la ecuación de la misma elipse pero en su forma ordinaria, en esta forma podemos ver claramente que su centro es (2 , – 1) y el valor de sus parámetros son: $a^2 = 25$ entonces $a = 5$, y $b^2 = 16$ entonces $b = 4$.

Como el número mayor esta debajo del término con $x$ deducimos que es una elipse horizontal.

Ya conociendo dos de sus parámetros podemos encontrar el valor del tercero que es $c$ usando la expresión $a^2 = b^2 + c^2$ .

Sustituyendo los valores de $a$ y $b$ se tiene: $25 = 16 + c^2$

Despejando a $c$ : $25 - 16 = c^2$

$$c^2 = 9$$
$$c = 3$$

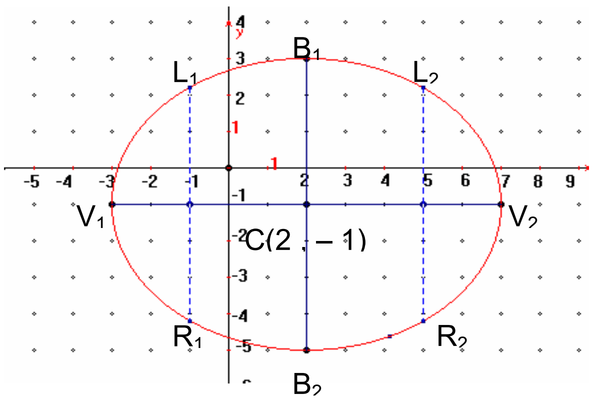



Figura 16

Estos datos nos sirven para trazar su gráfica como se ve en la figura 16, y así dar los elementos que se nos pide en este ejercicio que son:

Centro: C(2 , – 1); $a = 5$; $b = 4$; $F_1(-1, -1)$ y $F_2(5, -1)$; $V_1(-3, -1)$ y $V_2(7, -1)$; $B_1(2, 3)$ y $B_2(2, -5)$; lado recto LR = 6 y excentricidad $e = 0.6$

**EJERCICIO 11:**

Cambia las siguiente ecuación a la forma ordinaria y traza su curva.

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y - 13 = 0$$

**Solución:**

1º) Escribimos el término independiente en el lado derecho de la igualdad:

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y = 13$$

2º) Completamos cuadrados tanto para $x$ como para $y$.

Los términos que tenemos que sumar en ambos lados de la ecuación, son los cuadrados de la mitad del coeficiente de $x$ y la mitad del coeficiente de $y$, que en este caso son $(8/2)^2 = 4^2 = 16$ y $(4/2)^2 = 2^2 = 4$ y nos queda:

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) = 13 + 16 + 4$$

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) = 33$$

3º) Los términos entre paréntesis forman un trinomio cuadrado perfecto, uno en $x$ y otro en $y$, que los podemos escribir como binomios al cuadrado:

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 33$$

4º) Dividiendo ambos lados de la igualdad entre 33 para tener 1 en el lado derecho: $\dfrac{(x+4)^2}{33} + \dfrac{(y+2)^2}{33} = 1$

Deducimos que esta ecuación representa una circunferencia ya que nos queda que los valores de los parámetros $a$ y $b$ son iguales, es decir, el eje mayor y el eje menor son iguales así que nuestra ecuación se reduce a la circunferencia de radio $r = \sqrt{33}$ y centro en C (– 4 , –2), como se ve en la figura.

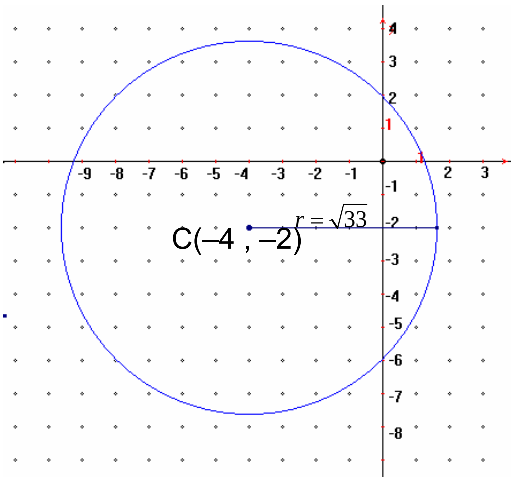



Figura 17

**EJERCICIO 12:**

Cambia las siguiente ecuación a la forma ordinaria, traza su curva y encuentra sus elementos.

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$$

**Solución:**

1º) Agrupamos los términos en $x$ y en $y$:

$$9x^2 - 36x + 4y^2 + 24y = -36$$

2º) Factorizamos para poder completar los trinomios cuadrados perfectos:

$$9[x^2 - 4x\,] + 4[y^2 + 6y] = -36$$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos dentro de cada paréntesis sumando de ambos lados; $9(-4/2)^2 = 9(-2)^2 = 36$ y $4(6/2)^2 = 4(3)^2 = 36$

$$9[x^2 - 4x + (2^2\,)] + 4[y^2 + 6y + (3^2\,)] = -36 + 9(4) + 4(9) = 36$$

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto que se encuentra entre los corchetes como binomios al cuadrado y tenemos:

$$9(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 36$$

5º) Dividimos entre 36 para tener 1 del lado derecho y simplificamos cada fracción:

$$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y+3)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

En esta forma es fácil ver que nos representa una **elipse vertical**, ya que el denominador más grande que es 9 se encuentra con los términos de $y$.

También podemos deducir que el centro es C(2, –3); $a^2 = 9$ entonces $a = 3$; $b^2 = 4$ entonces $b = 2$.

Para trazar su gráfica localizamos el centro C(2, –3).

Como $a = 3$, subimos 3 y bajamos 3 encontrando así los vértices de la elipse $V_1(2, 0)$ y $V_2(2, -6)$.

Como $b = 2$, nos colocamos en el centro y nos desplazamos 2 hacia la izquierda y 2 hacia la derecha encontrando los extremos del eje menor $B_1(0, -3)$ y $B_2(4, -3)$.

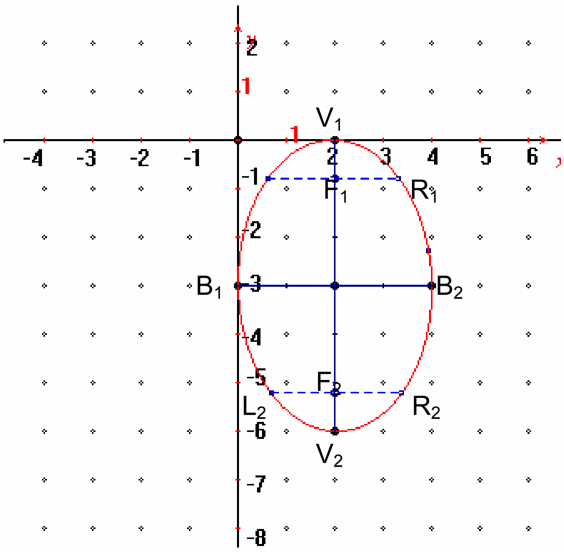



Figura 18

Para los focos se necesita el valor de $c$, pero sabemos que $a^2 = c^2 + b^2$, así que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} = 2.236$, nuevamente nos colocamos en el centro y subimos $2.236$ y bajamos $2.236$, por lo que los focos se encuentran en:

$F_1(2 , -0.764)$ y $F_2(2 , -5.236)$.

El ancho focal es: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3}$ =$2.6667$, para trazar sus extremos lo dividimos entre 2 y tenemos: $1.3333$, así que ahora nos colocamos en los focos y nos desplazamos $1.33$ hacia la izquierda y $1.33$ hacia la derecha encontrando los extremos de los dos anchos focales:

$L_1(0.66, -0.764)$ y $R_1(3.33, -0.764)$; $L_2(0.66, -5.236)$ y $R_2(3.33. -5.236)$

**EJERCICIO 13:**

Encontrar la ecuación en la forma ordinaria, su centro, las longitudes de los semiejes mayor($a$) y menor ($b$), las coordenadas de los focos, de los vértices y las de los extremos de los lados rectos, así como su longitud y la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $15x^2 + 3y^2 - 45 = 0$. También trazar su gráfica.

**Solución:**

1º) En este caso como no hay términos lineales ni en $x$ ni en $y$, sólo escribimos el término independiente del lado derecho y dividimos a toda la ecuación entre 45: $15x^2 + 3y^2 = 45$

$$\frac{15x^2}{45} + \frac{3y^2}{45} = \frac{45}{45}$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{15} = 1$$

Estando la ecuación en forma ordinaria podemos decir que su centro es (0 , 0), y como el número mayor esta debajo del término con $y$ deducimos que es una **elipse vertical**.

Sus parámetros son: $a^2 = 15$ entonces $a = \sqrt{15} = 3.87$, y $b^2 = 3$ entonces $b = \sqrt{3} = 1.73$

Usando la expresión $a^2 = b^2 + c^2$ para encontrar el valor de $c$ se tiene:

$$15 = 3 + c^2$$

$$15 - 3 = c^2 \quad \text{entonces} \quad c = \sqrt{12} = 3.46$$

Estos datos nos sirven para trazar su gráfica como se ve en la figura 19, y así dar los elementos que se nos pide en este ejercicio que son los siguientes:

Centro: C(0 , 0); $a = \sqrt{15}$; $b = \sqrt{3}$

$F_1(0 , 3.46)$ y $F_2(0 , -3.46)$

$V_1(0 , 3.87)$ y $V_2(0 , -3.87)$

$B_1(-1.73 , 0)$ y $B_2(1.73 , 0)$;

LR = 1.54

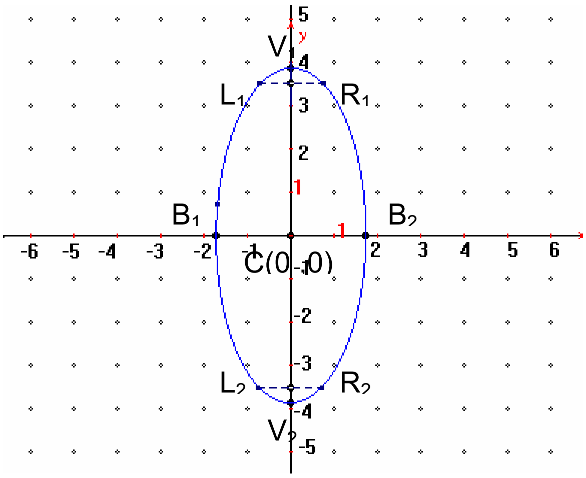



Figura 19

$L_1(-0.77 , 3.46)$ $R_1(0.77 , 3.46)$; $L_2(-0.77 , -3.46)$ $R_2(0.77 , -3.46)$; y $e = 0.89$

**EJERCICIO 14:**

Encontrar la ecuación en la forma ordinaria, su centro, las longitudes de los semiejes mayor($a$) y menor ($b$), las coordenadas de los focos, los vértices y las de los extremos de los lados rectos, así como su longitud y la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $6x^2 + 10y^2 + 30x - 30y = 0$. También trazar su gráfica.

**Solución:**

1º) Agrupamos los términos con $x$ y los términos con $y$, y el término independiente lo escribimos en el lado derecho de la igualdad:

$$6x^2 + 30x + 10y^2 - 30y = 0$$

2º) Factorizamos el coeficiente de $x^2$ como factor común de los dos primeros términos, y también factorizamos el coeficiente de $y^2$ como factor común de los términos con $y$ y tenemos: $6(x^2 + 5x) + 10(y^2 - 3y) = 0$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos dentro de los paréntesis tanto para $x$ como para $y$ sin olvidar que también hay que sumar del lado derecho:

$$6\left(x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 10\left(y^2 - 3y + \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right) = 0 + 6\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 10\left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio, y se realizan las operaciones del lado derecho.

$$6(x + \frac{5}{2})^2 + 10(y - \frac{3}{2})^2 = 6\left(\frac{25}{4}\right) + 10\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$6(x + \frac{5}{2})^2 + 10(y - \frac{3}{2})^2 = \frac{75}{2} + \frac{45}{2}$$

$$6(x + \frac{5}{2})^2 + 10(y - \frac{3}{2})^2 = 60$$

5º) Como en la ecuación ordinaria del lado derecho tenemos 1, para obtenerlo dividimos ambos lados de la ecuación entre 60 y simplificamos el coeficiente en cada fracción:

$$\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{10} + \frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{6} = 1$$

Que es la ecuación de la misma elipse pero en su forma ordinaria, en esta forma podemos ver claramente que su centro es $(-\frac{5}{2} , \frac{3}{2})$ que es lo mismo que (–2.5 , 1.5) y el valor de sus parámetros son: $a^2 = 10$ entonces $a = \sqrt{10}$ 3.16, y $b^2 = 6$ entonces $b = \sqrt{6} = 2.44$

Como el número mayor esta debajo del término con $x$ deducimos que es una **elipse horizontal**.

Ya conociendo dos de sus parámetros podemos encontrar el valor del tercero que es $c$ usando la expresión $a^2 = b^2 + c^2$ .

Sustituyendo los valores de $a$ y $b$ se tiene: $10 = 6 + c^2$

Despejando a $c$ : $10 - 6 = c^2$

$$c^2 = 4$$

$$c = 2$$

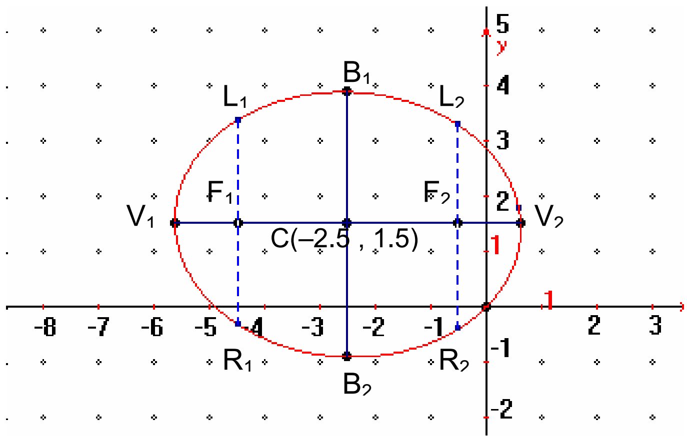



Figura 20

Estos datos nos sirven para trazar su gráfica como se ve en la figura 20, y así dar los elementos que se nos pide en este ejercicio que son los siguientes:

Centro: C(–2.5 , 1.5); $a = \sqrt{10}$ ; $b = \sqrt{6}$ ; $F_1$(–4.5 ,1.5) y $F_2$(–0.5 , 1.5);

$V_1$(–5.66 , 1.5) y $V_2$(0.66 ,1.5); $B_1$(–2.5 , 3.94) y $B_2$(– 2.5 , –0.94);

lado recto LR = 3.79; $L_1$(–4.5 , 3.39) $R_1$(–4.5 , –0.39); $L_2$(–0.5 , 3.39)

$R_2$(–0.5 , –0.39) y excentricidad $e$ = 0.63

**EJERCICIOS 4.4**

Para cada una de las siguientes ecuaciones, encuentra:

a) Coordenadas del centro.
b) Coordenadas de sus vértices.
c) Coordenadas de los extremos del eje menor.
d) Coordenadas de sus focos.
e) Las longitudes de los semiejes mayor y menor.
f) La longitud del lado recto.
g) La excentricidad.
h) Trazar su gráfica.

1) $9x^2 + 25y^2 = 225$

2) $2x^2 + 7y^2 - 14 = 0$

3) $13x^2 + 4y^2 = 52$

4) $25x^2 + 49y^2 = 1225$

5) $9x^2 + y^2 - 54x + 4y + 49 = 0$

6) $x^2 + 6y^2 - 8x - 2 = 0$

7) $3x^2 + 4y^2 - 18x + 32y + 55 = 0$

8) $5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 9 = 0$

9) $36x^2 + 16y^2 - 108x + 16y - 59 = 0$

10) $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

11) $4x^2 + 3y^2 - 32x - 12y + 28 = 0$

12) $12x^2 + 7y^2 - 72x + 14 = 0$

## 4.5 MÁS EJERCIOS DE LA ELIPSE

Analicemos algunos ejercicios mas que complementaran los ya vistos, además ampliaras tus conocimientos sobre la Elipse. Y si te han quedado algunas dudas esperamos que con estos ejercicios puedas superarlas.

**1)** Dar la ecuación en forma general de la elipse con centro en el origen y cuya longitud del eje mayor es 6 y la del eje menor es 4, y sus focos se encuentran sobre el eje $X$.

**Solución:**

Como sus focos se encuentran sobre el eje $X$, la elipse es horizontal; la longitud del eje mayor es 6 por lo que $a$ = 3; la longitud del eje menor es 4, así que $b$ = 2; la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

la ecuación en su forma ordinaria de la elipse que cumple con las condiciones dadas es: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ es equivalente a $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

para pasarla a su forma general, quitamos los denominadores, multiplicando por (9)(4) ambos lados de la ecuación: $(9)(4)\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right]=1(9)(4)$

Simplificando cada fracción: $4x^2 + 9y^2 = 36$

Restamos 36 de ambos lados, quedando: $\boxed{4x^2 + 9y^2 - 36 = 0}$

Con los datos que se tienen, podemos conocer el valor de $c$, recordando que se cumple el Teorema de Pitágoras, donde la hipotenusa es $a$: $a^2 = c^2 + b^2$, $c=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ = 2.236, localizamos las coordenadas de los focos a partir del centro, nos recorremos 2.236 a la izquierda y 2.236 a la derecha como se muestra en la figura 21.

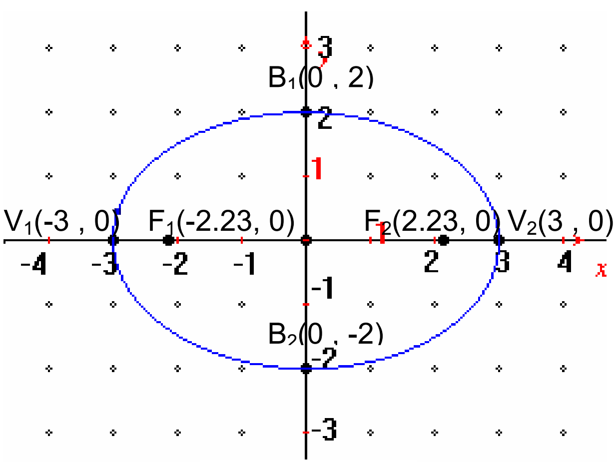



Figura 21

**2)** Encuentra la ecuación en forma general de la elipse que tiene sus focos en (0 , –3) y (0 , 3) y sus vértices son los puntos (0 , –7) y (0, 7).

**Solución:**

Si localizas en el plano los puntos dados te darás cuenta que tanto los focos como los vértices se encuentran sobre el eje $Y$, por lo que la elipse es vertical, y el centro de la elipse es el origen, C(0, 0); el eje mayor tiene una longitud de 14, por lo que $\underline{a = 7}$; la distancia entre los dos focos es 6, entonces $\underline{c = 3}$; con estos datos podemos calcular el valor de $b$ (recordando que: $a^2 = c^2 + b^2$),

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40}\,.$$

La ecuación de una elipse vertical es: $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

Sustituyendo los valores obtenidos nos queda:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{40}\right)^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$$

Así la ecuación ordinaria de la elipse que cumple con las condiciones dadas es: $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

La podemos transformar a su forma general, multiplicando por (49)(40) ambos lados:

$$(49)(40)\ \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{49} = 1(49)(40)$$

$$49x^2 + 40y^2 = 1960$$

restando 1960 de ambos lados nos queda:

$$\boxed{49x^2 + 40y^2 - 1960 = 0}$$

Ecuación en forma general.

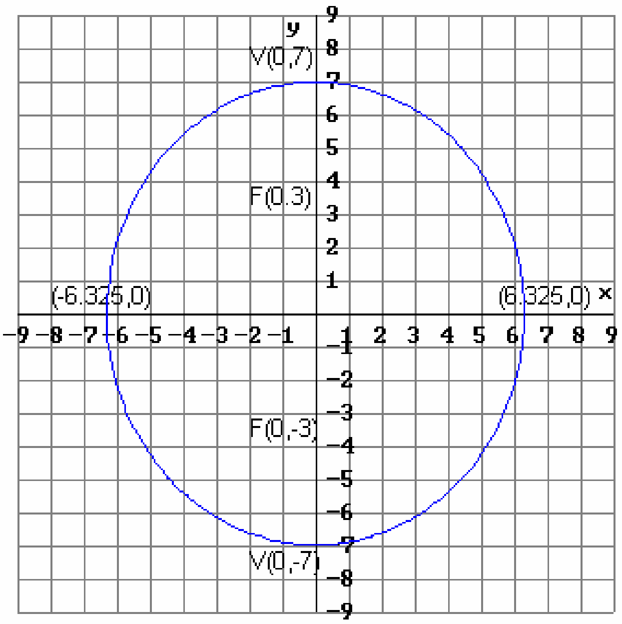



Figura 22

**3)** Encuentra la ecuación de la elipse horizontal que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto (–7, 0) y pasa por el punto $\left(\frac{14}{3}, \sqrt{5}\right)$**.**

**Solución:**

Como la elipse es horizontal la distancia del origen al vértice es 7, así, $\underline{a = 7}$; la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sustituimos el valor de $a^2$, $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Como nos dan un punto por el que pasa, tenemos el valor de $x$ y de $y$, la única incógnita es $b^2$, la despejamos multiplicando por (49)($b^2$) ambos lados

$$49(b^2)\left(\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{b^2}\right)=1(49)(b^2)$$

$$b^2x^2 + 49y^2 = 49b^2$$

restamos $b^2x^2$ de ambos lados: $49y^2 = 49b^2 - b^2x^2$

factorizamos $b^2$ : $49y^2 = b^2(49 - x^2)$

dividimos entre $(49 - x^2)$: $b^2 = \frac{49y^2}{(49-x^2)}$

Sustituimos el punto dado y sacamos raíz cuadrada, tomando la positiva ya que $b$ es una longitud. $b=\sqrt{\frac{49(\sqrt{5})^2}{(49-(14/3)^2)}}=\sqrt{\frac{245}{\frac{9(49)-196}{9}}}$ , $b = 3$

La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$

Y su gráfica queda de la siguiente forma:

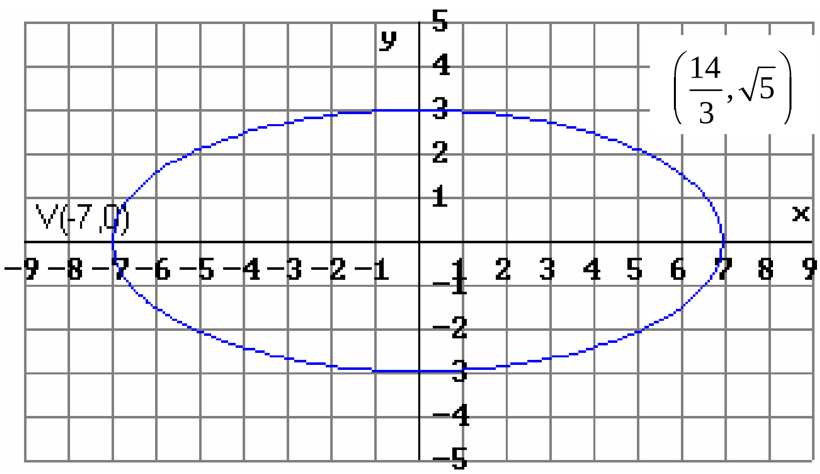



Figura 23

**4)** Si los focos de una elipse son los puntos (–6 , 0) y (6 , 0) y tiene una excentricidad igual a 3/5, encuentra su ecuación en forma general y trázala.

**Solución:**

Si localizas los focos en el plano te darás cuenta de que la elipse es horizontal y que están alejados una distancia de 12 unidades, entonces $c$ = 6; además tiene centro en el origen, $C$(0, 0); como la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ , despejamos $a$ y sustituimos el valor de $c$: $a = \frac{5c}{3} = \frac{5(6)}{3}$ = 10.

También sabemos que: $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2$ = 100 – 36 = 64; $b$ = 8, como la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces la ecuación de la elipse que cumple con las condiciones dadas es:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Para pasarla a la forma general, multiplicamos por (100)(64) ambos lados e igualamos a cero; $64x^2 + 100y^2 - 6400 = 0$

podemos dividir por 4; $16x^2 + 25y^2 - 1600 = 0$ ⟵ Forma General

Para trazar su gráfica localizamos sus vértices:

Extremos del eje mayor: como $a$ = 10, a partir del centro contamos 10 unidades a la izquierda y 10 a la derecha, llegamos a $V_1$(–10 , 0) y $V_2$(10 , 0).

Extremos del eje menor: como $b$ = 8, a partir del centro contamos 8 hacia arriba y 8 hacia abajo, llegamos a $B_1$(0 , 8) y $B_2$(0 , –8).

Localizamos los extremos del ancho focal o lado recto que es $(2b^2/a)$ = 12.8, nos colocamos en cada uno de los focos y subimos 6.4 y luego bajamos 6.4, así que tenemos los puntos:

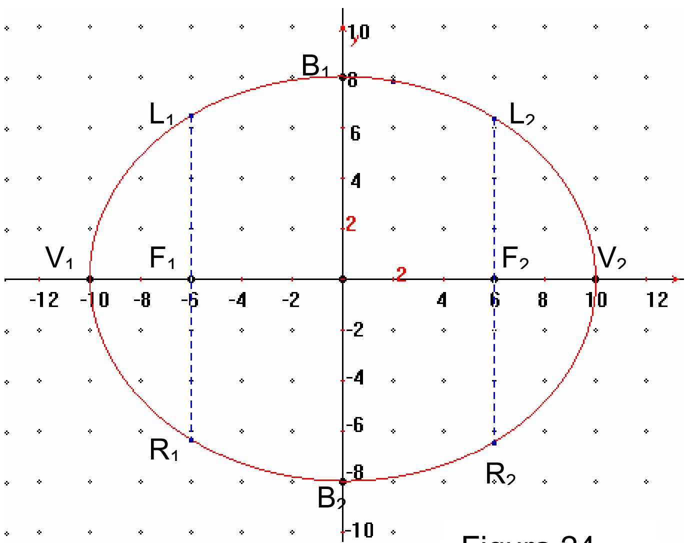



Figura 24

$L_1$(–6 , 6.4) y $R_1$(–6 , –6.4); $L_2$(6 , 6.4) y $R_2$(6 , –6.4)

La gráfica de la elipse que queda como en la figura 24.

**5)** Encuentra la ecuación de la elipse con vértices en (–4, 2) y (10, 2) y cuyo eje menor tiene longitud 10, traza su gráfica.

**Solución:**

Si en un plano localizas los vértices dados veras que el eje mayor es horizontal y su longitud es de 14 unidades, observa que estos puntos tienen la misma ordenada esto nos indica que la elipse es horizontal.

Es decir $2a = 14$, por lo que $a = 7$ entonces $a^2 = 49$; el centro de la elipse se encuentra en el punto medio que es $C(3\ ,\ 2)$; como el eje menor tiene una longitud de 10, $2b = 10$, entonces $b = 5$ y $b^2 = 25$; a partir del centro subimos 5 unidades y llegamos al punto $B_1$ $(3,\ 7)$, bajamos cinco unidades y llegamos a $B_2(3,\ –3)$ que son los extremos del eje menor. Como nos piden su ecuación, esta es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, sustituimos y tenemos la ecuación de la elipse en su forma ordinaria:

$$\frac{(x-3)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$$

para llevarla a su forma general, multiplicamos a toda la ecuación por $(49)(25)=1225$, desarrollamos los binomios e igualamos a cero:

$$25(x^2 – 6x + 9) + 49(y^2 – 4y + 4) = 1225$$

$$25x^2 – 150x + 225 + 49y^2 – 196y + 196 – 1225 = 0$$

La ecuación de la elipse en su forma general es:

$$\boxed{25x^2 + 49y^2 – 150x – 196y – 804 = 0}$$

Su gráfica la puedes completar encontrando las coordenadas de los focos, el ancho focal y los extremos de cada ancho focal para que la puedas delinear lo mejor posible y te quede de la siguiente forma:

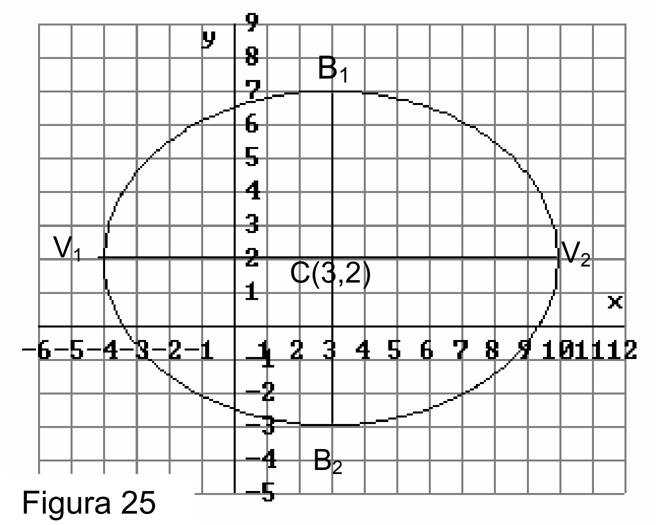



Figura 25

**6)** Escribe la ecuación de la elipse en su forma general si los extremos del eje mayor son los puntos $V_1(-4, 11)$ y $V_2(-4, 3)$ y los extremos del eje menor son los puntos $B_1(-7, 7)$ y $B_2(-1, 7)$.

**Solución:**

Localiza los puntos en el plano y te darás cuenta que la elipse es vertical, ya que el eje mayor es vertical. Como la distancia entre los dos puntos es $8$, entonces $a = 4$ y $a^2 = 16$; el eje menor es horizontal y tiene una longitud de $6$, así que $b = 3$ y $b^2 = 9$, al marcar los dos ejes vemos que se cruzan en el punto medio de ambos y este es el centro de la elipse $C(-4, 7)$ que está formado por la abscisa de los extremos del eje mayor y la ordenada de los extremos del eje menor.

La ecuación que representa a esta elipse es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, ya que como ahora es vertical el cuadrado de la mitad del eje mayor se encuentra en el denominador de los términos en $y$.

Sustituyendo los datos que ya obtuvimos nos queda la ecuación de la elipse en su forma ordinaria como sigue: $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-7)^2}{16}=1$

Vamos a escribirla en su forma general haciendo las operaciones de multiplicarla toda por (9)(16) = 144, se desarrollan los binomios al cuadrado y se iguala a cero:

$$16(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 14y + 49) = 144$$

$$16x^2 + 128x + 256 + 9y^2 - 126y + 441 - 144 = 0$$

$$\boxed{16x^2 + 9y^2 + 128x - 126y + 553 = 0}$$

Esta es la ecuación de la elipse en su forma general que cumple las condiciones dadas en este ejercicio.

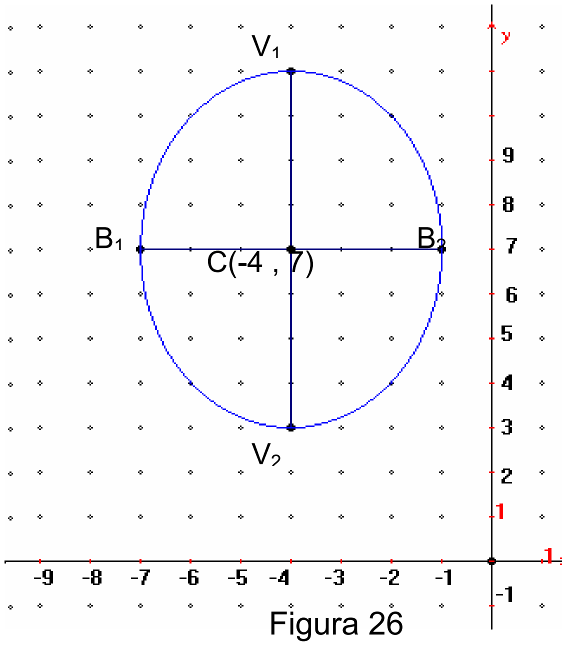


Figura 26

7**)** Los vértices de una elipse son los puntos $V_1(-1, 1)$ y $V_2(7, 1)$ , y su excentricidad es de $\frac{1}{3}$. Hallar su ecuación en forma general, las coordenadas de sus focos, las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

**Solución:**

Localizamos en el plano los vértices dados y observamos que la elipse es horizontal, la longitud del eje mayor es de 8 unidades por lo que $\boldsymbol{a}$ **=** 4 y su centro se encuentra a la mitad de los dos vértices, $C(3, 1)$.

Como nos dan la excentricidad, recordamos que $e = \dfrac{c}{a}$, así que: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{c}{4}$;

despejando a $c$ se tiene $c = \dfrac{4}{3}$ y con estos datos calculamos el valor de $b$, recordando que $a^2 = c^2 + b^2$, al despejar a $b$ debes llegar a:

$$b = \sqrt{4^2 - (4/3)^2} = \sqrt{\frac{128}{9}} = 3.77$$

La ecuación en su forma ordinaria de una elipse horizontal es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

sustituyendo las coordenadas del centro y los valores de $a$ y $b$;

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{128/9}\right)^2} = 1$$

La ecuación de la elipse en su forma ordinaria es: $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{128/9} = 1$

Para localizar las coordenadas de los focos, nos colocamos en el centro y caminamos el valor de $c$ que es $\frac{4}{3}$ a la izquierda y a la derecha, así los focos se encuentran en:

$F_1(3 - \frac{4}{3}, 1)$; $F_1(1.666, 1)$ y

$F_2(3 + \frac{4}{3}, 1)$ o $F_2(4.333, 1)$

La longitud del eje mayor es de 8 unidades y la longitud del eje menor es de:

$$2\sqrt{\frac{128}{9}} = 7.54;$$

La longitud de cada lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(128/9)}{4} = 7.111$$

Como su excentricidad es pequeña la elipse se ve  ovalada, esto es porque cuando los focos se acercan tiende a una circunferencia como se ve en la siguiente figura.

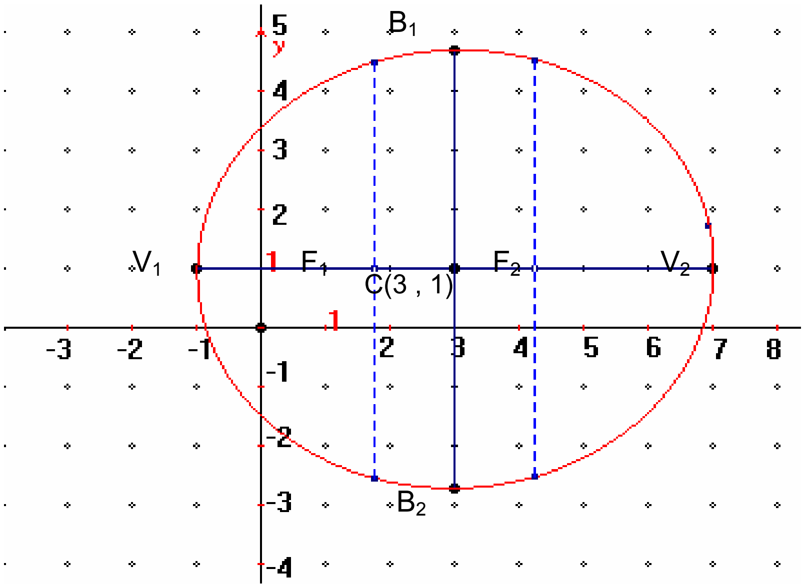



Figura 28

Creemos que ya te diste cuenta de varias cosas que le suceden a la elipse, por ejemplo  que entre más se acercan entre si los focos, la elipse será cada vez más redonda. Y en el caso en que un foco esté sobre el otro tendremos a una circunferencia, o en el caso en que tengas una ecuación en forma ordinaria y resulte que los parámetros $a$ y $b$ sean iguales entonces se trata de la ecuación de una circunferencia como en el caso del ejercicio 11 de la página 26. También la excentricidad nos indica lo ancho o lo angosto de las elipses, ya observaste que si la excentricidad es cercano a 1 es una elipse angosta, pero si la excentricidad es cercana a cero la elipse se hace más redonda casi parecida a una circunferencia.

¿Qué crees que pase si la excentricidad de una elipse es cero?

Antes de empezar el estudio de estos casos, resuelve los siguientes ejercicios.

**EJERCICIOS 4.5**

I) Obtener la ecuación en su forma general de las elipses con las condiciones que se dan a continuación:

a) Centro en el origen, un foco en (0 , – 2) y $e$ = 👌.

b) Centro en el origen, un vértice en (0 , –5) y pasa por el punto (3 , 2).

c) Centro en el origen, un foco en (3 , 0) y la suma de distancia $2a = 10$.

d) Centro en el origen, LR = $\frac{16}{3}$ y un extremo del eje menor en (4 , 0).

e) Centro en el origen, pasa por el punto (3 , 4) y un vértice es (– 6 , 0).

f) Centro en el origen, eje mayor sobre el eje $Y$, y pasa por los puntos (–3 , –4) y (–2 , –6).

g) Centro (–2 , 4), un vértice en (–2 , 9) y un foco en (–2 , 0).

h) Centro(2 , –3), $a = \sqrt{7}$ , $b = \sqrt{3}$, eje menor vertical.

i) Centro (–1 , –2), un vértice (–1 , –6) y LR = 6.

j) Focos en (–3 , 6) y (–3 , –2), $2b = 6$.

k) Centro (–4 , 1), eje mayor vertical de longitud 12, $e$ = □ .

l) Centro (3 , 4), eje mayor paralelo al eje $X$, $e$ = 😐 y pasa por (–1 , 11/5).

m) Centro (1 , 3), eje menor vertical de longitud 8 y $e = 0$.

II) Encuentra la ecuación en su forma ordinaria, coordenadas del centro, de sus vértices, de los extremos del eje menor, de sus focos, las longitudes de los semiejes mayor y menor, la longitud del lado recto y la excentricidad de las siguientes elipses cuyas ecuaciones son:

1) $9x^2 + 36y^2 = 324$

2) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

3) $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$

4) $x^2 + 2y^2 = 2$

5) $x^2$ + ☝$y^2$ $- 15 = 0$

6) $25x^2 + y^2 + 250x - 2y + 601 = 0$

7) $4x^2 + y^2 + 40x - 6y + 45 = 0$

8) $16x^2 + 5y^2 - 10x - 75 = 0$

9) $9x^2 + 17y^2 - 72x - 9 = 0$

10) $11x^2 + 17y^2 + 66x - 102y + 300 = 0$

11) $9x^2 + 6y^2 - 54x + 24y + 51 = 0$

12) $3x^2 + 4y^2 - 42x + 24y + 156 = 0$

## 4.6 DEFINICIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos $(x\ ,\ y)$ del plano que equidistan o se encuentran a la misma distancia de un punto fijo $(h\ ,\ k)$ llamado centro al cual le asignaremos la letra $C$, y a la distancia de cualquier punto sobre la curva a el punto $C$ se le llama radio "$r$".

Lo anterior lo podemos graficar situándonos en cualquier punto sobre el plano $(h\ ,\ k)$ que es $C$, y con un compás a una cierta abertura podemos trazar todos los puntos $(x\ ,\ y)$ que se encuentran a esa misma distancia, como en la figura 29.

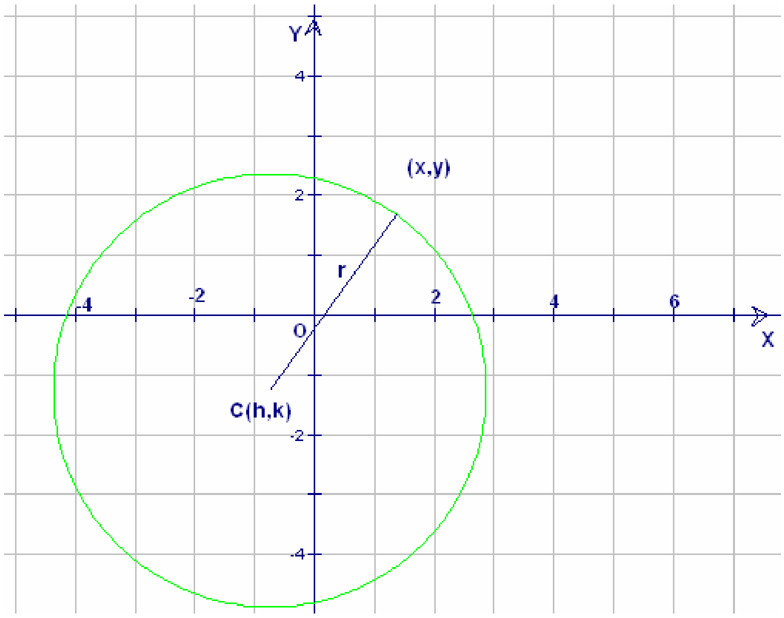



Figura 29

## 4.7 ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN SU FORMA ORDINARIA.

Sabemos por la definición de circunferencia que si P$(x\ ,\ y)$ es cualquier punto sobre la circunferencia, la distancia de P$(x\ ,\ y)$ a $C(h\ ,\ k)$ es igual a "$r$", es decir: $d(\mathrm{P}C) = r$ ; usando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$d(\mathrm{P}C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$ ; para calcular la $d(\mathrm{P}C)$ hacemos $x_1 = h,$ $y_1 = k,$ $x_2 = x$ y $y_2 = y$ al sustituir tenemos: $d(\mathrm{P}C) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

Eliminamos la raíz cuadrada elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2} \longrightarrow \quad (\mathbf{1})$$

Luego entonces, la circunferencia de centro $C(h\ ,\ k)$ y radio $r \geq 0$ es la gráfica de la ecuación (**1**) y recibe el nombre de forma “**ordinaria o canónica**” de la ecuación de una circunferencia.

Si el centro de la circunferencia coincide en el origen de coordenadas, es decir, si $h = 0$ y $k = 0$, al sustituir en la ecuación (**1**) tenemos:

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = r^2$$

$$\boxed{x^2+y^2 = r^2} \longrightarrow \quad (\mathbf{2})$$

Esta es la forma más simple de la ecuación ordinaria y se le conoce como la **ecuación de la circunferencia con centro en el origen**, su gráfica es la siguiente:

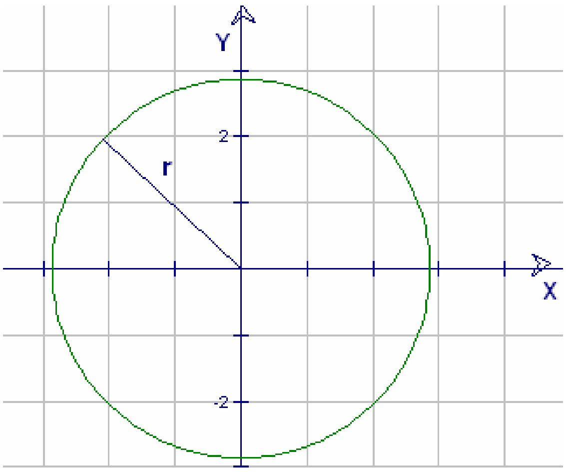



Figura 30

Conociendo el centro y el radio de la circunferencia, podemos encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia y también podemos trazar su gráfica.

**EJEMPLOS 4.7**

Dado el centro y el radio de las siguientes circunferencias hallar en cada caso la ecuación ordinaria y trazar su gráfica.

**1.** El centro es el origen de coordenadas (0 , 0) y su radio es $r = 4$

**Solución.**

Sustituyendo en la ecuación (**2**) ya que el centro es el origen, tenemos:

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 = 16 \longrightarrow \text{ es la ecuación ordinaria}$$

Para hacer la gráfica, al compás le das una abertura de 4 cuadritos de tu cuaderno y con centro (0 , 0) trazas la circunferencia, figura 31.

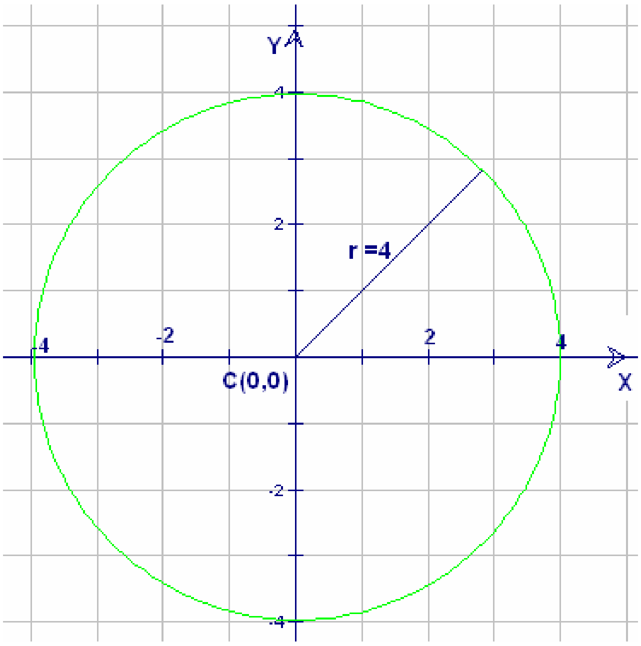



Figura 31

**2.** El centro de la circunferencia es (0 , 0) y su radio $r = \sqrt{10}$

**Solución.**

Sustituyendo en la ecuación (**2**) ya que el centro es el origen, tenemos:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \longrightarrow \text{ es la ecuación ordinaria}$$

Para hacer la gráfica, al compás le das una abertura de $\sqrt{10} = 3.16$ cuadritos de tu cuaderno y con centro (0 , 0) trazas la circunferencia, figura 32.

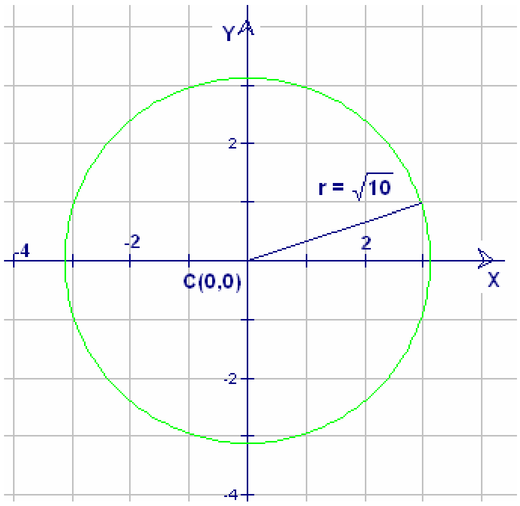



figura 32

**3.** El centro de la circunferencia es el punto (–2, 5) y su radio es $r$ = 6.

**Solución.**

Sustituyendo en la ecuación (**1**) se tiene lo siguiente:

$$(x-(-2))^2+(y-5)^2=6^2$$

$$(x+2)^2+(y-5)^2=36 \longrightarrow$$ es la ecuación ordinaria

Para hacer la gráfica, al compás le das una abertura de 6 cuadritos de tu cuaderno, localizas el centro (–2, 5) y trazas la circunferencia, figura 33.

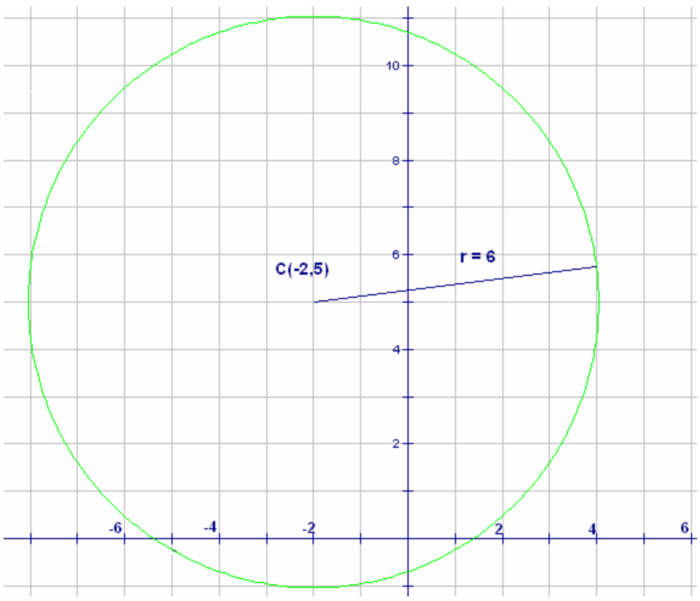



Figura 33

**4.** El centro de la circunferencia es el punto ( $\frac{3}{4}$ , $-\frac{7}{2}$ ) y su radio es $r = \sqrt{20}$ .

**Solución.**

Sustituyendo en la ecuación (**1**) se tiene lo siguiente:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\left(-\frac{7}{2}\right)\right)^2=\left(\sqrt{20}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=20 \longrightarrow$$ es la ecuación ordinaria

Para hacer la gráfica, al compás le das una abertura de $\sqrt{20} =$ 4.47 cuadritos de tu cuaderno, localizas el centro ( $\frac{3}{4}$ , $-\frac{7}{2}$ ) y trazas la circunferencia, figura 34.

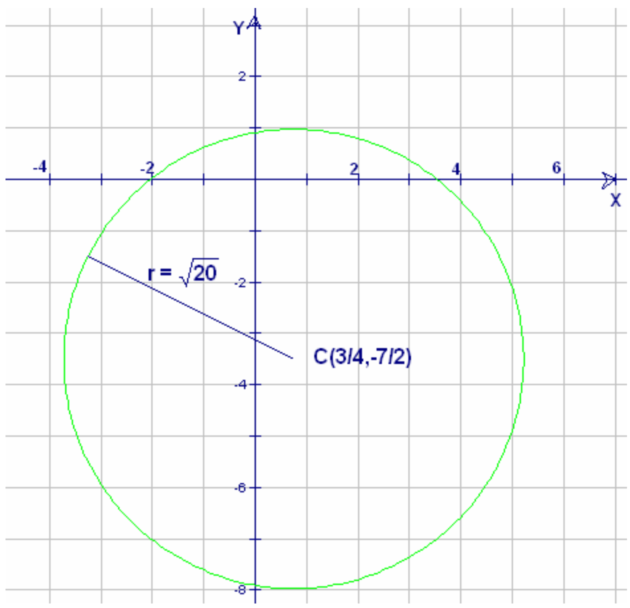



Figura 34

**5.** El centro de la circunferencia es el punto (–5, 0) y su radio es $r = 3$.

**Solución.**

Sustituyendo en la ecuación (**1**) se tiene lo siguiente:

$$(x-(-5))^2+(y-0)^2=3^2$$

$$(x+5)^2+y^2=9 \longrightarrow$$ es la ecuación ordinaria

Para hacer la gráfica, al compás le das una abertura de 3 cuadritos de tu cuaderno, localizas el centro (–5 , 0) y trazas la circunferencia, figura 35.

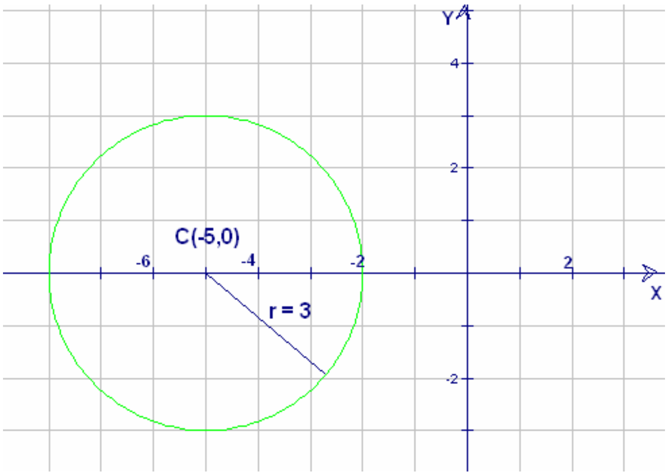



Figura 35

**6.** La circunferencia pasa por el origen de coordenadas, es decir por $O(0 , 0)$ y su centro es el punto $(3 , 4)$.

**Solución.**

En este problema conocemos las coordenadas del centro $C(3, 4)$, pero no sabemos cuanto mide el radio. Con los datos que nos dan podemos calcular la magnitud del radio, ya que nos dicen que esta circunferencia pasa por $O(0, 0)$, y sabemos que $r = d(CO)$, así calculamos la distancia que hay entre $C$ y $O$ como sigue:

$$r = d(CO) = \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

entonces $r = 5$

sustituyendo el centro $C(3, 4)$ y $r = 5$ en la ecuación (**1**) se tiene

$$(x-3)^2+(y-4)^2 = 5^2$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2 = 25 \longrightarrow$$ es la ecuación ordinaria

Para hacer la gráfica, al compás le das una abertura de 5 cuadritos de tu cuaderno, localizas el centro $C(3, 4)$ y trazas la circunferencia, figura 36.

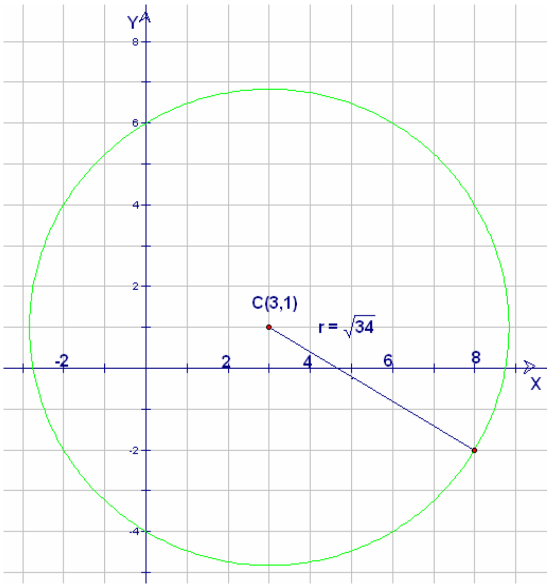



Figura 36

**7.** La circunferencia pasa por el punto A(–2, 4) y su centro es el punto $C(3\ ,\ 1)$, encontrar su ecuación.

**Solución.**

Con los datos que nos dan sabemos las coordenadas del centro, pero no conocemos la magnitud del radio $r$, pero nos dicen que la circunferencia pasa por el punto A(–2, 4), es decir el punto A está sobre la circunferencia y la distancia que hay entre $C$ y A es la magnitud del radio, así que vamos a calcular esta distancia.

$$r = d(C\ \mathrm{A}) = \sqrt{(3-(-2))^2+(1-4)^2} = \sqrt{(3+2)^2+(1-4)^2} = \sqrt{(5)^2+(-3)^2} =$$

$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Entonces el radio $r = \sqrt{34}$ y el centro de la circunferencia es $C(3,\ 1)$, sustituimos en la ecuación (**1**) y tenemos:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{34})^2$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=34$$

Que es la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $C(3,\ 1)$ y que pasa por A(–2, 4).

Para hacer la gráfica, al compás le das una abertura de $\sqrt{34}$ = 5.83 cuadritos de tu cuaderno, localizas el centro $C(3,\ 1)$ y trazas la circunferencia, figura 37.

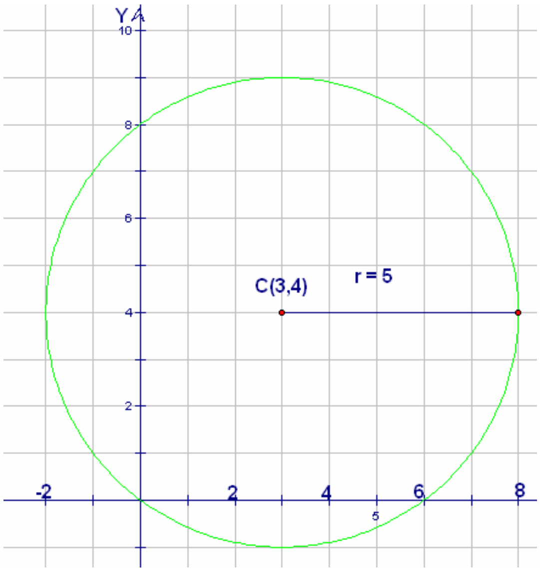



Figura 37

**8.** Los puntos A(4 , 3) y B(–2 , –3) son extremos de uno de los diámetros de la circunferencia, encontrar su ecuación.

**Solución.**

En este ejercicio no nos dicen las coordenadas del centro ni la magnitud de su radio, pero con los datos que nos dan podemos encontrarlos.

Si nos dicen que los puntos A(4 , 3) y B(–2 , –3) son extremos de uno de sus diámetros entonces el punto medio entre A y B será el centro de la circunferencia, que se obtiene utilizando la fórmula del punto medio que es:

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Hacemos $x_1 = 4$, $y_1 = 3$, $x_2 = -2$, $y_2 = -3$ y al sustituir tenemos:

$$C = M_{AB} = \left( \frac{4+(-2)}{2}, \frac{3+(-3)}{2} \right) = \left( \frac{4-2}{2}, \frac{3-3}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{0}{2} \right) = (1,0)$$

Por lo tanto el centro de la circunferencia es el punto $C(1,0)$.

Sabemos que el radio es la distancia del centro a cualquier punto sobre la circunferencia, entonces $r = d(\mathrm{A}C)$ o $r = d(\mathrm{B}C)$ nos debe de dar el mismo resultado, calculemos $d(\mathrm{A}C)$ sustituyendo en la ecuación "distancia entre dos puntos $d(\mathrm{PQ}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ vista en la unidad 2":

$$d(AC) = \sqrt{(1-4)^2+(0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

entonces $r = \sqrt{18}$

Sustituyendo los datos calculados $C(1,0)$ y $r = \sqrt{18}$ en la ecuación (**1**) se obtiene la ecuación pedida como sigue:

$$(x-1)^2+(y-0)^2=(\sqrt{18})^2$$

$$(x-1)^2+y^2=18$$

Para hacer su gráfica, al compás le das una abertura de $\sqrt{18}$ = 4.24 cuadritos de tu cuaderno, localizas el centro $C(1, 0)$ y trazas la circunferencia, figura 38.

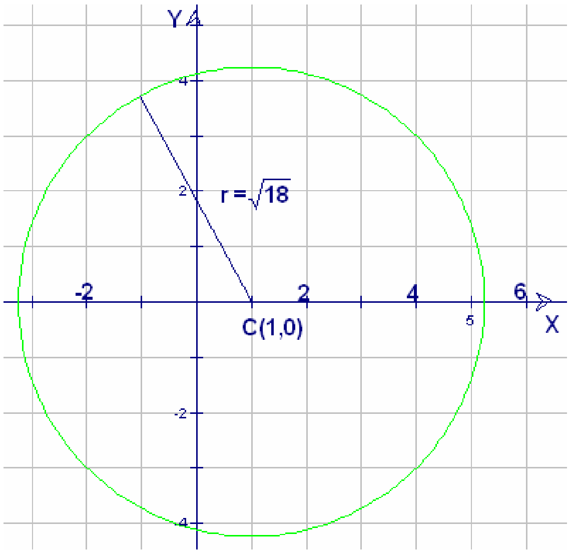



Figura 38

**EJERCICIOS 4.7**

En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria o canónica, y traza su gráfica.

1. Con centro $C(0 , 3)$ y $r = 6$.
2. Con centro $C$ (7 , 0) y $r = \sqrt{15}$
3. Con centro $C$ (–2 , 4) y $r = 3$.
4. Con centro $C$ (5 , –3) y $r = 5$.

5. Con centro $C$ (–9 , 0) y $r$ = 2.
6. Con centro $C$ (–3 , –1) y $r = \sqrt{10}$
7. Con centro $C$ (0 , 0) y $r$ = 4.
8. Con centro $C$ (9/2 , 7/5) y $r = \sqrt{20}$
9. Pasa por el punto A(6 , 8) y su centro es el punto $C$ (2 , 5).
10. Pasa por el punto P(–2 , 5) y su centro es el punto $C$ (–4 , 2).
11. Pasa por el punto Q(0 , –2) y su centro es el punto $C$ (–1 , 2).
12. Los puntos R(–6 , 4) y S (2 , –8) son extremos de uno de sus diámetros.
13. Los puntos P(4 , 3) y Q (6 , –3) son extremos de uno de sus diámetros.
14. Los puntos A(–2 , 4) y B (1 , –1) son extremos de uno de sus diámetros.

**Observación:** Es relativamente fácil escribir la ecuación de una circunferencia si conocemos las coordenadas de su centro $C(h, k)$ y la magnitud de su radio $r$, y además con estos mismos datos es posible dibujar su gráfica.

**4.7.1** OBSERVACIONES SOBRE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN LA FORMA ORDINARIA O CANÓNICA.

- Observa que la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ exhibe claramente las coordenadas del centro de la circunferencia y la longitud del radio.

- Fíjate que la $h$ siempre aparece junto con la $x$, y la $k$ junto con la $y$. Así que para obtener las coordenadas del centro de la circunferencia, sólo tienes que escribir los valores que aparecen en cada binomio cambiándoles el signo.

- Además en el segundo miembro de esta ecuación aparece el radio $r$ elevado al cuadrado, y para obtener su magnitud sólo hay que extraerle raíz cuadrada, y, por lo tanto, se deben discutir tres posibilidades.

- Si $r^2 = 0$; sacando raíz cuadrada de ambos lados tenemos

$$r = \sqrt{0} = 0$$

entonces no hay circunferencia sólo es un punto, que es el centro $C(h, k)$.

- Si $r^2 > 0$; sacando raíz cuadrada de ambos lados tenemos

$$r = \sqrt{r^2}$$

que es un número real positivo y entonces la circunferencia tiene centro $C(h, k)$ y radio $r$.

- Si $r^2 < 0$ quiere decir que $r^2$ es un **número negativo** y al sacar raíz cuadrada de ambos lados, tendríamos que sacar la raíz cuadrada a un número negativo la cuál no existe en los Números Reales, entonces la circunferencia con centro $C(h, k)$ no tendría radio , es decir, no existe circunferencia alguna.

**EJEMPLOS 4.7.1**

**1.** Decir si la ecuación $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 64$ representa a una circunferencia.

**Solución.**

Los valores en los binomios son $-3$ con la $x$ y $-7$ con la $y$, les cambiamos sus signos y entonces el centro sería $C(3, 7)$.

Como $64 = r^2$ y $64 > 0$ entonces sacamos raíz cuadrada de ambos lados y tenemos

$$r = \sqrt{64} = 8 \quad \text{es decir} \quad r = 8$$

Por lo tanto la ecuación dada representa a una circunferencia con radio 8 y centro el punto (3 , 7).

**2.** Decir si la ecuación $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 0$ representa a una circunferencia.

**Solución.**

Los valores en los binomios son –4 con la $x$ y +6 con la $y$, les cambiamos sus signos y entonces el centro sería $C(4, -6)$.

Como $0 = r^2$, entonces $r = 0$ esto quiere decir que no hay circunferencia.

Por lo tanto la ecuación dada **no** representa a una circunferencia sólo es un punto, es el punto (4 , –6).

**3.** Decir si la ecuación $(x-1)^2 + y^2 = -9$ representa a una circunferencia.

**Solución.**

Los valores en los binomios son –1 con la $x$ y con la $y$ no hay número esto quiere decir que la $k = 0$, le cambiamos el signo a –1 y entonces el centro sería $C(1, 0)$.

Como $-9 = r^2$, elevando al cuadrado ambos lados tenemos que $r = \sqrt{-9}$ el cual no es un número real, esto quiere decir que no hay circunferencia.

Por lo tanto la ecuación dada **no** representa a ninguna circunferencia, ni siquiera es un punto.

**EJERCICIOS 4.7.1**

De las siguientes ecuaciones, di cuales representan a una circunferencia, un punto o no representan nada.

1) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$
4) $(x-5)^2 + y^2 = 0$
2) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = -4$
5) $x^2 + (y+3)^2 = -7$
3) $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 0$
6) $(x-8)^2 + y^2 = 0$
7) $(x+4)^2 + (y+7)^2 = 5$
8) $(x+1)^2 + (y-9)^2 = 21$
9) $(x-2)^2 + (y-7)^2 = -9$
10) $x^2 + y^2 = 49$

## 4.8 ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN FORMA GENERAL

La ecuación de la circunferencia en su forma general es aquella en la que tenemos dos términos cuadráticos uno es $x^2$ y el otro $y^2$, dos términos lineales uno con $x$ y el otro con $y$, y además un término independiente, y por último debe de estar igualada a cero; puede faltar el término independiente o el término con $x$ o el término con $y$ o ambos, pero nunca el de $x^2$ ni el de $y^2$.
Así la ecuación de la circunferencia en forma general tiene la siguiente forma:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0} \longrightarrow \quad (\mathbf{3})$$

Donde A y B siempre son iguales, si fueran diferentes la ecuación no representaría a una circunferencia.

Si tenemos la ecuación ordinaria de una circunferencia podemos llevarla a la forma generar, sólo tenemos que desarrollar los binomios al cuadrado, ordenar los términos e igualarla a cero.
Para esto tienes que recordar como se desarrolla el cuadrado de un binomio y es como sigue:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

**EJEMPLOS 4.8**

En los ejemplos **4.7** encontramos varias ecuaciones de circunferencias en su forma ordinaria, pues ahora las llevaremos a su forma general.

**1.** El centro es el origen de coordenadas (0 , 0) y su radio es $r = 4$

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $x^2 + y^2 = 16$, igualamos a cero y tenemos su forma general: $\boxed{x^2 + y^2 - 16 = 0}$

**2.** El centro de la circunferencia es (0 , 0) y su radio $r = \sqrt{10}$

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $x^2 + y^2 = 10$, igualamos a cero y tenemos su forma general: $\boxed{x^2 + y^2 - 10 = 0}$

**3.** El centro de la circunferencia es el punto (–2, 5) y su radio es $r = 6$.

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 36$, desarrollando cada binomio al cuadrado:

$(x + 2)^2 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

$(y - 5)^2 = y^2 + 2(y)(-5) + (-5)^2 = y^2 - 10y + 25$

Sustituyendo tenemos:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 36$$

Ordenamos e igualamos a cero:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 + 25 - 36 = 0$$

Y la ecuación en forma general es: $\boxed{x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0}$

**4.** El centro de la circunferencia es el punto $(\frac{3}{4}, -\frac{7}{2})$ y su radio es $r = \sqrt{20}$.

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y+\frac{7}{2}\right)^2 = 20$, desarrollando cada binomio al cuadrado:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2(x)\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{9}{16} = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

$$\left(y+\frac{7}{2}\right)^2 = y^2 + 2(y)\left(\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = y^2 + \frac{14}{2}y + \frac{49}{4} = y^2 + 7y + \frac{49}{2}$$

Sustituyendo tenemos:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 + 7y + \frac{49}{2} = 20$$

Ordenamos e igualamos a cero:

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 7y + \frac{9}{16} + \frac{49}{2} - 20 = 0$$

Hacemos la suma $\frac{9}{16} + \frac{49}{2} - 20 = \frac{9 + 392 - 320}{16} = \frac{81}{16}$ y la ecuación que nos queda es

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 7y + \frac{81}{16} = 0$$

Multiplicamos por $16$ a todos los términos de la ecuación para que no se altere y la ecuación en forma general es: $\boxed{16x^2 + 16y^2 - 24x + 112y + 81 = 0}$

**5.** El centro de la circunferencia es el punto $(-5, 0)$ y su radio es $r = 3$.

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $(x+5)^2 + y^2 = 9$, desarrollamos el binomio al cuadrado: $(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

Sustituyendo tenemos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 = 9$$

Ordenamos e igualamos a cero:

$$x^2 + y^2 + 10x + 25 - 9 = 0$$

Y la ecuación en forma general es: $\boxed{x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0}$

**6.** La circunferencia pasa por el origen de coordenadas, es decir por $O(0, 0)$ y su centro es el punto $(3, 4)$.

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, desarrollamos cada binomio al cuadrado:

$(x - 3)^2 = x^2 + 2(x)(-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$(y - 4)^2 = y^2 + 2(y)(-4) + (-4)^2 = y^2 - 8y + 16$

Sustituyendo tenemos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

Ordenamos e igualamos a cero:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 25 = 0$$

Y la ecuación en forma general es: $\boxed{x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0}$

**7.** La circunferencia pasa por el punto A$(-2, 4)$ y su centro es el punto $C(3, 1)$, encontrar su ecuación.

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 34$, desarrollamos los binomios al cuadrado:

$(x - 3)^2 = x^2 + 2(x)(-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$(y - 1)^2 = y^2 + 2(y)(-1) + (-1)^2 = y^2 - 2y + 1$

Sustituyendo tenemos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 34$$

Ordenamos e igualamos a cero:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 + 1 - 34 = 0$$

Y la ecuación en forma general es: $\boxed{x^2 + y^2 - 6x - 2y - 24 = 0}$

**8.** Los puntos A$(4, 3)$ y B$(-2, -3)$ son extremos de uno de los diámetros de la circunferencia, encontrar su ecuación.

**Solución.**

Encontramos su ecuación ordinaria que es $(x - 1)^2 + y^2 = 18$, desarrollamos el binomio al cuadrado:

$$(x - 1)^2 = x^2 + 2(x)(-1) + (-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Sustituyendo tenemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 18$$

Ordenamos e igualamos a cero:

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 - 18 = 0$$

Y la ecuación en forma general es: $\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 17 = 0}$

**EJERCICIO 4.8**

Dado el centro y el radio encontrar la ecuación de la circunferencia tanto en su forma ordinaria como en su forma general y grafícala.

1) $C\,(0\,,\,0)$ y $r = 2$
2) $C\,(0\,,\,0)$ y $r = 4$
3) $C\,(3,\,0)$ y $r = 3$
4) $C\,(0\,,\,2)$ y $r = 5$
5) $C\,(0\,,\,-7)$ y $r = \sqrt{30}$
6) $C\,(-2\,,\,5)$ y $r = \sqrt{15}$
7) $C\,(3\,,\,-5)$ y $r = \sqrt{17}$
8) $C\,(\frac{5}{3}\,,\,-\frac{10}{3})$ y $r = 5$
9) $C\,(-\frac{1}{2}\,,\,-4)$ y $r = 9$
10) $C\,(-1\,,\,-3)$ y $r = \frac{5}{3}$

### 4.8.1 OBSERVACIONES SOBRE LA ECUACIÓN EN FORMA GENERAL

- En los ejercicios anteriores creo que te diste cuenta que en la ecuación de la circunferencia en forma general $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, no siempre la A y la B tienen el valor de 1 , ya que en el ejercicio 4 de los ejemplos 6.2.3, los valores de A y de B son 16; pero te debe de quedar bien claro que el valor de A de B siempre deben de ser iguales para que sea una circunferencia.

- Cuando no hay ningún término lineal, es decir, no hay términos con $x$ ni con $y$, entonces el centro es el origen, como en los ejemplos 1 y 2.

- Si el término que falta es el de $x$, entonces el centro está sobre el eje "$Y$".

- Si el término que falta es el de $y$, entonces el centro está sobre el eje "$X$".

- Lo que siempre debes tener presente es:

**Si te dan las coordenadas del centro $C(h\,,\,k)$ de una circunferencia y te dan la magnitud del radio $r$, puedes encontrar su ecuación en forma ordinaria, llevarla a la forma general y trazar su gráfica.**

## 4.8.2 REDUCCIÓN DE LA FORMA GENERAL A LA FORMA ORDINARIA

Si te dan la ecuación de una circunferencia en forma ordinaria de inmediato puedes deducir cuales son las coordenadas del centro y la magnitud del radio y la puedes graficar, pero si te dan la ecuación en forma general ya no es tan inmediato que deduzcas el centro y el radio.

A continuación vamos a aprender como hacerlo, es decir como llevar la forma general a la forma ordinaria para así de inmediato deduzcas cuál es su centro $C(h\ ,\ k)$ y su radio $r$.

Para esto debes de recordar como se completa un trinomio cuadrado perfecto, ya que todo trinomio cuadrado perfecto se factoriza como el cuadrado de un binomio, es decir $\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$ y $\boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$ que ya los conocías, aplicando esto tanto a $x$ como a $y$ tenemos:

**Caso 1**) Si A = B = 1 la ecuación de la circunferencia en forma general es:

$$x^2 + y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

1°) Asociamos los términos en $x$ y los términos en $y$ $\quad x^2 + \mathrm{D}x + y^2 + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$

2º) Restando F a ambos lados de la ecuación $\quad x^2 + \mathrm{D}x + y^2 + \mathrm{E}y = -\mathrm{F}$

3°) Completamos trinomios cuadrados perfectos para $x$ y para $y$ de la siguiente forma:

Al coeficiente del término lineal de $x$ (es D) lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado lo que resulte lo sumamos a ambos lados de la ecuación y hacemos lo mismo con el coeficiente del término lineal de $y$ que es F, es decir lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado lo que resulte también lo sumamos a ambos lados de la ecuación y tenemos:

$$x^2 + \mathrm{D}x + \left(\frac{\mathrm{D}}{2}\right)^2 + y^2 + \mathrm{E}y + \left(\frac{\mathrm{E}}{2}\right)^2 = -\mathrm{F} + \left(\frac{\mathrm{D}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{E}}{2}\right)^2$$

4°) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto:

$$\left(x + \frac{\mathrm{D}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\mathrm{E}}{2}\right)^2 = -\mathrm{F} + \frac{\mathrm{D}^2}{4} + \frac{\mathrm{E}^2}{4}$$

Finalmente nos queda la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia, donde

$$h = -\frac{D}{2} \quad , \quad k = -\frac{E}{2} \quad y \quad r^2 = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

Observa que al valor de $h$ y de $k$ se le cambia el signo.

**Caso 2**) Si A = B ≠ 1 entonces lo primero que tenemos que hacer es dividir a toda la ecuación entre el valor que tiene A o B, y luego proceder como en el **Caso 1**.

Para que te quede mas claro haremos varios ejercicios.

**EJEMPLOS 4.8.2**

**1)** Transformar la ecuación en forma general $x^2 + y^2 + 12x - 2y - 13 = 0$ a la forma ordinaria o canónica, y si representa a una circunferencia hacer su gráfica.

**Solución:**

Observa que en este caso A = B = 1 entonces procedemos como sigue:

1º) Asociamos los términos en $x$ y los términos en $y$ : $x^2+12x + y^2- 2y - 13 = 0$

2º) Sumamos 13 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 12x + y^2 - 2y - 13 + 13 = 0 + 13$$

Nos queda: $x^2 + 12x + y^2 - 2y = 13$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos en $x$ y en $y$:

Para $x$: su coeficiente es 12, sacamos su mitad que es 6 y lo elevamos al cuadrado $6^2$, este número lo sumamos a ambos lados de la ecuación.

Para $y$: su coeficiente es –2, sacamos su mitad que es –1 y lo elevamos al cuadrado $(-1)^2$, este número también lo sumamos a ambos lados de la ecuación.

Y tenemos $(x^2 + 12x + 6^2) + (y^2 - 2y + (-1)^2) = 13 + 6^2 + (-1)^2$

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio: $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 13 + 36 + 1$

$(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 50$ Que es la Forma Ordinaria

Entonces $h = -6$, $k = 1$ y $r^2 = 50$ es decir $r = \sqrt{50}$

Así el centro de la circunferencia es el punto $C(-6 , 1)$ y su radio es $r = \sqrt{50}$, su gráfica es la figura 39.

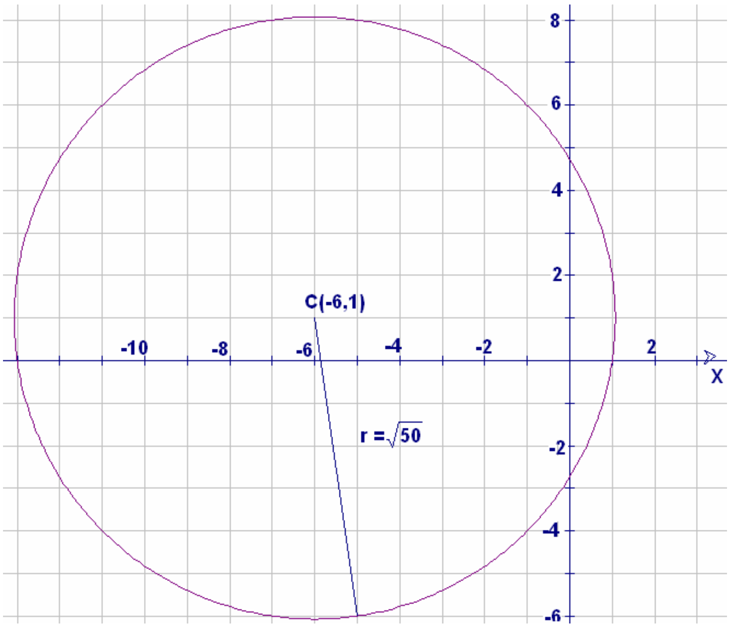



figura 39

**2)** Transformar la ecuación en forma general $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 3 = 0$ a la forma ordinaria o canónica, y si representa a una circunferencia hacer su gráfica.

**Solución:**

En esta ecuación A = B = 1 entonces

1º) Asociamos los términos con $x$ y los términos con $y$ :

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y + 3 = 0$$

2º) Restamos 3 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y + 3 - 3 = 0 - 3$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y = -3$$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos en $x$ y en $y$:

Para $x$: su coeficiente es -12, sacamos su mitad que es -6 y lo elevamos al cuadrado $(-6)^2$, este número lo sumamos a ambos lados de la ecuación.

Para $y$: su coeficiente es -16, sacamos su mitad que es -8 y lo elevamos al cuadrado $(-8)^2$, este número también lo sumamos a ambos lados de la ecuación y tenemos:

$$(x^2 - 12x + (-6)^2) + (y^2 - 16y + (-8)^2) = -3 + (-6)^2 + (-8)^2$$

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto como sigue:

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = -3 + 36 + 64$$

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 97 \quad \text{Forma Ordinaria}$$

Entonces $h = 6$, $k = 8$ y $r^2 = 97$ es decir $r = \sqrt{97}$

Así el centro de la circunferencia es el punto $C(6\ ,\ 8)$ y su radio es $r = \sqrt{97} \approx 9.84$, su gráfica es la figura 40.

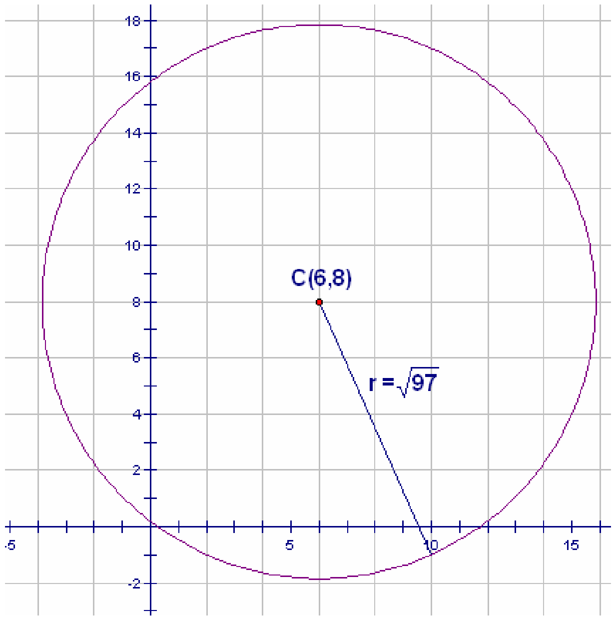



figura 40

**3)** Transformar la ecuación en forma general $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 23 = 0$ a la forma ordinaria o canónica, y si representa a una circunferencia hacer su gráfica.

**Solución:**

En esta ecuación A = B = 1 entonces

1º) Asociamos los términos con $x$ y los términos con $y$ :

$$x^2 + 5x + y^2 - 7y + 23 = 0$$

2º) Restamos 23 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 5x + y^2 - 7y + 23 - 23 = 0 - 23$$

$$x^2 + 5x + y^2 - 7y = -23$$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos en $x$ y en $y$:

Para $x$: su coeficiente es 5, sacamos su mitad que es $\frac{5}{2}$ y lo elevamos al cuadrado $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, este número lo sumamos a ambos lados de la ecuación.

Para $y$: su coeficiente es –7, sacamos su mitad que es $-\frac{7}{2}$ y lo elevamos al cuadrado $\left(-\frac{7}{2}\right)^2$, este número también lo sumamos a ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - 7y + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = -23 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2$$

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto como sigue:

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = -23 + \frac{25}{4}+\frac{49}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = -23 + \frac{74}{4} = -\frac{43}{4}$$

La Forma Ordinaria es: $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{43}{4}$

Observa que en este ejercicio $r^2 = -\frac{43}{4}$ entonces $r = \sqrt{-\frac{43}{4}}$ es un número que no existe en los números reales; en consecuencia la ecuación dada que es: $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 23 = 0$ **no representa a una circunferencia**.

**4)** Transformar la ecuación en forma general $5x^2 + 5y^2 + 15x + 10y - 40 = 0$ a la forma ordinaria o canónica, y si representa a una circunferencia hacer su gráfica.

**Solución:**

En esta ecuación A = B = 5 entonces lo primero que hacemos es dividir a toda la ecuación entre 5 y nos queda de la siguiente forma

$$x^2 + y^2 + 3x + 2y - 8 = 0$$

En esta nueva ecuación tenemos que A = B = 1, y procedemos como en los ejercicios anteriores.

1º) Asociamos los términos con $x$ y los términos con $y$ :

$$x^2 + 3x + y^2 + 2y - 8 = 0$$

2º) Sumamos 8 ambos lados de la ecuación: $x^2 + 3x + y^2 + 2y - 8 + 8 = 0 + 8$

Que es lo mismo que: $x^2 + 3x + y^2 + 2y = 8$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos en $x$ y en $y$:

Para $x$ la mitad de 3 la elevamos al cuadrado y la sumamos a ambos lados de la ecuación, y para $y$ la mitad de 2 la elevamos al cuadrado y la sumamos a ambos lados de la ecuación y tenemos:

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + 2y + (1)^2 = 0 + 8 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (1)^2$$

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto como sigue:

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 = 8 + \frac{9}{4} + 1$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{45}{4} \qquad \text{Forma Ordinaria}$$

Entonces $h = -\frac{3}{2}$, $k = -1$ y $r^2 = \frac{45}{4}$ es decir $r = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$

Así, el centro de la circunferencia es el punto $C(-\frac{3}{2}, -1)$ y su radio es $r = \frac{\sqrt{45}}{2}$ $\approx 3.35$, su gráfica es la figura 41.

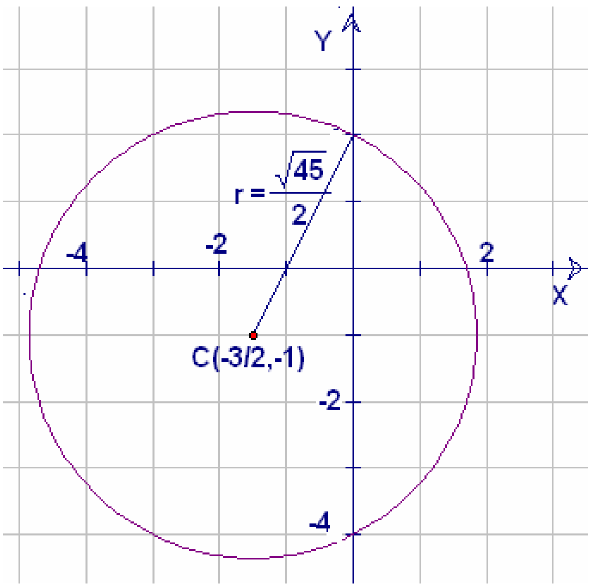



figura 41

**5)** Transformar la ecuación en forma general $x^2 + y^2 + 12x - 16y + 100 = 0$ a la forma ordinaria o canónica, y si representa a una circunferencia hacer su gráfica.

**Solución:**

En esta ecuación tenemos que A = B = 1, y procedemos como en los ejercicios anteriores.

1º) Asociamos los términos con $x$ y los términos con $y$ :

$$x^2 + 12x + y^2 - 16y + 100 = 0$$

2º) Restamos 100 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 12x + y^2 - 16y + 100 - 100 = 0 - 100$$

$$x^2 + 12x + y^2 - 16y = -100$$

3º) Completamos trinomios cuadrados perfectos en $x$ y en $y$:

Para $x$ la mitad de 12 la elevamos al cuadrado y la sumamos a ambos lados de la ecuación, y para $y$ la mitad de –16 la elevamos al cuadrado y la sumamos a ambos lados de la ecuación y tenemos:

$$x^2 + 12x + (6)^2 + y^2 - 16y + (-8)^2 = -100 + (6)^2 + (-8)^2$$

4º) Factorizamos cada trinomio cuadrado perfecto como sigue:

$$(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = -100 + 36 + 64$$

$$(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 0 \qquad \text{Forma Ordinaria}$$

Observa que en este ejercicio $r^2 = 0$ entonces $r = 0$ es decir no tenemos una circunferencia, es sólo el punto $(-6 , 8)$ y su gráfica es la figura 42.

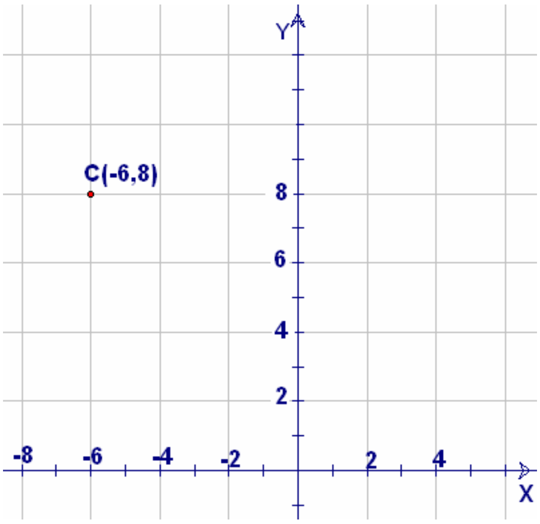



figura 42

**6)** Transformar la ecuación en forma general $x^2 + y^2 - 8x = 0$ a la forma ordinaria o canónica, y si representa a una circunferencia hacer su gráfica.

**Solución:**

En esta ecuación tenemos que A = B = 1, entonces:

1º) Asociamos los términos con $x$ y los términos con $y$ : $x^2 - 8x + y^2 = 0$

2º) Completamos un trinomio cuadrado perfecto para $x$ , sumando a ambos lados de la ecuación el cuadrado de la mitad de - 8 y tenemos:

$$x^2 - 8x + (-4)^2 + y^2 = 0 + (-4)^2$$

4º) Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto como sigue: $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

$$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 16 \qquad \text{Forma Ordinaria}$$

Entonces el centro de la circunferencia es $C(4 , 0)$ y su radio es $r = 4$, su gráfica es:

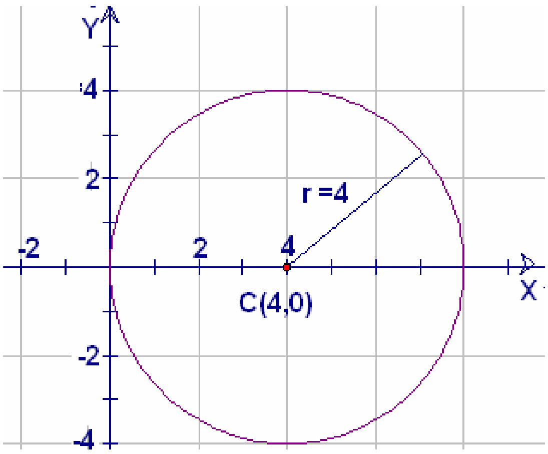



figura 43

**EJERCICIO 4.8.2**

Encuentra el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias y grafícalas.

1) $x^2 + y^2 - 49 = 0$

2) $x^2 + y^2 - 34 = 0$

3) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

4) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 54$

5) $x^2 + y^2 - 10x + 12y - 30 = 0$

6) $x^2 + y^2 + 12x - 6y - 4 = 0$

7) $x^2 + y^2 - 20x - 8y + 100 = 0$

8) $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 5 = 0$

9) $2x^2 + 2y^2 + 16x - 4y + 2 = 0$

10) $3x^2 + 3y^2 - 15x - 9y + 6 = 0$

11) $3x^2 + 3y^2 - 3x + 9y - 15 = 0$

12) $5x^2 + 5y^2 + 20x + 15y - 10 = 0$

### 4.9 ALGUNOS PROBLEMAS SOBRE CIRCUNFERENCIA

**1)** Hallar la ecuación de la circunferencia si su centro es el punto $C\,(-1\,,\,3)$ y pasa por el punto P $(2\,,\,-1)$.

**Solución:**

Nos dan el centro, lo único que tenemos que encontrar es el radio.

Sabemos que la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro es el radio, entonces usando la fórmula de distancia entre dos puntos el radio $r$ es igual a:

$$r = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-(-1))^2} \;=\; \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \;=\; \sqrt{9+16} \;=\; \sqrt{25} \;=\; 5$$

La gráfica es la siguiente:

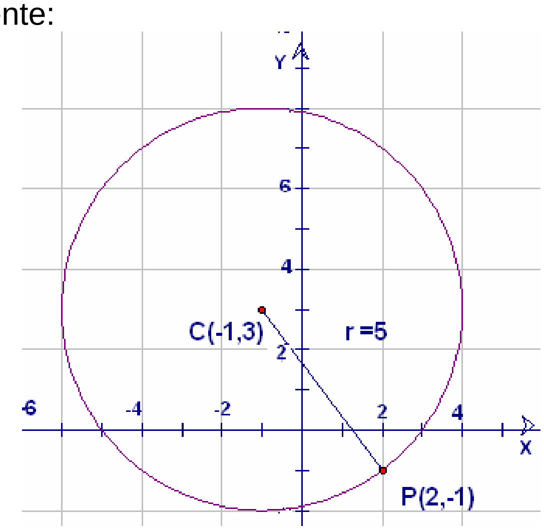


figura 44

Sustituyendo el centro y el radio en la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

tenemos:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

esta es la ecuación en su forma ordinaria, ahora en su forma general desarrollamos los binomios al cuadrado e igualamos a cero:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0}$$

es la ecuación de la circunferencia en su forma general.

**2)** Obtener la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos P(–4, 2) y M(2, –3).

**Solución:**

Trazamos el diámetro sobre el plano y recordamos que el radio es la mitad del diámetro y el centro debe ser el punto medio del segmento.

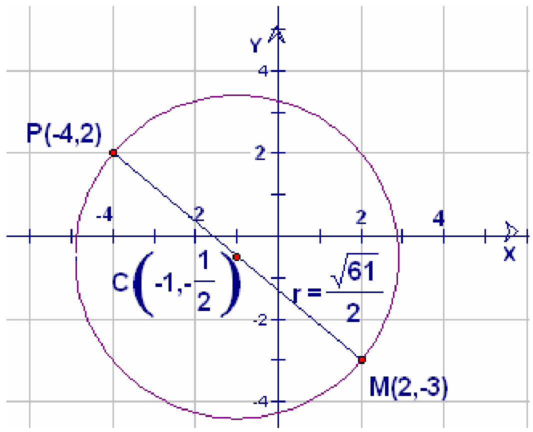



figura 45

Recuerda que el punto medio se calcula usando la fórmula $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

entonces $h = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$k = \frac{2-3}{2} = \frac{-1}{2}$

el centro esta en $C\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

El radio es la mitad del diámetro es decir:

$$r = \frac{d(\text{PM})}{2} = \frac{\sqrt{(-4-2)^2+(2+3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2+5^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+25}}{2} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

sustituyendo el centro y el radio en la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

tenemos: $(x+1)^2+(y+½)^2 = \left(\frac{\sqrt{61}}{2}\right)^2$

y la ecuación ordinaria es : $(x+1)^2+(y+½)^2 = \frac{61}{4}$

desarrollando los binomios al cuadrado, igualando a cero y ordenando términos:

$$x^2+2x+1+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{61}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x + y - \frac{56}{4} = 0$$

y la ecuación general es $\boxed{x^2 + y^2 + 2x + y - 14 = 0}$

**3)** Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en (5, –3) y que es tangente a la recta $10x - 6y + 9 = 0$.

**Solución:**
Primero en un plano cartesiano podemos graficar la recta y localizar el centro de la circunferencia para darnos una idea de lo que tenemos que hacer.
De la ecuación de la recta despejamos $y$ para ponerla en la forma $y = mx + b$ y nos queda $y = \frac{5}{3}x + \frac{3}{2}$ entonces la pendiente es $m = \frac{5}{3}$ y la ordenada al origen es $b = \frac{3}{2}$ ; es decir nuestra recta cruza al eje de las Y en $\frac{3}{2}$ y recordemos que la pendiente es el aumento en $Y$ entre el avance $X$, así es que si estábamos en $(0\ ,\ \frac{3}{2})$ avanzamos 3 unidades a la derecha y 5 hacia arriba y llegamos al punto $(3\ ,\ \frac{13}{2})$ , con estos dos puntos podemos trazar la recta y localizar el centro como se muestra en la siguiente figura.

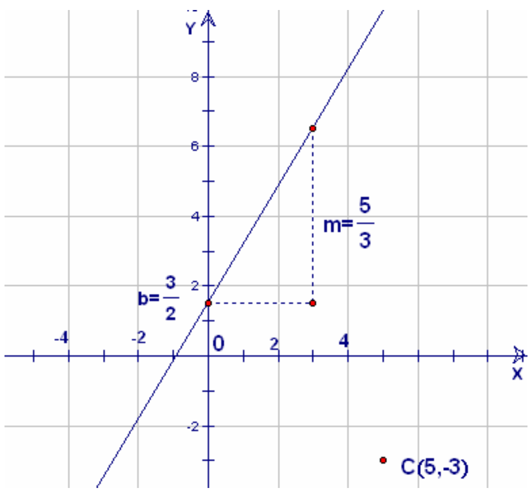


figura 46

Como la recta es tangente a la circunferencia debemos encontrar la distancia más corta del centro a la recta y esta va a ser el radio de la circunferencia, recordando que la distancia de un punto a una recta se obtiene como:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

en nuestro caso $A$ =10, $B$ =– 6, $C$ =9, $x_1$ =5 y $y_1$ =– 3

sustituyendo tenemos que $d = \dfrac{10(5)-6(-3)+9}{\sqrt{10^2+(-6)^2}}$ = $\dfrac{50+18+9}{\sqrt{100+36}}$ = $\dfrac{77}{\sqrt{136}}$

entonces $r = \dfrac{77}{\sqrt{136}} \approx 6.6$

Este valor y las coordenadas del centro de la circunferencia los sustituimos en la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y tenemos:

$$(x-5)^2+(y+3)^2=\left(\frac{77}{\sqrt{136}}\right)^2$$

$$(x-5)^2+(y+3)^2=\frac{5929}{136}$$

esta es la ecuación ordinaria, desarrollando el álgebra necesaria obtendremos la ecuación general $x^2-10x+25+y^2+6y+9=\dfrac{5929}{136}$

multiplicando por 136 a toda la ecuación y ordenando términos, se tiene:

$$136x^2+136y^2-1360x+816y+4624-5929=0$$

$\boxed{136x^2+136y^2-1360x+816y-695=0}$ es la ecuación general.

Ahora si podemos trazar bien la gráfica (figura 47).

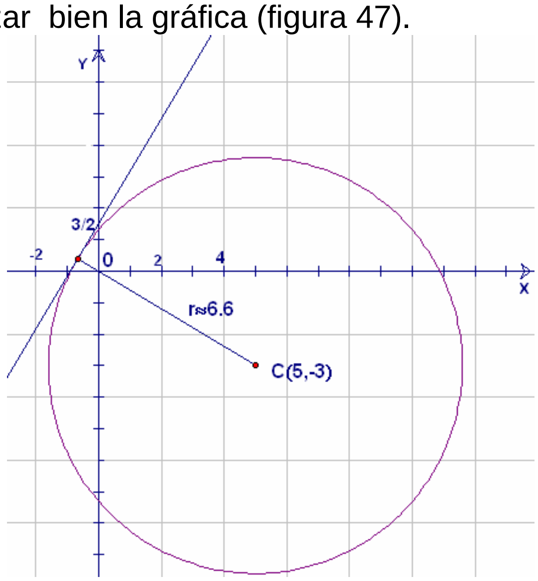



figura 47

¿Observando la gráfica se te podría ocurrir otra forma de resolver este ejercicio?

**4)** Encuentra el perímetro de la circunferencia y el área que encierra. Si la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 12 = 0$.

**Solución:**

Para encontrar el perímetro necesitamos encontrar el radio, como la ecuación esta en su forma general la llevamos a la forma ordinaria y tenemos:

$$x^2 - 2x + y^2 + 12y = -12$$
$$x^2 - 2x + (-1)^2 + y^2 + 12y + 6^2 = -12 + (-1)^2 + 6^2$$
$$(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 25$$

De esta forma podemos deducir que el centro de la circunferencia es ( 1 , – 6) y su radio $r = 5$, figura 48.

Recordando que el perímetro $P$ de toda circunferencia es $2\pi r$ tenemos que:

$P = 2(3.1416)5 = 31.41$ unidades lineales

y el área $A = \pi r^2$ por lo que $A = (3.1416)(5)^2 = 78.54$ u$^2$.

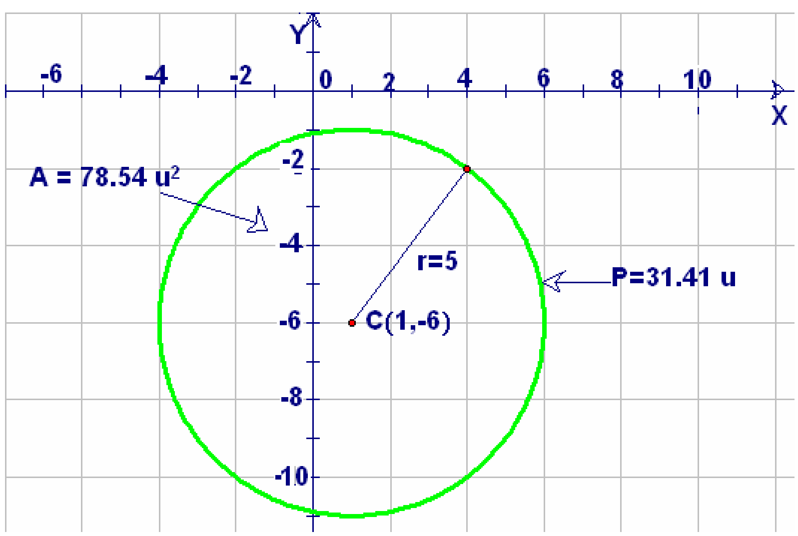



figura 48

**5)** Comprueba gráfica y algebraicamente si el punto A(-3, 2) es exterior, interior o pertenece a la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 29 = 0$.

**Solución:**

Para hacerlo gráficamente necesitamos el centro y el radio de la circunferencia, así es que hay que llevarla a la forma ordinaria para poder encontrarlos.

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y = 29$$

$$x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 8y + (-4)^2 = 29 + 2^2 + (-4)^2$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 49$$

Entonces el centro es $C(2\ ,\ 4)$ y el radio $r = 7$, graficando se ve que el punto A se encuentra en el interior de la circunferencia.

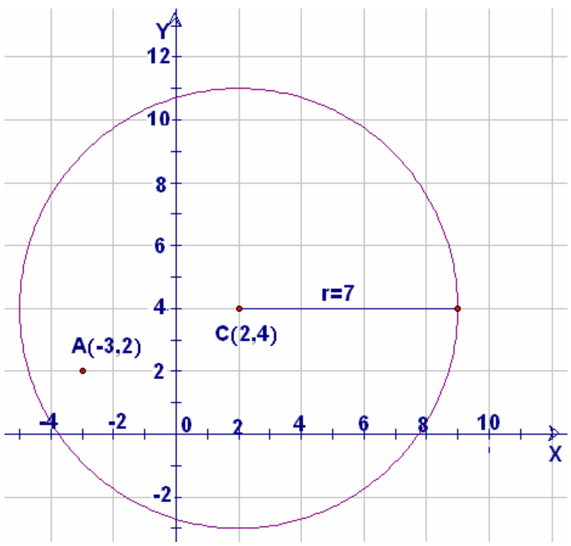



figura 49

Ahora algebraicamente comparemos la distancia del centro $C$ al punto A con el radio; si es menor que el radio esta dentro, si es mayor esta fuera y si es igual está sobre la circunferencia:

$$d(CA) = \sqrt{(2+3)^2 + (4-2)^2} \quad = \quad \sqrt{29} \approx 5.\ 38$$

como 5. 38 < 7 se encuentra en el interior de la circunferencia.

**6)** Un punto se mueve de forma tal que la razón de sus distancias a los puntos A(2 , 4) y B(–5 , 3) es 2. Encuentra la ecuación de su trayectoria y especifica de que lugar geométrico se trata.

**Solución:**

La razón de sus distancias a los puntos A(2, 4) y B(–5, 3) es 2 quiere decir que la distancia $d$(PA) entre la distancia $d$(PB) es igual a 2, esto es:

$$\frac{d(\text{PA})}{d(\text{PB})} = 2 \quad \text{o sea que} \quad \frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}}{\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}} = 2$$

Para eliminar las raíces elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación y tenemos: $\dfrac{(x-2)^2+(y-4)^2}{(x+5)^2+(y-3)^2} = 4$

realizando el álgebra necesaria para encontrar una ecuación en forma general:

$$(x-2)^2+(y-4)^2 = 4[(x+5)^2+(y-3)^2]$$

$$x^2-4x+4+y^2-8y+16 = 4(x^2+10x+25)+4(y^2-6y+9)$$

$$x^2-4x+y^2-8y+20 = 4x^2+40x+100+4y^2-24y+36$$

$$x^2-4x^2+y^2-4y^2-4x-40x-8y+24y+20-136=0$$

$$-3x^2-3y^2-44x+16y-116=0$$

multiplicamos por –1: $3x^2+3y^2+44x-16y+116=0$

**esta es la ecuación de una circunferencia**

Procedamos a encontrar el centro y el radio llevándola a la forma general.

La dividimos entre 3, asociando términos, completando cuadrados y factorizando tenemos: $x^2+y^2+\frac{44}{3}x-\frac{16}{3}y+\frac{116}{3}=0$

$$x^2+\frac{44}{3}x+y^2-\frac{16}{3}y=-\frac{116}{3}$$

$$x^2+\frac{44}{3}x+\left(\frac{44}{6}\right)^2+y^2-\frac{16}{3}y+\left(-\frac{16}{6}\right)^2=-\frac{116}{3}+\left(\frac{44}{6}\right)^2+\left(-\frac{16}{6}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{44}{6}\right)^2+\left(y-\frac{16}{6}\right)^2=\frac{200}{9} \quad \text{que es lo mismo que}$$

$$\left(x+\frac{22}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{200}{9}$$

Entonces el centro esta en $C\left(-\frac{22}{3},\frac{8}{3}\right)$ y su radio es $r=\frac{\sqrt{200}}{3}$ = 4.7 u, su gráfica es la figura 50.

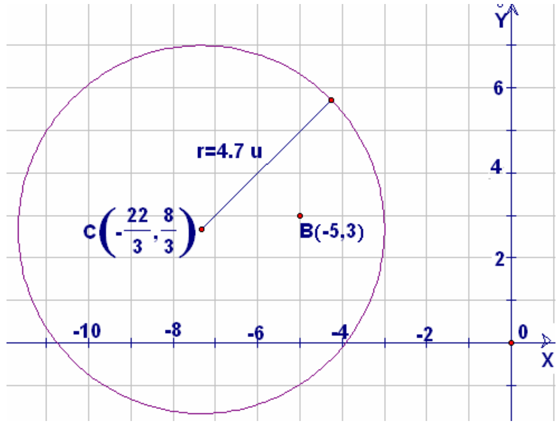



figura 50

**7)** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2, – 2), B(–1, 4) y C(4, 6).

**Solución:**
Marcamos los puntos sobre el plano:

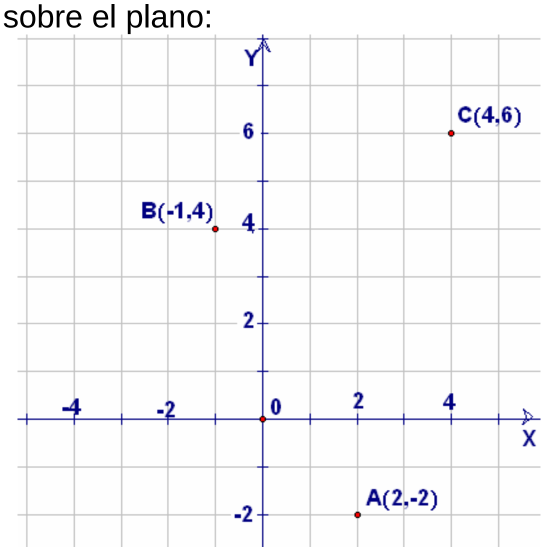



figura 51

La distancia de cualquier punto sobre la circunferencia al centro $(h, k)$ nos da el radio, como tenemos 3 puntos tenemos tres formas de obtener el radio en términos de $h$ y $k$ que son las siguientes:

$$r^2=(2-h)^2+(-2-k)^2=4-4h+h^2+4+4k+k^2$$

$$r^2=h^2+k^2-4h+4k+8 \quad \text{-------------(1)}$$

$$r^2 = (-1-h)^2 + (4-k)^2 = 1 + 2h + h^2 + 16 - 8k + k^2$$
$$r^2 = h^2 + k^2 + 2h - 8k + 17 \text{ ------------ (2)}$$

$$r^2 = (4-h)^2 + (6-k)^2 = 16 - 8k + h^2 + 36 - 12k + k^2$$
$$r^2 = h^2 + k^2 - 8k - 12k + 52 \text{ ---------- (3)}$$

igualando la ecuación (1) con la ecuación (2) y acomodando la ecuación:

$$h^2 + k^2 - 4h + 4k + 8 = h^2 + k^2 + 2h - 8k + 17$$
$$-4h + 4k - 2h + 8k = 17 - 8$$
$$-6h + 12k = 9$$

dividiendo entre 3: $-2h + 4k = 3$ -------------(4)

podemos igualar la ecuación (1) con la ecuación (3) y obtenemos:

$$h^2 + k^2 - 4h + 4k + 8 = h^2 + k^2 - 8h - 12k + 52$$
$$-4h + 4k + 8h + 12k = 52 - 8$$
$$4h + 16k = 44$$

dividiendo entre 4, $h + 4k = 11$ ------------------ (5)

repitiendo el procedimiento pero ahora con la ecuación (4) y la ecuación (5) ya que representan un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas el cual podemos resolver.

Multiplicando por 2 la ecuación (5) y le sumamos la ecuación (4):

$$\begin{array}{r} 2h + 8k = 22 \\ -2h + 4k = 3 \\ \hline 12k = 25 \end{array}$$
$$k = \frac{25}{12}$$

sustituimos en la ecuación (5) el valor de $k$:

$$h + 4\left(\frac{25}{12}\right) = 11$$
$$h + \frac{25}{3} = 11$$
$$h = 11 - \frac{25}{3} = \frac{33-25}{3}$$
$$h = \frac{8}{3}$$

El centro de la circunferencia es el punto $\left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$

El radio lo encontramos al sustituir en cualquiera de las primeras 3 ecuaciones; con la ecuación 1 nos queda:

$$r^2 = (2-\frac{8}{3})^2 + (-2-\frac{25}{12})^2$$

$$= \left(\frac{6-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{-24-25}{12}\right)^2 \quad = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-49}{12}\right)^2$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2401}{144} = \frac{64+2401}{144}$$

$$r = \sqrt{\frac{2465}{144}} = \frac{\sqrt{2465}}{12} \approx 4.14$$

La ecuación en su forma ordinaria es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-\frac{8}{3})^2 + (y-\frac{25}{12})^2 = \left(\frac{\sqrt{2465}}{12}\right)^2$$

$$(x-\frac{8}{3})^2 + (y-\frac{25}{12})^2 = \frac{2465}{144} \longrightarrow \text{Forma Ordinaria}$$

En su forma general:

$$x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9} + y^2 - \frac{25}{5}y + \frac{625}{144} = \frac{2465}{144}$$

$$144x^2 + 144y^2 - 768x - 600y + 1024 + 625 - 2465 = 0$$

$$\boxed{144x^2 + 144y^2 - 768x - 600y - 816 = 0} \longrightarrow \text{Forma General}$$

La gráfica completa es la siguiente:

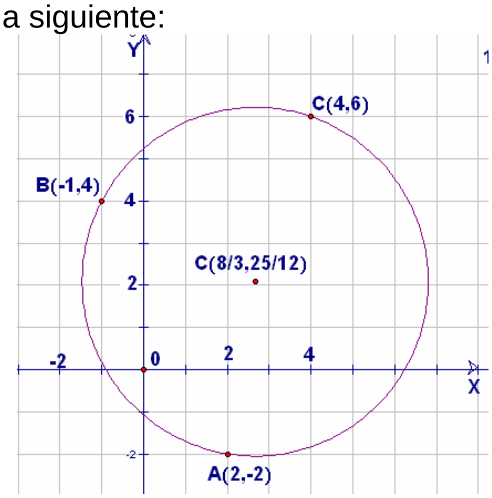



figura 52

Está no es la única forma de resolverlo, puedes buscar otra.

**8)** Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos N(2,3) y M(6 , 7) y su centro está sobre la recta $2x - 3y - 3 = 0$.

**Solución:**

Tenemos que encontrar un punto sobre la recta $2x - 3y - 3 = 0$ que se encuentre a igual distancia tanto de N como de M y será el centro $C(h, k)$.

Para graficar la recta nos fijamos en su pendiente y su ordenada al origen.

Para esto despejamos $y$ de la ecuación $2x - 3y - 3 = 0$, y tenemos $y = \frac{2}{3}x - 1$ donde su pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y su ordenada al origen es $b = -1$.

Como $b = -1$, la recta corta al eje de las $Y$ en $-1$ y como la pendiente es $\frac{2}{3}$, a partir de (0 , –1) avanzamos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, y llegamos al punto (3, 1) ; uniendo estos dos puntos tenemos la gráfica de la recta, también localizamos a los otros dos puntos por los que pasa. En esta gráfica podemos delinear la circunferencia que se nos pide, figura 53.

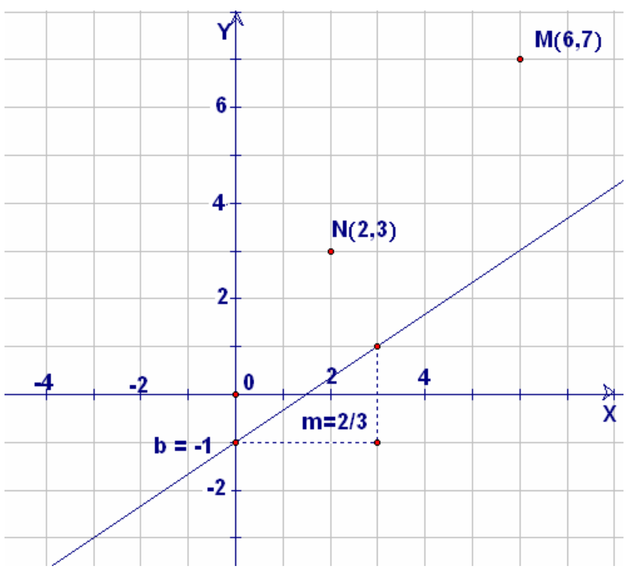



figura 53

Ahora tratemos de obtener el centro y el radio como sigue:

El centro $C(h, k)$ debe satisfacer la ecuación $2x - 3y - 3 = 0$, es decir

$$2h - 3k - 3 = 0 \longrightarrow \quad (1)$$

distancia de $C$ a N = $\sqrt{(2-h)^2+(3-k)^2}$
distancia de $C$ a M = $\sqrt{(6-k)^2+(7-k)^2}$

estas deben de ser iguales, es decir:

$$\sqrt{(2-h)^2+(3-k)^2} = \sqrt{(6-h)^2+(7-k)^2}$$

elevando al cuadrado ambos lados podemos eliminar las raíces cuadradas

realizando los binomios al cuadrado y reordenando la ecuación tenemos

$$4-4h+h^2+9-6k+k^2 = 36-12h+h^2+49-14k+k^2$$
$$13-4h+h^2-6k+14k = 85-12h+h^2-14k+k^2$$
$$-4h+12h-6k+14k = 85-13 = 72$$
$$8h+8k = 72$$

dividiendo entre $8$

$$h+k=9 \longrightarrow (2)$$

la ecuación (1) la podemos escribir como:

$$2h-3k=3 \longrightarrow (3)$$

las ecuaciones (2) y (3) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que podemos resolver por eliminación.

Multiplicamos por 3 a la ecuación (2) y el resultado lo sumamos con la ecuación(3)

$$\begin{array}{r} 3h+3k=27 \\ 2h-3k=3 \\ \hline 5h \quad = 30 \\ h = 6 \end{array}$$

sustituimos el valor de $h$ en la ecuación (2):

$$6 + k = 9$$
$$k = 9 - 6$$
$$k = 3$$

Entonces el centro de la circunferencia es $C(6\ ,\ 3)$ y el radio es la distancia a cualquiera de los dos puntos

$$r = \sqrt{(6-2)^2+(3-3)^2} = \sqrt{4^2}$$
$$r = 4$$

Ahora ya podemos graficar correctamente la circunferencia, ya que tiene centro en (6, 3) y radio 4.

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-6)^2+(y-3)^2=4^2$$
$$(x-6)^2+(y-3)^2=16 \longrightarrow \text{Forma Ordinaria}$$

su forma general, desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2-12x+36+y^2-6y+9=16$$
$$x^2+y^2-12x-6y+45-16=0$$
$$x^2+y^2-12x-6y+29=0 \longrightarrow \text{Forma General}$$

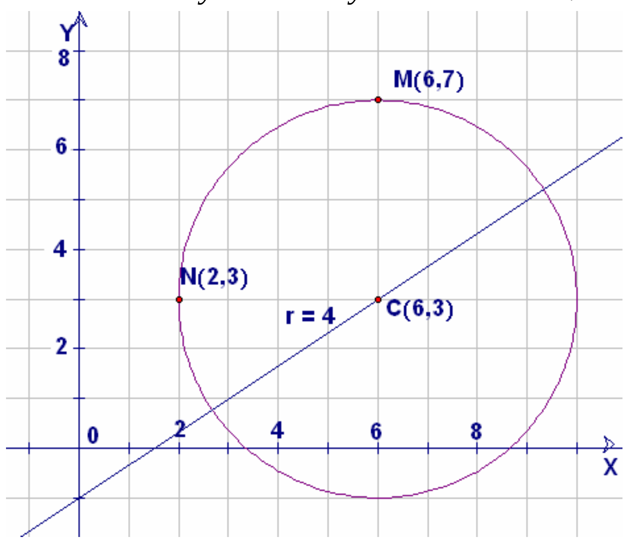



figura 54

**9)** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y es tangente a la recta $3x + 4y + 25 = 0$ en el punto (– 7, – 1).

Primero debemos estar seguros de que el punto (– 7, – 1) esta sobre la recta, así es que sustituimos en la ecuación dada:

$$3(-7)+4(-1)+25=0$$
$$-21-4+25=0$$

Entonces si satisface la ecuación de la recta; ahora graficamos la recta para darnos una idea de por donde se encuentra la circunferencia:

Al despejar a $y$ de la ecuación $3x + 4y + 25 = 0$, tenemos $y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$

Entonces $m = -\frac{3}{4}$ y $b = -\frac{25}{4}$; localizamos a $b$ sobre el plano y como ya comprobamos que (–7 , –1) está sobre la recta, simplemente los unimos y ya tenemos la gráfica de la línea recta, con estos datos ya nos podemos dar una idea de cómo debe de ser la gráfica de la circunferencia y así podremos checar sí el resultado que nos de es correcto.

Como nos dan una recta tangente en un punto, el radio de la circunferencia que une al centro con el punto que debe ser perpendicular a la recta dada, por lo que podemos obtener la ecuación de este radio.

Si la recta $3x + 4y + 25 = 0$ tiene pendiente $m = -\frac{3}{4}$, la recta perpendicular debe obtener pendiente $m^p = \frac{4}{3}$ y pasa por el punto (– 7, – 1), por lo que su ecuación la obtenemos usando la ecuación de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$

sustituimos los valores y realizamos el álgebra:

$$y-(-1)=\frac{4}{3}(x-(-7))$$
$$3(y+1)=4(x+7)$$
$$3(y + 1) = 4(x + 7)$$
$$3y+3=4x+28$$
$$0=4x-3y-3+28$$
$$0=4x-3y+25----------(1)$$

La ecuación de la recta perpendicular es $4x - 3y + 25 = 0$, esta recta contiene al centro $(h , k)$ de la circunferencia.

Nuestro problema ahora es encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen (0, 0) y por el punto (– 7, –1), y cuyo centro se encuentra sobre la recta $4x - 3y + 25 = 0$, que se puede resolver de la misma forma que el problema anterior.

Igualamos la distancia de (0, 0) a $(h , k)$ con la distancia de (– 7, –1) a $(h , k)$; y sustituimos $(h , k)$ en la ecuación de la recta perpendicular ( ecuación 1), gráficamente es lo siguiente:

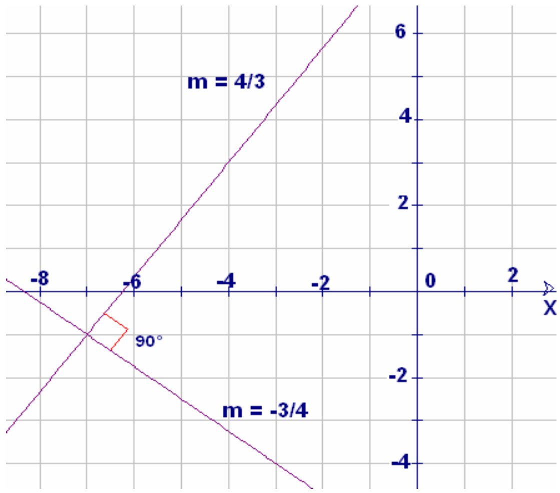



figura 31

Realizando algebraicamente lo anterior tenemos:

$$\sqrt{(0-h)^2+(0-k)^2}=\sqrt{(-7-h)^2+(-1-k)^2}$$

eliminando las raíces tenemos

$$h^2+k^2=49+14h+h^2+\ 1+2k+k^2$$

cancelamos $h^2$ y $k^2$ de ambos lados y ordenamos la ecuación

$$0 = 50 + 14h + 2k$$
$$14h + 2k = -50$$

dividiendo entre dos $7h + k = -25$.............................. (2)

sustituyendo el centro ($h$ , $k$) en la ecuación (1) tenemos:

$$4h-3k+25=0 \qquad \text{ó}$$
$$4h-3k=-25----------(3)$$

las ecuaciones (2) y (3) forman un sistema de ecuaciones que podemos resolver por eliminación,
multiplicamos por 3 la ecuación (2) y el resultado lo sumamos con la ecuación (3):

$$21h+3k=-75$$
$$4h-3k=-25$$

$$25h \quad = -100$$
$$h = -100/25$$
$$h = -4$$

sustituimos el valor de $h$ en la ecuación (2):

$$7(-4) + k = -25$$
$$-28 + k = -25$$
$$k = -25 + 28$$
$$k = 3$$

el centro de la circunferencia es (–4, 3) ; ahora el radio lo obtendremos al calcular la distancia al origen (0, 0) o al punto (– 7, – 1) que son los puntos por los que pasa, por mayor facilidad usamos el origen.

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$
$$r = 5$$

La ecuación ordinaria de la circunferencia es :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-(-4))^2 + (y-3)^2 = 5^2$$
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

en su forma general simplemente desarrollamos los binomios al cuadrado;

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25$$
$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 25 - 15 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$$

Ahora si ya podemos trazar la circunferencia con mayor precisión ya que conocemos su centro y su radio.

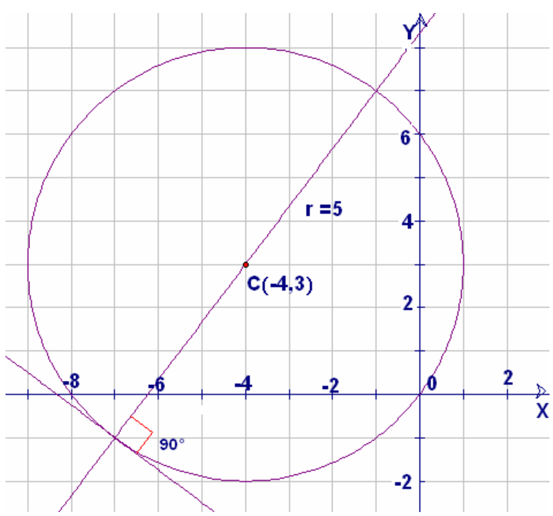



figura 56

Trata de resolverlo de otra forma usando el concepto de mediatriz.

**EJERCICIOS 4.9**

1. Hallar la ecuación en forma ordinaria y en forma general de la circunferencia si su centro es el punto $C$ (3 , –1) y pasa por el punto P (–2 , 1).
2. Obtener la ecuación en forma ordinaria y en forma general de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos P(5 , –1) y M(–1 , 7).
3. Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en (2 , –5) y que es tangente a la recta $x - 2y - 2 = 0$.
4. Encuentra el perímetro de la circunferencia y el área que encierra. Si la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 12x - 10y - 15 = 0$.
5. Comprueba gráfica y algebraicamente si el punto A(4 , –2) es exterior, interior o pertenece a la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 2x - 16y + 10 = 0$.
6. Hallar la ecuación en forma ordinaria y general de la circunferencia que pasa por los puntos A(3 , 7) y B(–3 , –3) y cuyo radio es $r = 4$.
7. Encuentra la ecuación en forma general de la circunferencia con radio $r = 7$ y que es concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 5 = 0$.
8. Obtener la ecuación de la recta tangente en el punto T(7 , 5) de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$.
9. Hallar la ecuación en forma general de la circunferencia que es tangente a la recta $x - 4y + 12 = 0$ en el punto ( 8 , 5) y de radio 3.
10. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos N(–2 , 3) y M(1 , –4) y su centro está sobre la recta $2x - y - 2 = 0$.
11. Hallar la ecuación en forma general de la circunferencia que pasa por los puntos A(–3 , 7), B(3 , – 1) y C(4, 6).

**AUTOEVALUACIÓN**

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos que se te han expuesto a lo largo de esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas tu formulario que puedes consultar.

1) Una elipse tiene por ecuación $4x^2 + 3y^2 - 36 = 0$, escribir la ecuación en forma ordinaria y hallar las coordenadas de su centro, de sus vértices, extremos del eje menor, focos; las longitudes de sus ejes, de su ancho focal o lado recto, su excentricidad y trazar su gráfica.
2) Obtener la ecuación en forma general de la elipse con centro en el origen, un vértice en (–4 , 0) y pasa por el punto (–2 , –2).
3) Una elipse tiene por ecuación $5x^2 + 16y^2 - 60x + 64y + 164 = 0$, escribir la ecuación en forma ordinaria y hallar las coordenadas de su centro, de sus vértices, extremos del eje menor, focos; las longitudes de sus ejes, de su ancho focal o lado recto, su excentricidad y trazar su gráfica.
4) Obtener la ecuación en forma general de la elipse con un vértice en (–6 , 2) y focos en (–4 , 2) y (2 , 2).
5) Encuentra la ecuación de la circunferencia en la forma general, si su centro es $C(2 , -5)$ y su radio $r = 4$.
6) Obtener la ecuación de la circunferencia en la forma general, si su radio es $r = 2$ y es concéntrica a la circunferencia cuya ecuación es:
$$x^2 + y^2 + 6x - 14y + 35 = 0$$
7) Obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ en el punto (4 , 6).

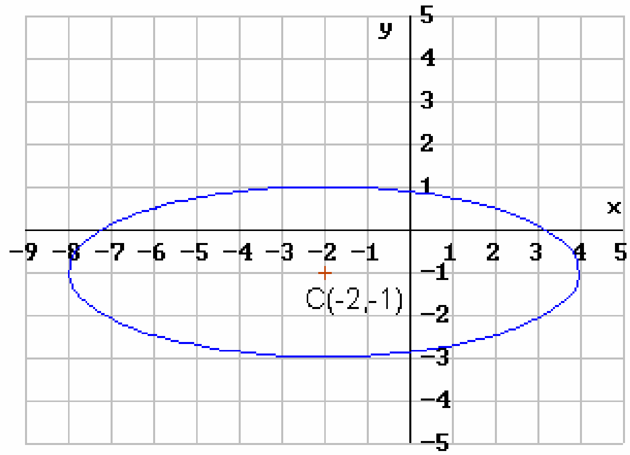
ESCALA:

Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 4, 5 y 6. Si resuelves también la 3 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 7, ¡FELICIDADES!, tienes mucho futuro. Si resuelves menos de 4 preguntas, tienes que estudiar con mayor conciencia el folleto y hacer todos sus ejercicios.

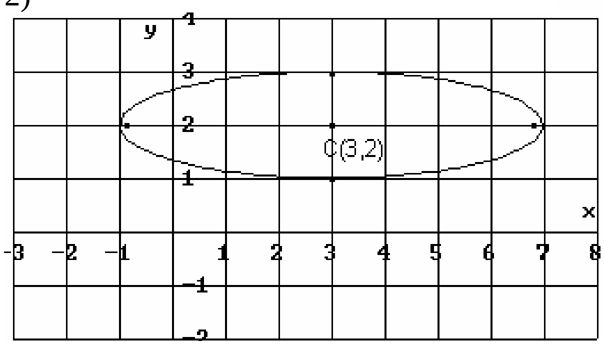
## SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

### EJERCICIOS 4.2

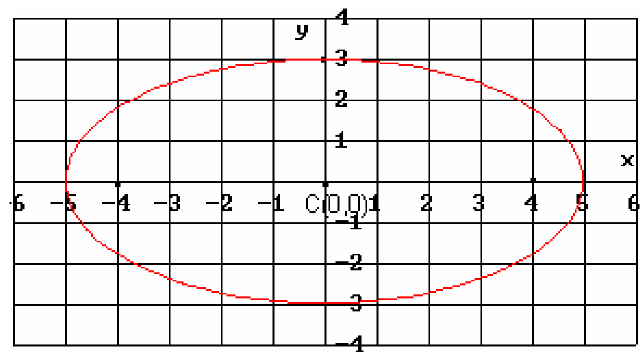
1) C(–2, –1),
- Semieje mayor, a = 6,
- Semieje menor, b = 2,
- $F_1$(3.66, –1) y $F_2$(–7.66, –1)
- $V_1$(4, –1) y $V_2$(–8, –1)
- $B_1$(–2, 1) y $B_2$(–2, –3)
- L.R. = 1.33
- $e$ = 0.94



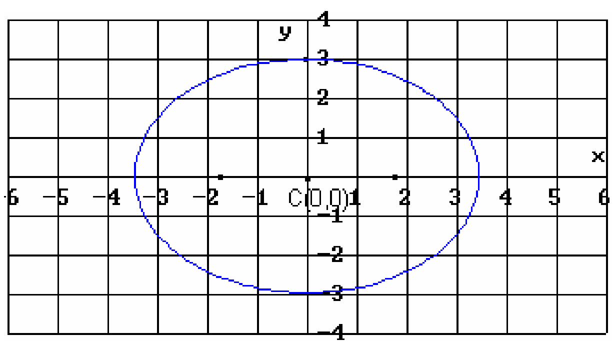

2)




2) C(–2, –1),
- Semieje mayor, a = 4
- Semieje menor, b = 1
- $F_1$(6.87, 2) y $F_2$( –0.87, 2)
- $V_1$(7, 2) y $V_2$(–1, 2)
- $B_1$(3, 3) y $B_2$(3, 1)
- L.R. = 0.5
- $e$ = 0.97

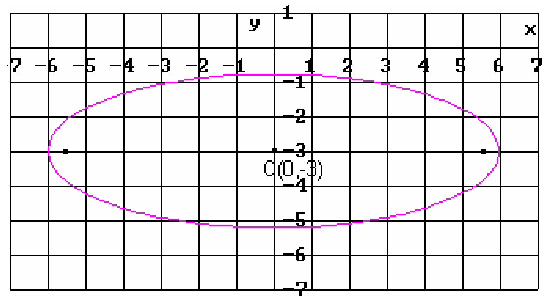



3) C(0, 0)
- Semieje mayor, a = 5
- Semieje menor, b = 3
- $F_1$( –4, 0) y $F_2$(4, 0)
- $V_1$( –5, 0) y $V_2$(5, 0)
- $B_1$(0, 3) y $B_2$(0, –3)
- L.R. = 1.2
- $e$ = 0.8

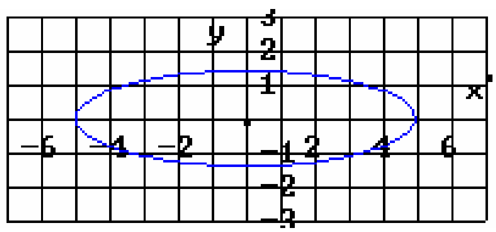



4) C(0, 0)
- Semieje mayor, a = $\sqrt{12}$ = 3.464
- Semieje menor, b = 3
- $F_1$( –1.732, 0) y $F_2$(1.732, 0)
- $V_1$( –3.464, 0) y $V_2$(3.464, 0)
- $B_1$(0, 3) y $B_2$(0, –3)
- L.R. = 1.732
- $e$ = 0.5

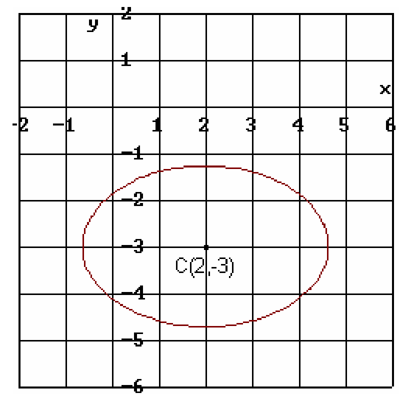
5) C(0, –3)
- Semieje mayor, a = 6
- Semieje menor, b = 2.236
- $F_1$( –5.568, – 3) y $F_2$(5.568, 0)
- $V_1$( –6, – 3) y $V_2$(6, – 3)
- $B_1$(0, –0.764) y $B_2$(0, –5.236)
- L.R. = 1.667
- $e$ = 0.93



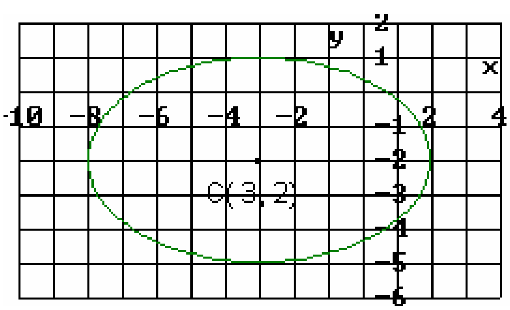

6) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{2}=1$



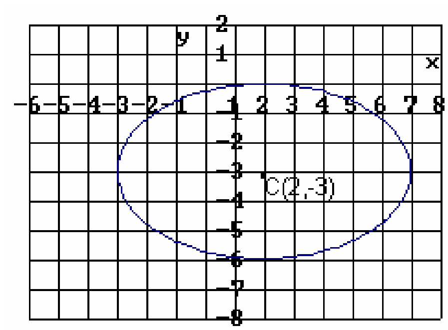

7) $\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$



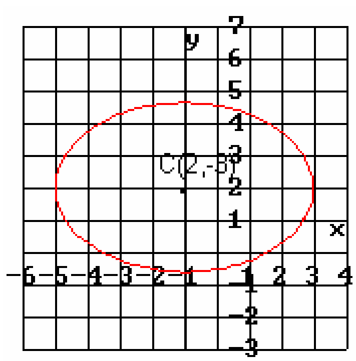

8) $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$




9) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$




10) $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{7}=1$



**EJERCICIOS 4.3**

1) a) C(2 , – 1)

b) $a = 6$ , $b = 2$

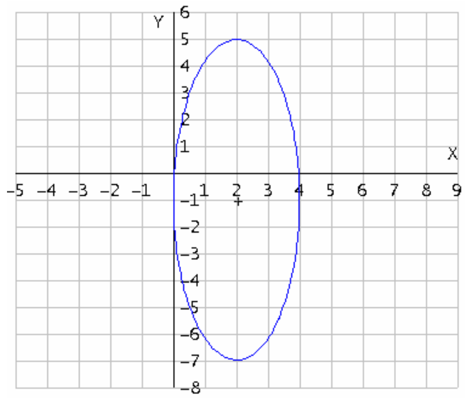
c) $V_1(2 , 5)$ , $V_2(2 , –7)$

d) $B_1(0 , –1)$ , $B_2(4 , –1)$

e) $F_1(2 , 4.65)$ , $F_2(2 , –6.65)$

f) LR = 1.333

g) $e = 0.94$



2) a) C(–3 , 2)

b) $a = 7$ , $b = 3$

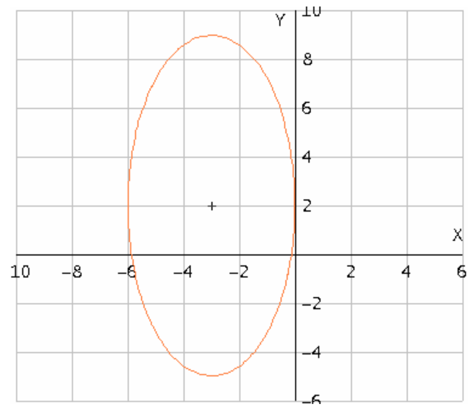
c) $V_1(–3 , 9)$ , $V_2(–3 , –5)$

d) $B_1(–6 , 2)$ , $B_2(0 , 2)$

e) $F_1(–3 , 8.32)$ , $F_2(–3 , –4.32)$

f) LR = 2.57

g) $e = 0.9$



3) a) C(0 , 0)

b) $a = 6$ , $b = 4$

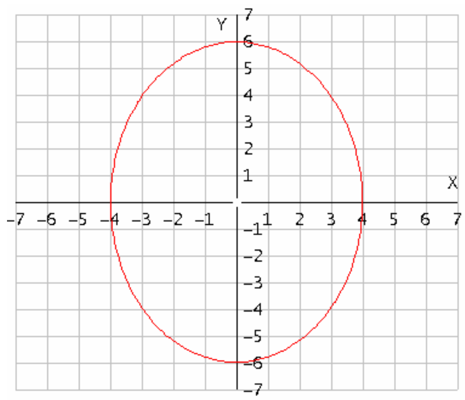
c) $V_1(0, 6)$ , $V_2(0 , –6)$

d) $B_1(–4 , 0)$ , $B_2(4 , 0)$

e) $F_1(0 , \sqrt{20})$ , $F_2(0 , –\sqrt{20})$

f) LR = 5.333

g) $e = 0.745$



4) a) C(0 , 0)

b) $a = 5$ , $b = 2$

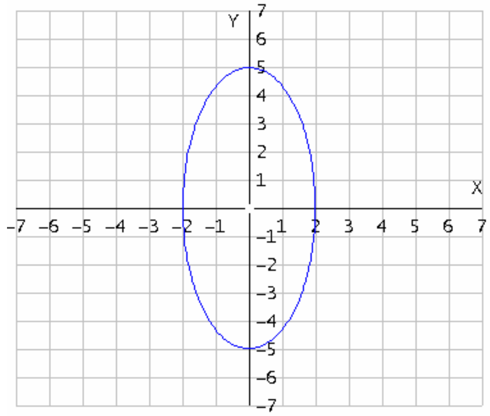
c) $V_1(0, 5)$ , $V_2(0 , –5)$

d) $B_1(–2 , 0)$ , $B_2(2 , 0)$

e) $F_1(0 , \sqrt{21})$ , $F_2(0 , –\sqrt{21})$

f) LR = 1.6

g) $e = 0.916$



5) a) C(0 , 0)

b) $a = 4$ , $b = \sqrt{12} = 3.46$

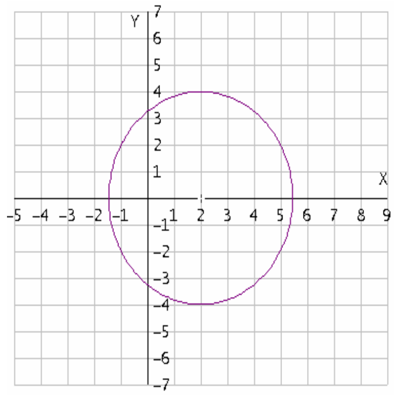
c) $V_1(2, 4)$ , $V_2(2, -4)$

d) $B_1(-1.46, 0)$ , $B_2(5.46, 0)$

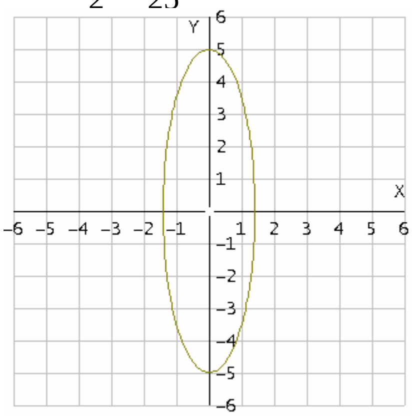
e) $F_1(2, 2)$ , $F_2(2, -2)$

f) LR = 6

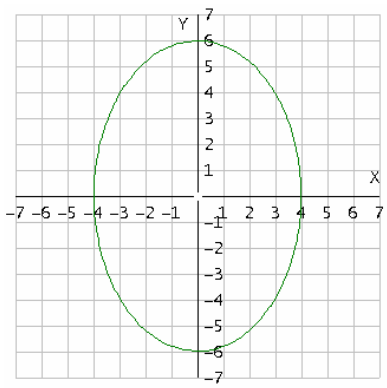
g) $e = 0.5$



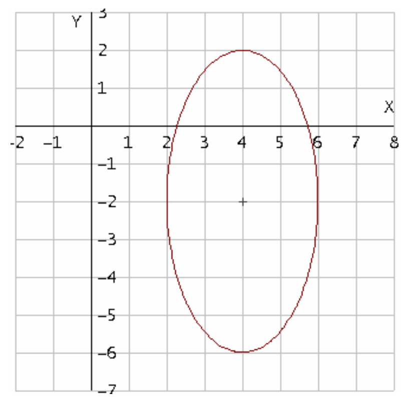

6) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{25} = 1$



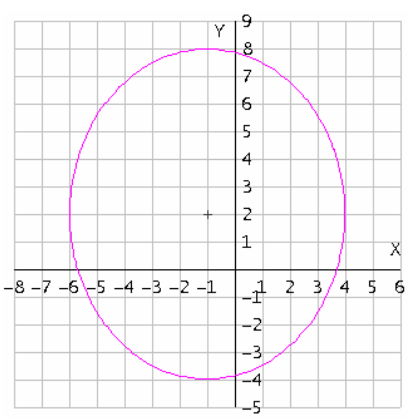

7) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$



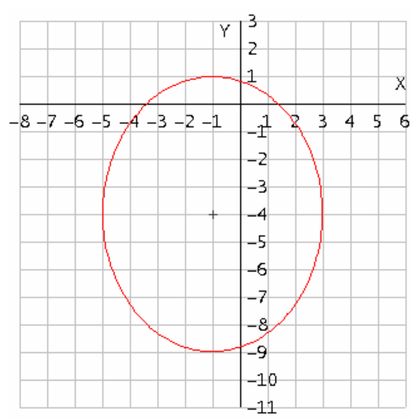

8) $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$




9) $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$




10) $\dfrac{(x+1)^2}{16} + \dfrac{(y+4)^2}{25} = 1$



**EJERCICIOS 4.4**

1) a) C(0 , 0)

b) $a = 5$ , $b = 3$

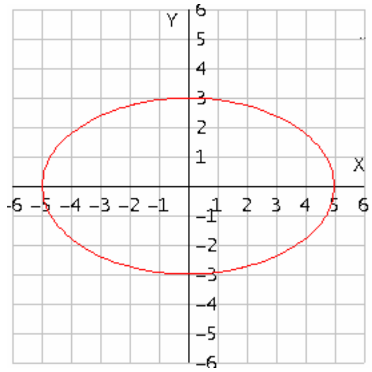
c) $V_1(-5 , 0)$ , $V_2(5 , 0)$

d) $B_1(0 , 3)$ , $B_2(0 , -3)$

e) $F_1(-4 , 0)$ , $F_2(4 , 0)$

f) LR = 3.6

g) $e =$ 😐




2) a) C(0 , 0)

b) $a = \sqrt{7}$ , $b = \sqrt{2}$

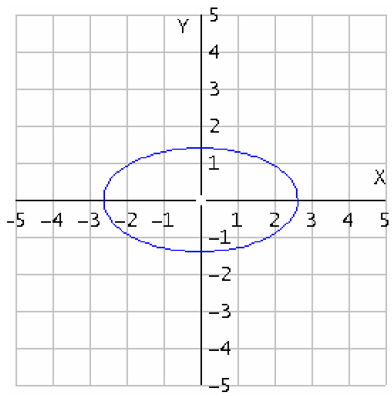
c) $V_1(-2.64 , 0)$ , $V_2(2.64 , 0)$

d) $B_1(0 , 1.41)$ , $B_2(0 , -1.41)$

e) $F_1(-2.23 , 0)$ , $F_2(2.23 , 0)$

f) LR = 1.51

g) $e = 0.845$




3) a) C(0 , 0)

b) $a = \sqrt{13}$ , $b = 2$

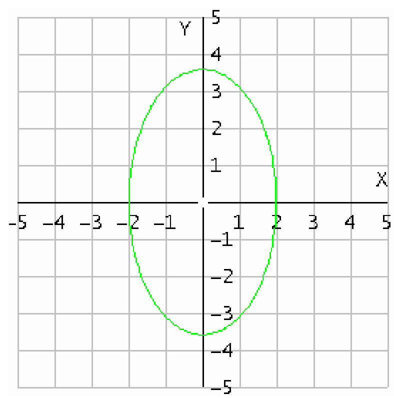
c) $V_1(0 , 3.6)$ , $V_2(0 , -3.6)$

d) $B_1(-2 , 0)$ , $B_2(2 , 0)$

e) $F_1(0 , 3)$ , $F_2(0 , -3)$

f) LR = 2.21

g) $e = 0.83$




4) a) C(0 , 0)

b) $a = 7$ , $b = 5$

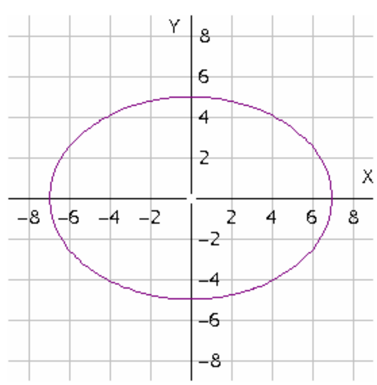
c) $V_1(-7 , 0)$ , $V_2(7 , 0)$

d) $B_1(0 , 5)$ , $B_2(0 , -5)$

e) $F_1(-4.89 , 0)$ , $F_2(4.89 , 0)$

f) LR = 7.14

g) $e = 0.69$



5) a) C(3 , –2)

b) $a = 6$ , $b = 2$

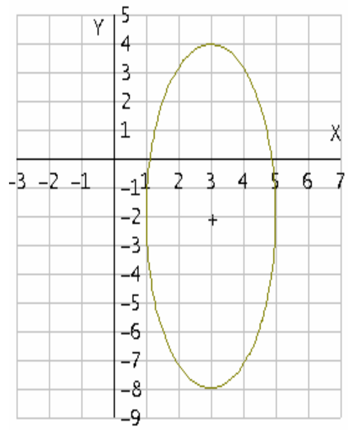
c) $V_1(3\ ,\ 4)$ , $V_2(3\ ,\ –8)$

d) $B_1(1\ ,\ –2)$ , $B_2(5\ ,\ –2)$

e) $F_1(3\ ,\ 3.65)$ , $F_2(3\ ,\ –7.65)$

f) LR = 1.33

g) $e = 0.94$




6) a) C(4 , 0)

b) $a = 4.24$ , $b = 1.73$

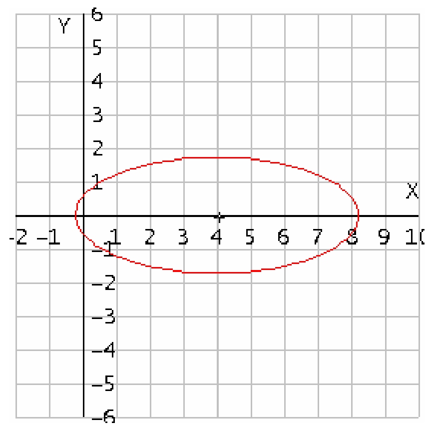
c) $V_1(–0.24\ ,\ 0)$ , $V_2(8.24\ ,\ 0)$

d) $B_1(4\ ,\ 1.73)$ , $B_2(4\ ,\ –1.73)$

e) $F_1(0.13\ ,\ 0)$ , $F_2(7.87\ ,\ 0)$

f) LR = 1.4142

g) $e = 0.91$




7) a) C(3 , –4)

b) $a = 3.46$ , $b = 3$

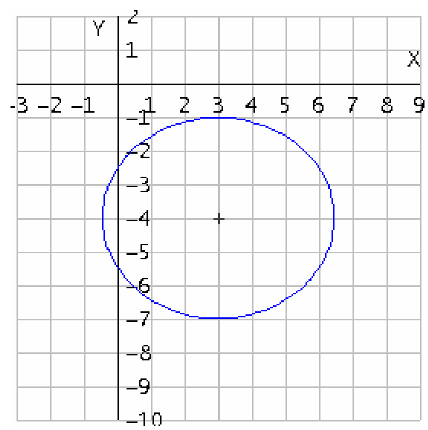
c) $V_1(–0.46\ ,\ –4)$ , $V_2(6.46\ ,\ –4)$

d) $B_1(3\ ,\ –1)$ , $B_2(3\ ,\ –7)$

e) $F_1(1.267\ ,\ –4)$ , $F_2(4.73\ ,\ –4)$

f) LR = 2.598

g) $e = 0.5$




8) a) C(–3 , 1)

b) $a = 3$ , $b = 2.236$

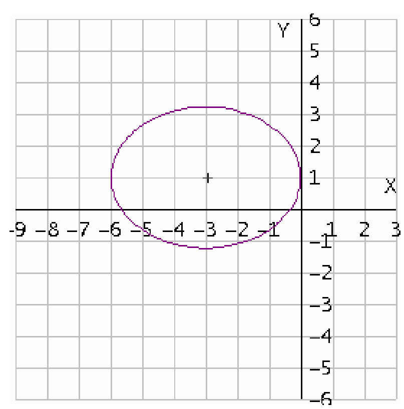
c) $V_1(–6\ ,\ 1)$ , $V_2(0\ ,\ 1)$

d) $B_1(–3\ ,\ 3.236)$ , $B_2(–3\ ,\ –1.236)$

e) $F_1(–5\ ,\ 1)$ , $F_2(–1\ ,\ 1)$

f) LR = 3.333

g) $e = \frac{2}{3}$



9) a) C(1.5 , –0.5)

b) $a$ = 3 , $b$ = 2

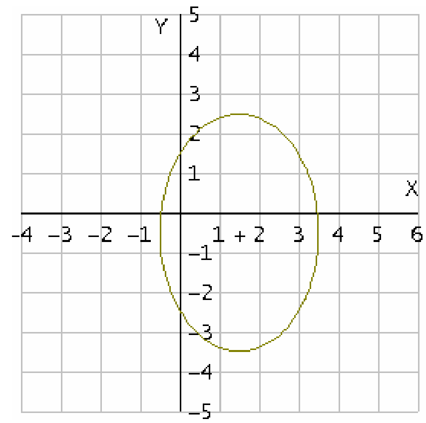
c) $V_1$(1.5, 2.5) , $V_2$(1.5 , –3.5)

d) $B_1$(–0.5 , –0.5) , $B_2$(3.5 , –0.5)

e) $F_1$(1.5 , 1.736) , $F_2$(1.5 , –2.736)

f) LR = 2.666

g) $e$ = 0.745




10) a) C(–2 , 1)

b) $a$ = 4 , $b$ = 3

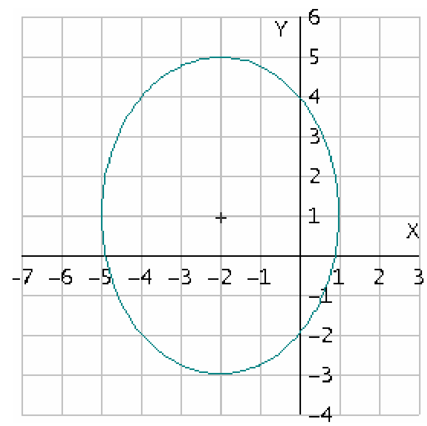
c) $V_1$(–2 , 5) , $V_2$(–2 , –3)

d) $B_1$(1 , 1) , $B_2$(–5 , 1)

e) $F_1$(–2 , 3.645) , $F_2$(–2 , –1.645)

f) LR = 4.5

g) $e$ = 0.66




11) a) C(4 , 2)

b) $a$ = 4 , $b$ = 3.46

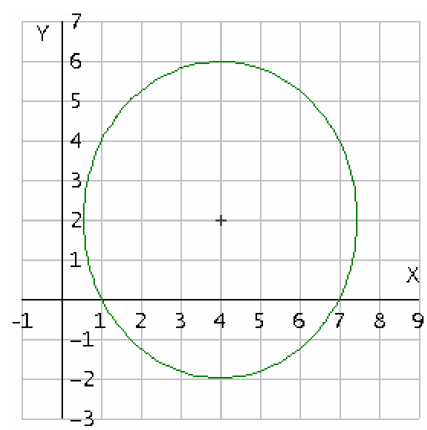
c) $V_1$(4 , 6) , $V_2$(4 , –2)

d) $B_1$(0.5 , 2) , $B_2$(7.46 , 2)

e) $F_1$(4 , 4) , $F_2$(4 , 0)

f) LR = 6

g) $e$ = 0.5




12) a) C(3 , 0)

b) $a$ =3.6645 , $b$ = 2.798

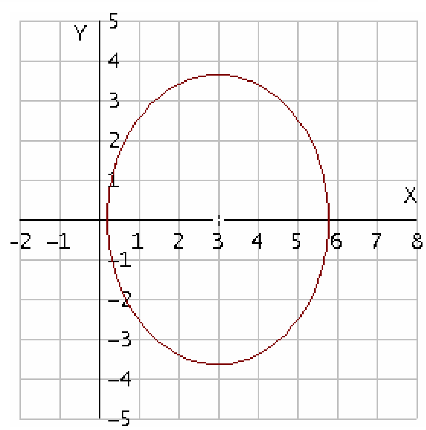
c) $V_1$(3, 3.66) , $V_2$(3 , –3.66)

d) $B_1$(0.2 , 0) , $B_2$(5.79 , 0)

e) $F_1$(3 , 2.3654) , $F_2$(3 , –2.3654)

f) LR = 4.275

g) $e$ = 0.645



**EJERCICIOS 4.5**

I. a) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

b) $21x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

c) $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$

d) $9x^2 + 4y^2 - 144 = 0$

e) $16x^2 + 27y^2 - 576 = 0$

f) $4x^2 + y^2 - 52 = 0$

g) $25x^2 + 9y^2 + 100x - 72y + 19 = 0$

h) $3x^2 + 7y^2 - 12x + 42y + 54 = 0$

i) $4x^2 + 3y^2 + 8x + 12y - 32 = 0$

j) $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$

k) $9x^2 + 5y^2 + 72x - 10y + 31 = 0$

l) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 200y + 256 = 0$

m) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

II. 1) $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{9} = 1$; C(0 , 0); $a = 6$ y $b = 3$; $V_1(-6 , 0)$, $V_2(6 , 0)$; $B_1(0 , 3)$, $B_2(0 ,-3)$;
$F_1(-5.19 , 0)$, $F_2(5.19 , 0)$; LR = 8/5; $e = 0.866$

2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; C(0 , 0); $a = 2$ y $b = 1.732$; $V_1(-2 , 0)$, $V_2(2 , 0)$; $B_1(0 , 1.73)$,
$B_2(0 ,-1.73)$; $F_1(-1 , 0)$, $F_2(1 , 0)$; LR = 3; $e = 0.5$

3) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$; C(0 , 0); $a = 4$ y $b = 1$; $V_1(-4 , 0)$, $V_2(4 , 0)$; $B_1(0 , 1)$, $B_2(0 ,-1)$
$F_1(-3.87 , 0)$, $F_2(3.87 , 0)$; LR = 0.5; $e = 0.968$

4) $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$; C(0 , 0); $a = 1.414$ y $b = 1$; $V_1(0 , 1.41)$, $V_2(0 , -1.41)$;
$B_1(-1 , 0)$, $B_2(1 , 0)$; $F_1(0 , 1)$, $F_2(0 , -1)$; LR = 1.414; $e = 0.7$

5) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{20} = 1$; C(0 , 0); $a = 4.47$ y $b = 3.87$; $V_1(0 , 4.47)$, $V_2(0 , -4.47)$;
$B_1(3.87 , 0)$, $B_2(-3.87 , 0)$; $F_1(0 , 2.23)$, $F_2(0 , -2.23)$; LR = 6.7; $e = 0.5$

6) $\frac{(x+5)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$; C(–5 , 1); $a = 5$ y $b = 1$; $V_1(-5 , 6)$, $V_2(-5 , -4)$;
$B_1(-6 , 1)$, $B_2(-4 , 1)$; $F_1(-5 , 5.89)$, $F_2(-5 , -3.89)$; LR = 0.4; $e = 0.97$

7) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{64} = 1$; C(–5 , 3); $a = 8$ y $b = 4$; $V_1(-5 , 11)$, $V_2(-5 , -5)$;
$B_1(-9 , 3)$, $B_2(-1 , 3)$; $F_1(-5 , 9.9)$, $F_2(-5 , -3.9)$; LR = 4; $e = 0.86$

8) $\frac{x^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$; C(0 , –1); $a = 4$ y $b = 2.23$; $V_1(0 , 3)$, $V_2(0 , -5)$;

$B_1(-2\ ,\ -1)$, $B_2(2\ ,\ -1)$; $F_1(0\ ,\ 2.31)$, $F_2(0\ ,\ -4.31)$; LR = 2.5; $e$ = 0.829

9) $\dfrac{(x-4)^2}{17}+\dfrac{y^2}{9}=1$; C(4 , 0); $a$ = 4.12 y $b$ = 3; $V_1(-0.12\ ,\ 0)$, $V_2(8.12\ ,\ 0)$;

$B_1(4\ ,\ 3)$, $B_2(4\ ,\ -3)$; $F_1(1.17\ ,\ 0)$, $F_2(6.82\ ,\ 0)$; LR = 4.36; $e$ = 0.685

10) La ecuación no representa a una elipse ni a otra curva.

11) $\dfrac{(x-3)^2}{6}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$; C(3 , –2); $a$ = 3 y $b$ = 2.449; $V_1(3\ ,\ 1)$, $V_2(3\ ,\ -5)$;

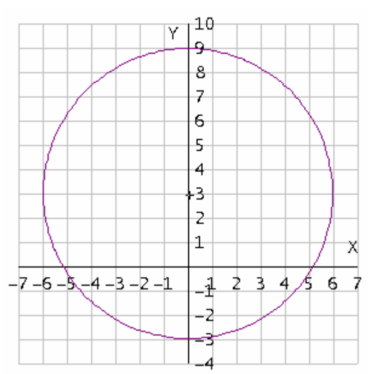
$B_1(0.55\ ,\ -2)$, $B_2(5.44\ ,\ -2)$; $F_1(3\ ,\ -0.26)$, $F_2(3\ ,\ -3.73)$; LR = 4; $e$ = 0.57

12) $\dfrac{(x-7)^2}{9}+\dfrac{4(y+3)^2}{27}=1$; C(7 , –3); $a$ = 3 y $b$ = 2.59; $V_1(4\ ,\ -3)$, $V_2(10\ ,\ -3)$;

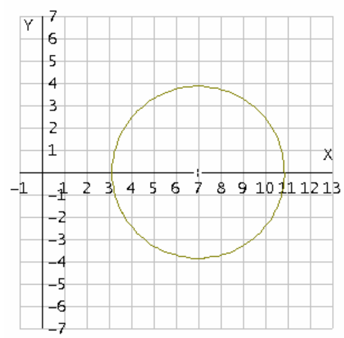
$B_1(7\ ,\ -0.41)$, $B_2(7\ ,\ -5.59)$; $F_1(5.5\ ,\ -3)$, $F_2(8.5\ ,\ -3)$; LR = 4.5; $e$ = 0.5

## EJERCICIOS 4.7

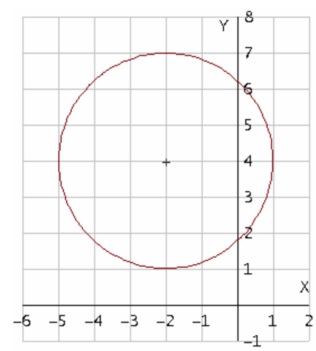
**1)** $x^2+(y-3)^2=36$



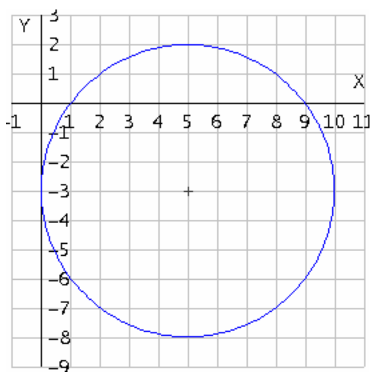

**2)** $(x-7)^2+y^2=15$



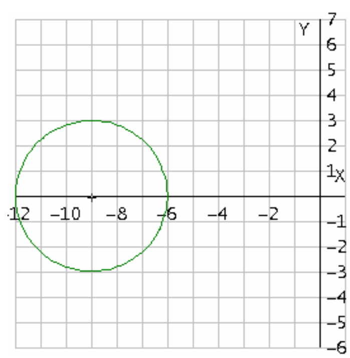

**3)** $(x+2)^2+(y-4)^2=9$



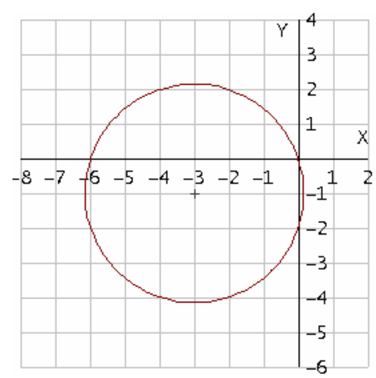

**4)** $(x-5)^2+(y+3)^2=25$



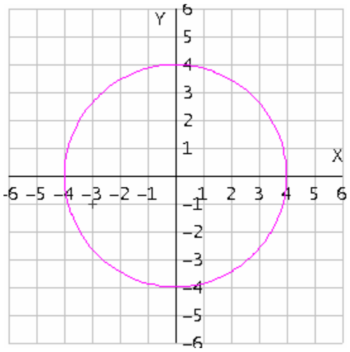

**5)** $(x+9)^2+y^2=4$



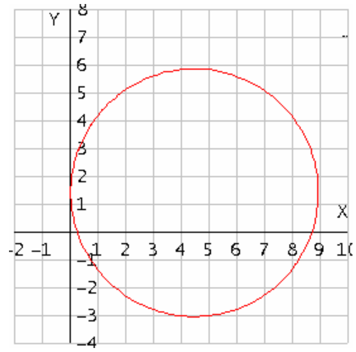

**6)** $(x+3)^2+(y+1)^2=10$



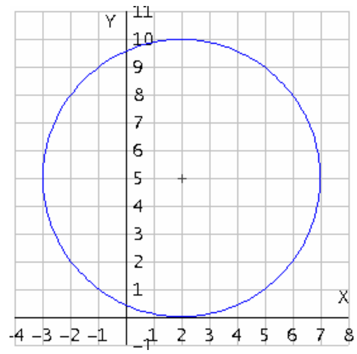
**7)** $x^2 + y^2 = 16$



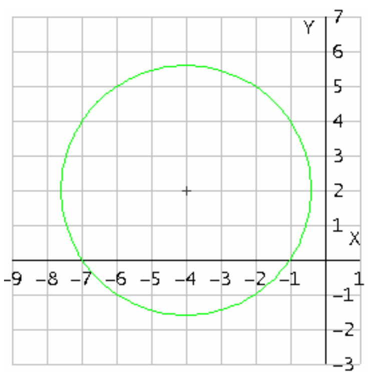

**8)** $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=20$



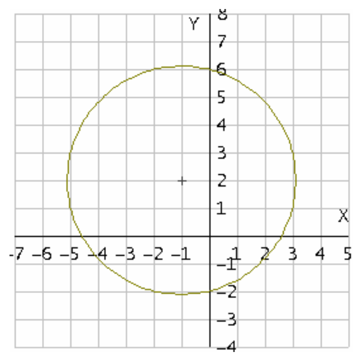

**9)** $(x-2)^2+(y-5)^2=25$



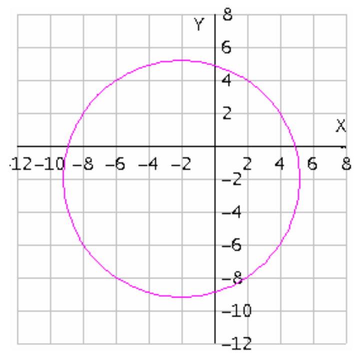

**10)** $(x+4)^2+(y-2)^2=13$



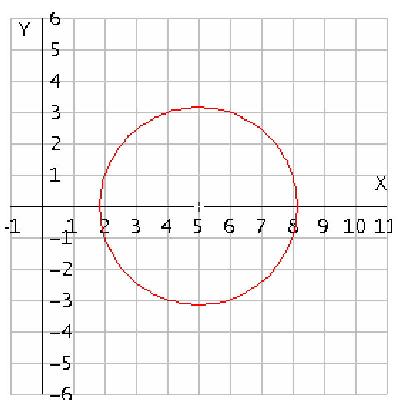

**11)** $(x+1)^2+(y-2)^2=17$



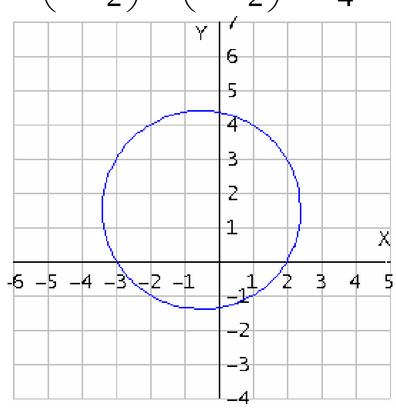

**12)** $(x+2)^2+(y+2)^2=52$




**13)** $(x-5)^2+y^2=10$




**14)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{34}{4}$




**EJERCICIOS 4.7.1**

1. Circunferencia
2. No tiene representación gráfica
3. Punto
4. Punto
5. No tiene representación gráfica
6. Punto

7. Circunferencia

8. Circunferencia

9. No tiene representación gráfica

10. Circunferencia

**EJERCICIOS 4.8**

1) $x^2 + y^2 = 4$ ; $x^2 + y^2 - 4 = 0$

2) $x^2 + y^2 = 16$ ; $x^2 + y^2 - 16 = 0$

3) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ ; $x^2 + y^2 - 6x = 0$

4) $x^2 + (y-2)^2 = 25$ ; $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$

5) $x^2 + (y+7)^2 = 30$ ; $x^2 + y^2 + 14y + 19 = 0$

6) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 15$ ; $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 14 = 0$

7) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 17$ ; $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 17 = 0$

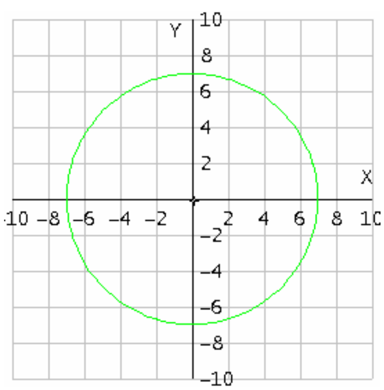
8) $(x - \frac{5}{3})^2 + (y + \frac{10}{3})^2 = 25$ ; $9x^2 + 9y^2 - 30x + 60y - 100 = 0$

9) $(x - \frac{5}{3})^2 + (y+4)^2 = 81$ ; $4x^2 + 4y^2 + 4x + 32y - 259 = 0$

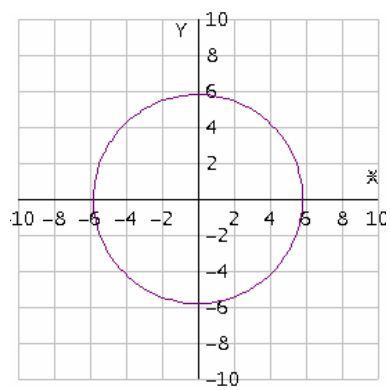
10) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = \frac{25}{9}$ ; $9x^2 + 9y^2 + 18x + 54y + 65 = 0$

**EJERCICIO 4.8.2**

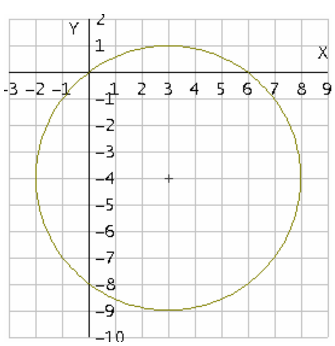
1) $C(0, 0)$; $r = \sqrt{49} = 7$



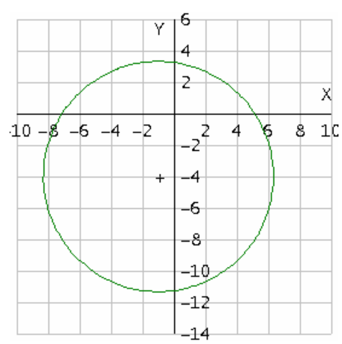
2) $C(0, 0)$; $r = \sqrt{34}$



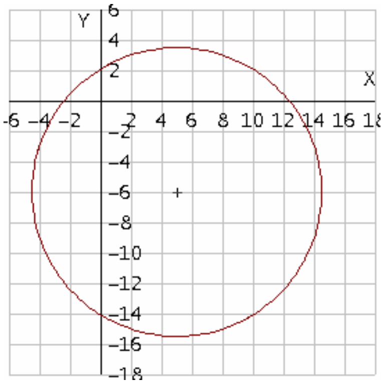
3) $C(3, -4)$; $r = 5$



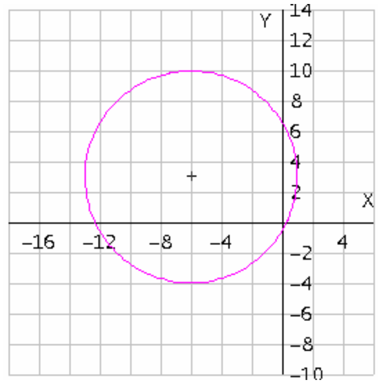
4) $C(-1, -4)$; $r = \sqrt{54}$



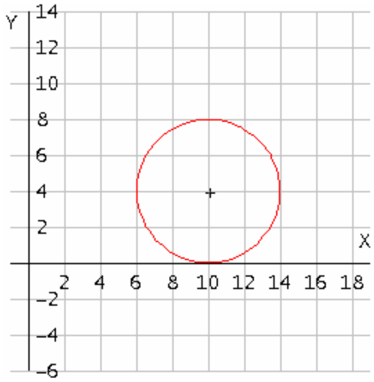
5) $C(5\ ,\ -6);\ \ r = \sqrt{91}$



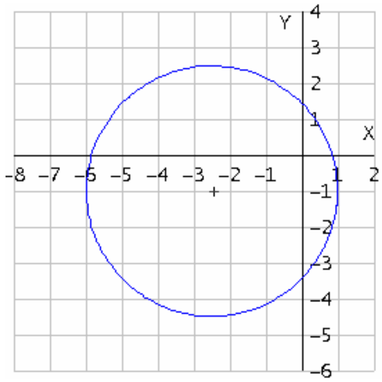
6) $C(-6\ ,\ 3);\ \ r = 7$



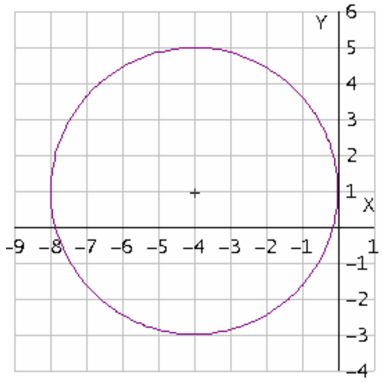
7) $C(10\ ,\ 4);\ \ r = 4$



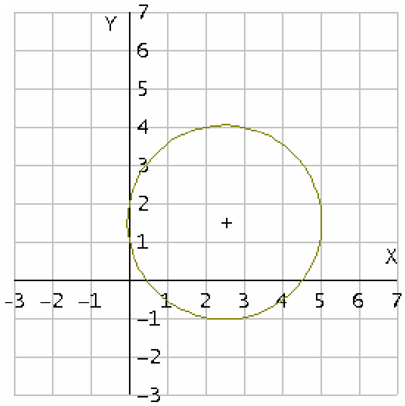
8) $C\left(-\frac{5}{2}, -1\right);\ \ r = \frac{7}{2}$



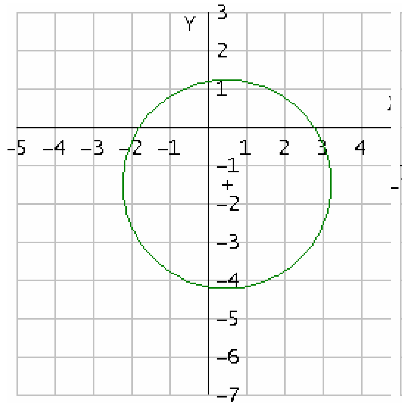
9) $C(-4\ ,\ 1);\ \ r = 4$



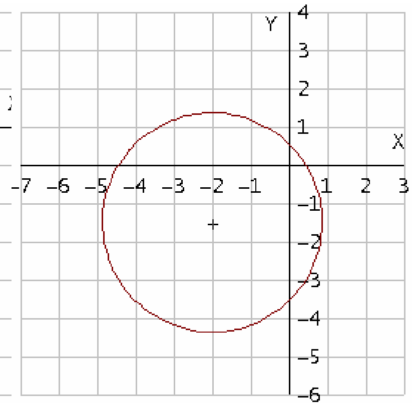
10) $C\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right);\ \ r = \frac{\sqrt{26}}{2}$



11) $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right);\ \ r = \sqrt{\frac{15}{2}}$



12) $C\left(-2, -\frac{3}{2}\right);\ \ r = \frac{\sqrt{33}}{2}$



**EJERCICIOS 4.9**

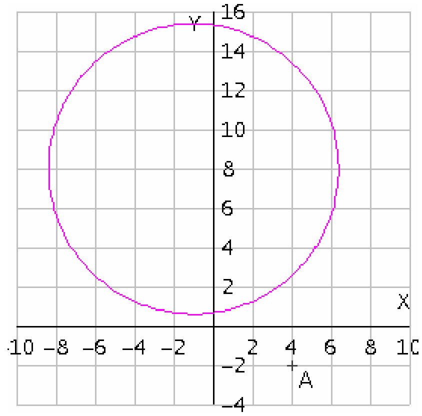
1. Ordinaria $(x-3)^2+(y+1)^2=29$ ; General $x^2+y^2-6x+2y-19=0$

2. Ordinaria $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ; General $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

3. Ordinaria $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ; General $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

4. Perímetro $=2\sqrt{76}\,\pi$; Área $=76\pi$.

5. El punto está **fuera** de la circunferencia ya que el radio de la circunferencia es 7.4 y $d(AC)=11.18$.
   Su gráfica quedaría así:




6. Dos soluciones:
   1) Ordinaria $(x-1)^2+(y-2)^2=20$ ; General $x^2+y^2-x-4y-15=0$
   2) Ordinaria $(x+1)^2+(y-8)^2=25$ ; General $x^2+y^2+2x-16y-45=0$

7. $x^2+y^2+8x+10y+40=0$

8. $x+y-12=0$
9. Dos soluciones:
   1) Ordinaria $(x-1)^2+(y-16)^2=74$ ; General $x^2+y^2-2x-32y+183=0$
   2) Ordinaria $(x-15)^2+(y-6)^2=74$ ; General $x^2+y^2-30x-12y+187=0$

10. $x^2+y^2-6x+8y-49=0$

11. $x^2+y^2-6y-16=0$

## SOLUCIÓN DE LA AUTOEVALUACIÓN

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$

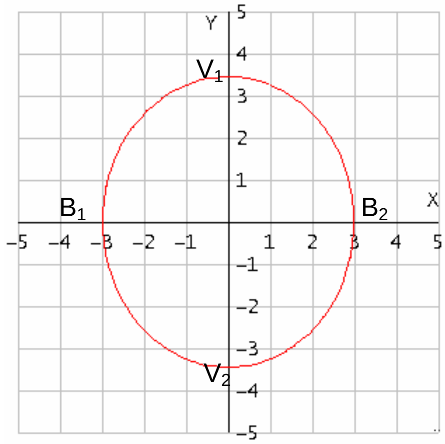
   $a = \sqrt{12}$ , $b = 3$

   $V_1(0\,,\ \sqrt{12}\,)$ , $V_2(0\,,\ -\sqrt{12}\,)$

   $B_1(-3\,,\ 0)$ , $B_2(3\,,\ 0)$

   $F_1(0\,,\ \sqrt{3}\,)$ , $F_2(0\,,\ -\sqrt{3}\,)$

   LR = $\sqrt{27}$ $\quad e = ½$




2. $x^2 + 3y^2 - 16 = 0$

3. $\frac{(x-6)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1$

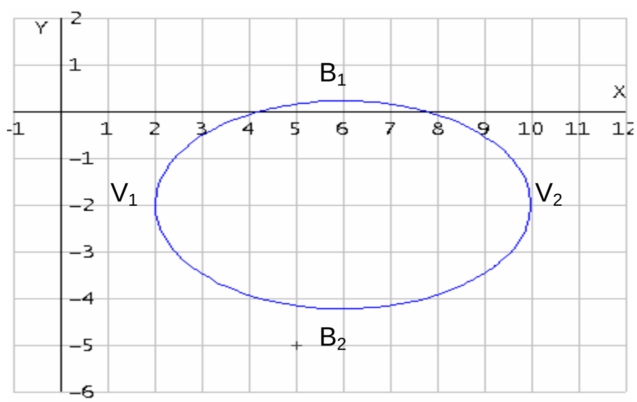
   C(6 , –2) $\quad a = 4$ , $b = \sqrt{5}$

   $V_1(10\,,\ -2)$ , $V_2(2\,,\ -2)$

   $B_1(6\,,\ 0.23)$ , $B_2(6\,,\ -4.23)$

   $F_1(9.31\,,\ -2)$ , $F_2(2.68\,,\ -2)$

   LR = 5/2 $\quad$ e = 0.829




4. $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

5. Ecuación ordinaria $\quad (x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$

   Ecuación general $\quad x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

6. Ecuación ordinaria $\quad (x+3)^2 + (y-7)^2 = 4$

   Ecuación general $\quad x^2 + y^2 + 6x - 14y + 54 = 0$

7. Ecuación de la tangente $\quad 4x - 3y - 34 = 0$

# BIBLIOGRAFIA

- Sullivan, M., Trigonometría y Geometría Analítica, 1997, Editorial Prentice Hall.
-
- Fundamentos de Geometría Analítica, Unidad VII; Elipse; Dirección General de Proyectos Académicos, 1988, Ediciones SUA, UNAM.
- Arquímedes Caballero, Geometría Analítica, 1990, Editorial Esfinge S. A.
- Fuller, G. Geometría Analítica, 1989, Por Compañía Editorial Continental.
- Middlemiss Ross R., Geometría Analítica, Mc Graw Hill, México,1988.
- Lehmann, Charles H. Geometría Analítica, Limusa, México 1981.
- Rees, Paul K. Geometría Analítica. Reverté Mexicana, México 1986.

**REACTIVOS DE LA UNIDAD 4: ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS**

Para complementar tu estudio sobre esta unidad debes de resolver los siguientes reactivos ya que tu examen extraordinario puede estar formado con preguntas muy parecidas a las que te presentamos a continuación.
Cada reactivo tiene asignada una letra que corresponde a su clasificación según el grado de dificultad, F: fácil, R: regular y D: difícil.
Te recomendamos que los clasificados como D los dejes al final y si es necesario pide ayuda a algún profesor, esperamos no tengas mayor problema con los ejercicios marcados con R y menos con los F.

**ELIPSE**

1(F).- La ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen es de la forma:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = -1$ c) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = -1$

d) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2(F).- La ecuación de la elipse vertical con centro en el origen es de la forma:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ c) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

d) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3( F ).- Encuentra la ecuación que corresponde a una elipse.

a) $\frac{(x+8)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-2)}{2} + \frac{(y-9)}{8} = 1$

c) $\frac{(x+4)^3}{16} + \frac{(y-7)^3}{25} = 1$ d) $\frac{(x+6)^2}{25} + \frac{(y+10)^2}{64} = 1$

e) $\frac{(x+2)}{9} - \frac{(y+1)}{16} = 1$

4( F ).- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como gráfica una elipse?.

a) $x^2 - 2y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ b) $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$

c) $5x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$ d) $2x^2 + 8x + 2y + 7 = 0$

e) $x + 3y^2 - 2y + 6x - 1 = 0$

5( F ).- Encuentra la ecuación que **no** corresponde a una elipse.

a) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+8)^2}{9}=1$

c) $\frac{(x-7)^2}{6}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$ d) $\frac{(x-9)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

e) $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{6}=1$

6( F ).- Cuál de las siguientes ecuaciones no tiene como gráfica una elipse

a) $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ b) $2x^2 + 7y^2 - 4 = 0$ c) $4x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$

d) $-4x^2 - 2y^2 + 16x - 4y + 10 = 0$ e) $4x^2 - y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

7(R).- Los focos de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$ son:

a) $F_1$ (0 , 1) , $F_2$ (0 , –1) b) $F_1$ (1 , 0 ) , $F_2$ (0 , 1)

c) $F_1$ (1 , 0) , $F_2$ (1 , 0) d) $F_1$ (1 , 0) , $F_2$ (–1 , 0)

e) $F_1$ (0 , 1) , $F_2$ (–1 , 0)

8(R).- Los focos de la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ son:

a) $F_1$(0 , 1) , $F_2$ ( 0 , –1 ) b) $F_1$ (0 , 3) , $F_2$ (0 , –3 )

c) $F_1$(3 , 0) , $F_2$ (–3 , 0) d) $F_1$ (1 , 0) , $F_2$ (–1 , 0)

e) $F_1$(0 , 2 ) , $F_2$ (0 , –2 )

9(R).- Los vértices de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ son:

a) $V_1$ (0 , 5) , $V_2$ (0 , –5) b) $V_1$ ( 3 , 0 ) , $V_2$ (–3 , 0)

c) $V_1$ (5 , 0) , $V_2$ (–5 , 0) d) $V_1$ (4 , 0) , $V_2$ (–4 , 0)

e) $V_1$ (0 , 4 ) , $V_2$ (0 , –4 )

10(R).- Los vértices de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 192$ son:

a) $V_1$ ( 8 , 0 ) , $V_2$ (–8 , 0 ) b) $V_1$ ( 2 , 0 ) , $V_2$ (–2 , 0)

c) $V_1$ ( 0 , 2 ) , $V_2$ (–2 , 0 ) d) $V_1$ ( 7 , 0 ) , $V_2$ (–7 , 0 )

e) $V_1$ ( 0 , 8 ) , $V_2$ ( 0 , –8 )

11(R).- Los extremos del lado recto de la elipse $25x^2 + 20y^2 = 100$ son:

a) $L_1$ (12.5 , 1.8) , $R_1$ (12.5 , –1.8) , $L_2$ (–12.5 , 1.8) , $R_2$ (–12.5 , –1.8)

b) $L_1\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, 1\right)$, $R_1\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, 1\right)$, $L_2\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -1\right)$, $R_2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -1\right)$

c) $L_1$ ( 4 , 1.8 ) , $R_1$ ( 4 , –1.8 ) , $L_2$ ( 4 , 1.8 ) , $R_2$ (–4 , –1.8 )

d) $L_1$ ( 12.5 , 1.8) , $R_1$ ( 12.5 , –1.8 ) , $L_2$ ( 12.5 , –1.8 ) , $R_2$ ( 12.5 , 1.8 )

e) $L_1\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -1\right)$, $R_1\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, 1\right)$, $L_2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, 1\right)$, $R_2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -1\right)$

12(R).- Los extremos del lado recto de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$ son:

a) $L_1$ ( 4 , 1.8 ) , $R_1$ ( 4 , –1.8 ) , $L_2$ (–4 , 1.8 ) , $R_2$ (–4 , –1.8 )

b) $L_1$ ( 1 , 1.5 ) , $R_1$ ( 1 , – 1.5 ) , $L_2$ (–1 , 1.5 ) , $R_2$ (–1 , –1.5 )

c) $L_1$ ( 4 , 1.8 ) , $R_1$ (–4 , –1.8 ) , $L_2$ ( 4 , 1.8 ) , $R_2$ (–4 , –1.8 )

d) $L_1$ ( 4 , 3) , $R_1$ ( 4 , –3) , $L_2$ (–4 , 3) , $R_2$ (–4 , –3 )

e) $L_1$ ( 1 , –1.5 ) , $R_1$ ( 1 , 1.5 ) , $L_2$ (–4 , 1.8 ) , $R_2$ (–4 , –1.8 )

13(R).- La longitud del eje mayor de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ es:

a) 5 b) 6 c) 9 d) 25 e) 10

14(R).- La longitud del eje menor de elipse $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$ es:

a) 225 b) 289 c) 14 d) 30 e) 15

15(F) Encuentra la ecuación que corresponde a una elipse con centro C( 2 , – 1 )

a) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

b) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

c) $\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$

d) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

e) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

16(F) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una elipse cuyo eje mayor mide 8?

a) $\frac{(x+8)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y-9)^2}{8}=1$

c) $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-7)^2}{25}=1$ d) $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+10)^2}{64}=1$

e) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

17(F) Encuentra la ecuación que tiene como gráfica una elipse cuyo eje menor mide 6.

a) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+8)^2}{9}=1$

c) $\frac{(x-7)^2}{6}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$ d) $\frac{(x-9)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

e) $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{6}=1$

18(F) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una elipse y su eje focal es una recta paralela al eje de las abscisas ( eje X )?.

a) $\frac{(x+8)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y-9)^2}{8}=1$

c) $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-7)^2}{25}=1$ d) $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+10)^2}{64}=1$

e) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

19(F) Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una elipse y su eje focal es una recta paralela al eje de las ordenadas ( eje Y ).

a) $\frac{(x+4)^2}{8}+\frac{(y+7)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y-9)^2}{10}=1$

c) $\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{16}=1$ d) $\frac{(x+6)^2}{28}+\frac{(y+10)^2}{25}=1$

e) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

20(R).- La ecuación de la elipse con eje mayor paralelo al eje $X$, centro en (2 ,1), a = 5 , b = 3 es:

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$  b) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

c) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$  d) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

e) $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

21(R).- La ecuación de la elipse con el eje mayor paralelo al eje $Y$, centro en C(–2 , –3) y el valor de sus parámetros a = 13, b = 12 es:

a) $\frac{(x+2)^2}{144} + \frac{(y+3)^2}{169} = 1$  b) $\frac{(x+2)^2}{169} + \frac{(y+3)^2}{144} = 1$

c) $\frac{(x+2)^2}{169} - \frac{(y+3)^2}{144} = 1$  d) $\frac{(x+2)^2}{144} - \frac{(y+3)^2}{169} = 1$

e) $\frac{(x-2)^2}{144} + \frac{(y-3)^2}{169} = 1$

22(R).- La ecuación de la elipse con centro en el origen y cuyos focos están sobre el eje $X$, y la longitud del eje mayor es 8 y la del eje menor 6 es:

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$  b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$  e) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

23(R).- La ecuación de la elipse con centro en el origen y cuyos focos están sobre el eje $Y$. La longitud del eje mayor es 12 y la del eje menor 10 es:

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{144} = 1$  b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$  c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

d) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{12} = 1$  e) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

24(D).- La ecuación de la elipse con centro en el origen cuyo lado recto vale 12 y los focos son los puntos A(–4 , 0 ) y B(4 , 0 ) es:

a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

d) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$ e) $\frac{x^2}{38}+\frac{y^2}{64}=1$

25(D).- La ecuación de la elipse con centro en el origen cuya longitud del lado recto vale 9 y los focos son los puntos A( 0 , 3) y B( 0 , –3 ) es:

a) $25x^2+16y^2=400$ b) $27x^2+36y^2=972$ c) $36x^2+27y^2=972$

d) $25x^2+9y^2=225$ e) $16x^2+25y^2=400$

26(R).- La ecuación de la elipse con centro en el origen y vértices en $V_1(6,0)$, $V_2(-6,0)$ y $b=5$ es:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ c) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$

d) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{6}=1$ e) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{10}=1$

27(R).- La ecuación de la elipse con centro en el origen y cuyos vértices son $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ y $b=3$ es:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1$ c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{11}=1$ e) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{36}=1$

28(R).- $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ es la ecuación en la forma ordinaria de la elipse con centro en $C(4,-3)$, el eje mayor mide 6, el eje menor mide 4 y su eje focal es paralelo al eje de las abscisas ( eje $X$ ). Cuál es la ecuación en la forma general de esta elipse.

a) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ b) $x^2+y^2-4=0$ c) $x^2+y^2+4=0$

d) $4x^2+9y^2-32x+54y+109=0$ e) $x^2+y^2-4x-2y-14=0$

29(R).- Hallar la ecuación que tiene como gráfica una elipse con centro $C(2,-1)$.

a) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$
b) $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$
c) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
d) $2x^2 + y^2 + 8x + 2y + 7 = 0$
e) $2x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

30(R).- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una elipse y su eje mayor mide 4?

a) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
b) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
c) $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$
d) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$
e) $x^2 + 4y^2 + 4 = 0$

31(R).- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una elipse cuyo eje menor mide 2?

a) $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$
b) $2x^2 + y^2 - 4 = 0$
c) $4x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$
d) $4x^2 + 2y^2 + 16x - 4y + 10 = 0$
e) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

32(D).- Considera la elipse que pasa por el punto P( 2 , 10) y tiene como focos los los puntos $F_1(2, 4)$ y $F_2(10, 4)$. ¿Cuánto mide el eje mayor de la elipse?.

a) 10
b) 11
c) 14
d) 16
e) 17

33(R).- Considera la elipse que cada uno de los lados rectos mide 2 y sus vértices son los puntos $V_1(-3, 2)$ y $V_2(15, 2)$. ¿Cuánto mide el eje menor de esta elipse?.

a) 3
b) 4
c) 6
d) 8
e) 9

34(R).- La gráfica de la ecuación $4x^2 + y^2 + 8x - 16y + 64 = 0$ es:

a) un punto
b) una elipse
c) el conjunto vacío
d) una circunferencia
e) un par de rectas

35(R).- La gráfica de la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x - 18y + 46 = 0$ es:

a) un punto
b) una elipse
c) el conjunto vacío
d) una circunferencia
e) una recta que pasa por el origen

36(R).- Los focos de la elipse $9x^2 + 8y^2 + 54x - 16y - 199 = 0$ son:

a) $F_1(-3, 3)$, $F_2(-3, -1)$　　b) $F_1(2, 0)$, $F_2(0, -2)$

c) $F_1(0, 2)$, $F_2(2, 0)$　　d) $F_1(3, -1)$, $F_2(1, -3)$

e) $F_1(1, 3)$, $F_2(-3, -1)$

37(R).- Los focos de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 12 = 0$ son:

a) $F_1(-3, 3)$, $F_2(-3, -1)$　　b) $F_1(\frac{\sqrt{5}}{6}+1, 1)$, $F_2(\frac{\sqrt{5}}{6}+1, -1)$

c) $F_1(0, 2)$, $F_2(2, 0)$　　d) $F_1(-3, -1)$, $F_2(3, -1)$

e) $F_1(1 - \frac{\sqrt{5}}{6}, -1)$, $F_2(1 + \frac{\sqrt{5}}{6}, -1)$

38(F).- Si en la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ el valor del discriminante $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ es mayor que cero, la gráfica de la ecuación representa:

a) una circunferencia　　b) una elipse　　c) un punto

d) el conjunto vacío　　e) un par de rectas

39(F).- Si en la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ el valor del discriminante $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ es igual a cero, la gráfica de la ecuación representa:

a) una circunferencia　　b) una elipse　　c) un punto

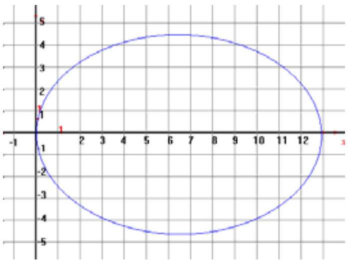
d) el conjunto vacío　　e) un par de rectas

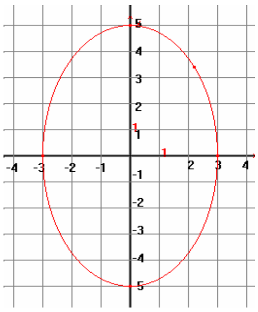
40(F).- Si en la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ el valor del discriminante $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ es menor que cero, la gráfica de la ecuación representa:

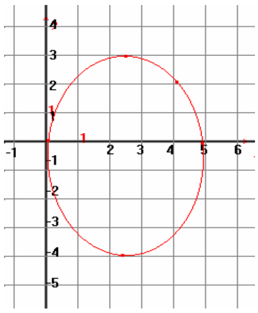
a) una circunferencia　　b) una elipse　　c) un punto

d) el conjunto vacío　　e) un par de rectas

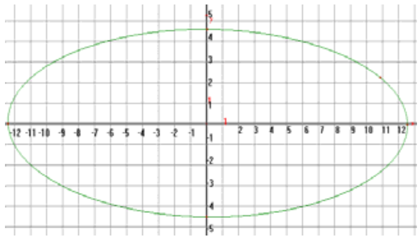
41(F) .- Elige la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

a) 

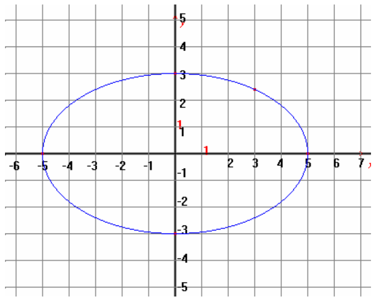
b) 

c) 

d)

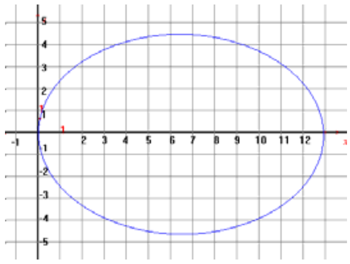


e)

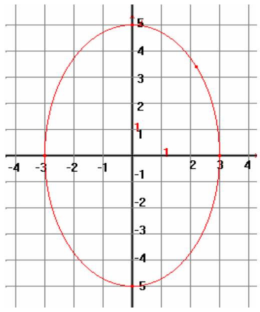


42(F) .- Elige la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

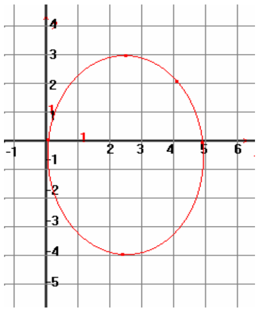
a)



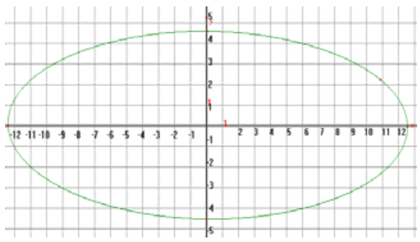
b)



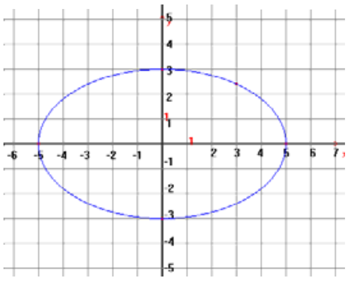
c)



d)

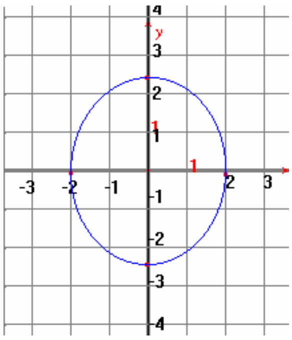


e)

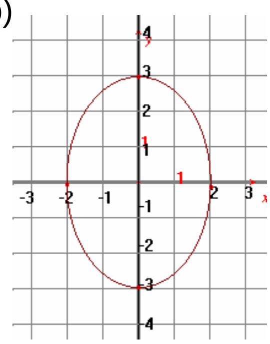


43(F) .- Una elipse con ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6} = 1$ tiene por gráfica a:

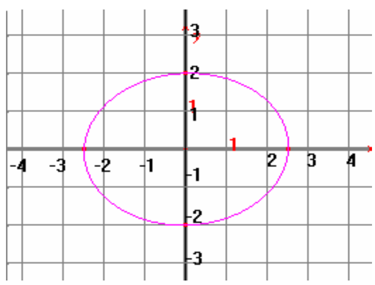
a)



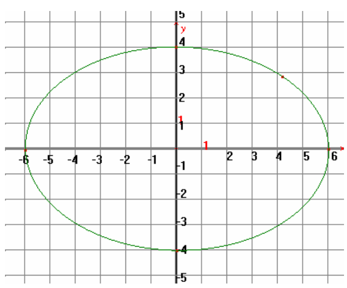
b)



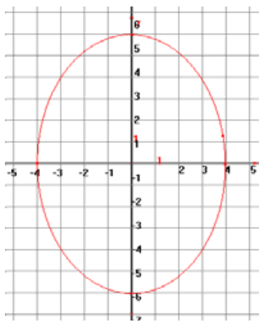
c)



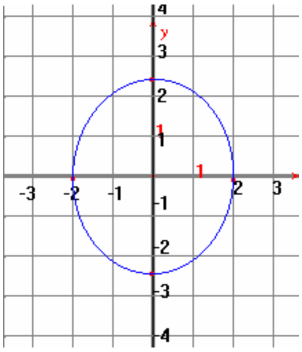
d)

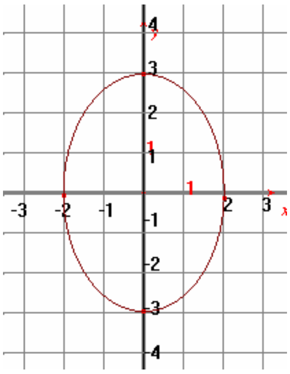


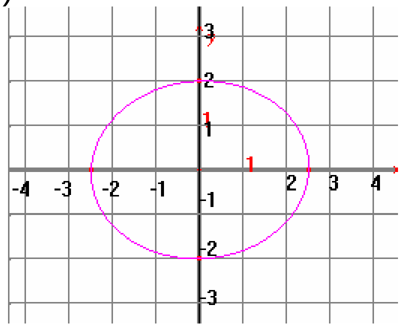
e)

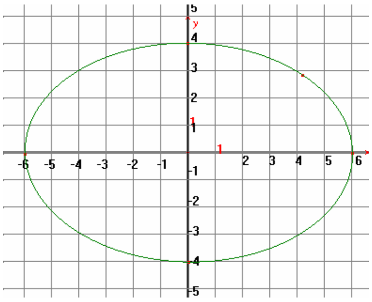


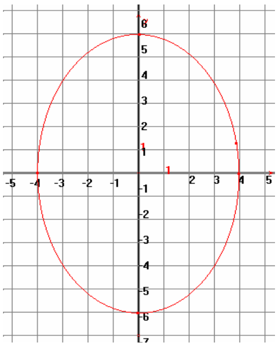
44(F) .- Una elipse con ecuación $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ tiene por gráfica a:

a)


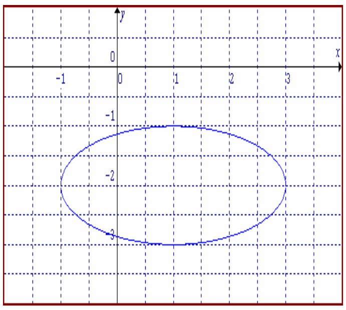
b)


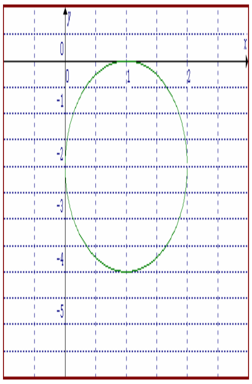
c)


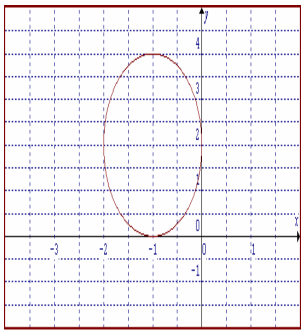
d)


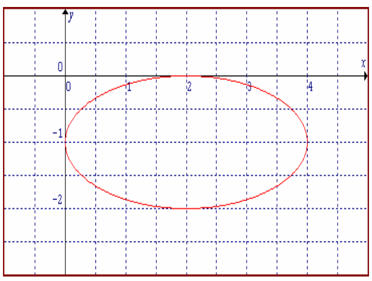
e)


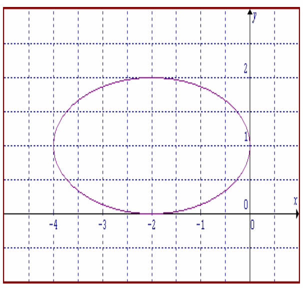
45(R) .- Una elipse con ecuación $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$ tiene por gráfica a:

a)


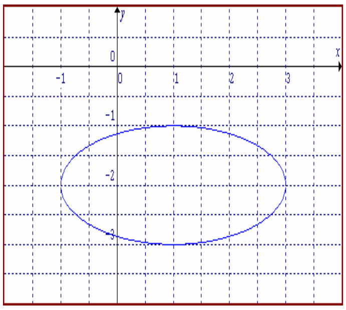
b)


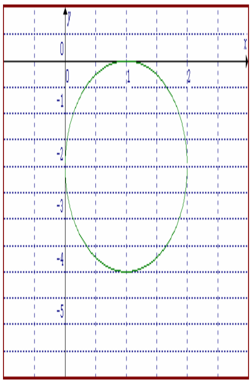
c)


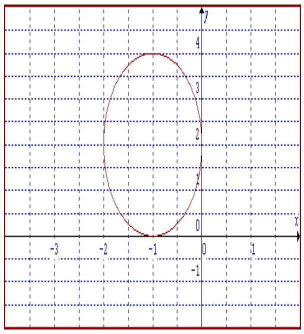
d)


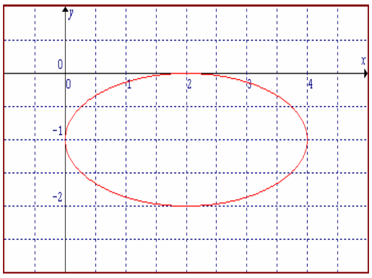
e)


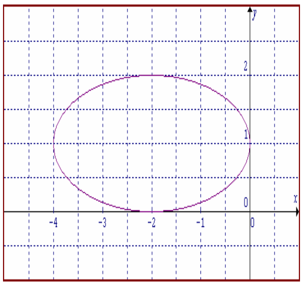
46(F) .- Una elipse con ecuación $\dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ tiene por gráfica a:

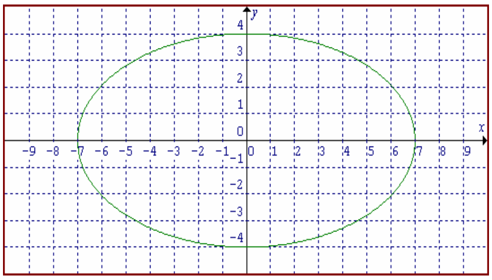
a) 

b) 

c) 

d) 

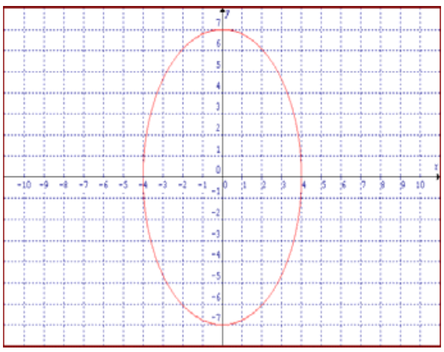
e) 

47(F).- La gráfica de una elipse es 

La ecuación que la representa esta dada por:

a) $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{14} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ c) $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

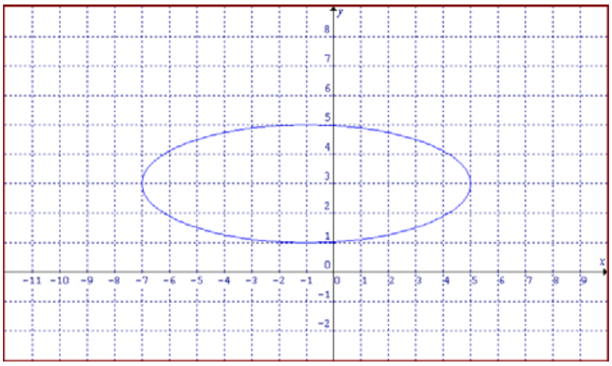
d) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ e) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

48(F).- La elipse  tiene por ecuación:

a) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{8} = 1$ c) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$ e) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$

49(R).- ¿Cuál es la ecuación de la siguiente elipse?

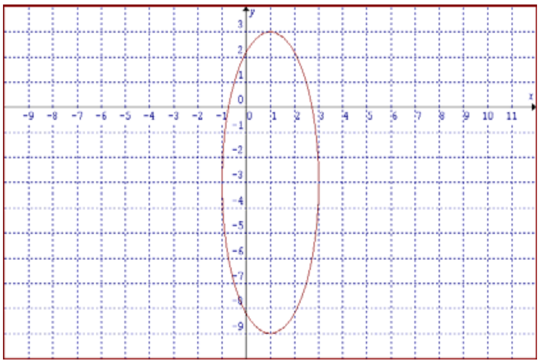


a) $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

c) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

e) $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1$

50(R).- ¿Cuál es la ecuación de la siguiente elipse?



a) $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

c) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

e) $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1$

**CIRCUNFERENCIA**

51(R).- La forma ordinaria o canónica de la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C( $h$ , $k$) y radio $r$ es:

a) $(x + h)^2 + (y + k)^2 = r^2$  b) $x^2 + y^2 - r = 0$  c) $x^2 + y^2 = r^2$
d) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  e) $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$

52(F).- La forma general de la ecuación de una circunferencia es:

a) $x^2 + y^2 = r^2$  b) $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  c) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
d) $x^2 + y^2 + xy + c = 0$  e) $(x + h)^2 + (y + k)^2 = r^2$

53(F).- La ecuación de la circunferencia con centro en A(0,0) y radio $r$ es:

a) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  b) $x^2 + y^2 = 0$  c) $x^2 + y^2 = 25$
d) $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  e) $x^2 + y^2 = r^2$

54(F).- La ecuación general de la circunferencia con centro en A(5,0) y radio 2 es:

a) $x^2 + y^2 - 10x + 25 = 0$  b) $x^2 + y^2 - 5x + 21 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$  d) $x^2 + y^2 + 5x + 25 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 5x + 25 = 0$

55(F).- La ecuación general de la circunferencia con centro en A(1,2) y radio 5 es:

a) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$  b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$  d) $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 25 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 25 = 0$

56(F).- La ecuación general de la circunferencia con centro en A($-3$ , 5) y radio 3 es:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 25 = 0$  b) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 25 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 25 = 0$  d) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 25 = 0$
e) $x^2 + y^2 = 9$

57(F).- La ecuación general de la circunferencia con centro en A($-4$ , $-3$) y radio $\sqrt{10}$ es:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 10 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 35 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 25 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 35 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 15 = 0$

58(F).- Para encontrar la ecuación de la circunferencia con dos puntos como extremos de uno de sus diámetros hay que encontrar:

a) La recta tangente y el punto medio
b) El punto medio
c) El diámetro y dividirlo entre dos
d) El punto medio y el radio
e) Las coordenadas del punto medio

59(R).- La ecuación de la circunferencia con los puntos A(0 , 0) y B(6 , 0) como extremos de un diámetro es:

a) $x^2 + y^2 - 6x = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 6x = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - 5 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 6x + 3y + 5 = 0$

60(R).- La ecuación en forma ordinaria o canónica de la circunferencia con los puntos A(3 , $-1$) y B(5 , 7) como extremos de uno de sus diámetros es:

a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 68$
b) $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 68$
c) $x^2 + y^2 - 17 = 0$
d) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 17$
e) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 34$

61(R).- La ecuación de la circunferencia que tiene el centro en A( 4 , –1 ) y pasa por el punto B(0 , 0) es:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 0$
b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$
d) $x^2 - y^2 - 8x + 2y - 1 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 8x - 2y = 0$

62(R).- La ecuación general de la circunferencia que tiene el centro en A( 4 , –1 ) y pasa por el punto B(–1 , 3 ) es:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 24 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$

d) $x^2 - y^2 - 8x + 2y - 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 8x - 2y = 0$

63(R).- La ecuación de la circunferencia que tiene el centro en A(–4 , 1 ) y pasa por el punto B(6 , –5) es:

a) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 119 = 0$

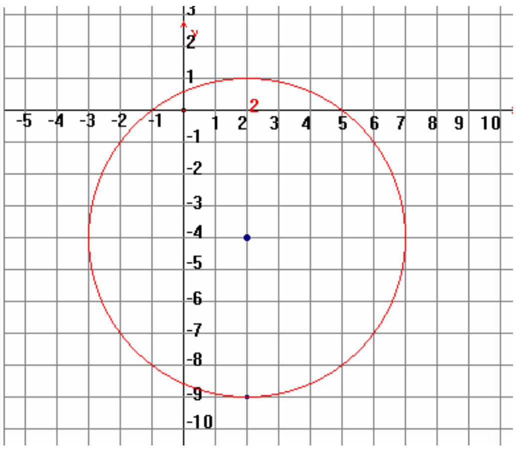
b) $x^2 + y^2 - 4x + y - 136 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 119 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 75 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - y - 64 = 0$

64(F).- La ecuación de la circunferencia de la siguiente figura es:



a) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

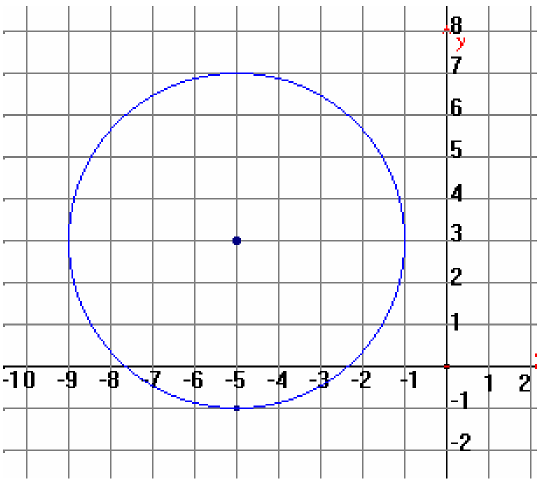
b) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$

c) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

d) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{5}$

e) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = \sqrt{5}$

65(F).- La ecuación de la circunferencia de la siguiente figura es:



a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 18 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 5x - 3y + 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 16 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 18 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 18 = 0$

66(D).- La ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el eje $X$ y pasa por los puntos A(–2 , 3 ) y B(4 , 5) es:

a) $x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$
b) $9x^2 + 9y^2 - 42x - 201 = 0$
c) $3x^2 + 3y^2 - 42x - 67 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 + 14x - 67 = 0$
e) $9x^2 + 9y^2 - 126x + 8y - 201 = 0$

67(D).- La ecuación de la circunferencia con el centro en el eje $Y$ y pasa por los puntos A( 2,3 ) y B( 0,0 ) es:

a) $3x^2 + 6y^2 - 26y = 0$
b) $3x^2 + 3y^2 - 13y = 0$
c) $6x^2 - 6y^2 - 26y = 0$
d) $6x^2 + 6y^2 + 26y = 0$
e) $3x^2 - 3y^2 + 13y = 0$

68(D).- Una ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el eje $X$, su radio es $\sqrt{10}$ y pasa por el punto P(3 , 1) es:

a) $(x - 6)^2 + y^2 = 10$
b) $x^2 + (y - 6)^2 = 10$
c) $x^2 + y^2 - \sqrt{10} = 0$
d) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{10}$
e) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$

69(R).- La ecuación de la circunferencia con centro en A(4 , 0) y es tangente a la recta $x - 8 = 0$ es:

a) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 30 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 35 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x = 0$
d) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 2y - 35 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 8x = 0$

70(R).- La ecuación de la circunferencia con centro en A(– 4 , – 1) y es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$ es:

a) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 30 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 35 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 8x - 35 = 0$
d) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 2y - 35 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 35 = 0$

71(R).- La ecuación de la circunferencia con centro en A(– 3 , 5) y es tangente a la recta $8x - 6y - 6 = 0$ es:

a) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 6$  b) $x^2 + (y-6)^2 = 12$

c) $x^2 + y^2 - \sqrt{6} = 0$  d) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 36$

e) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = \sqrt{6}$

72(R).- El centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$ es:

a) (6 , – 4)  b) (– 6 , 4)  c) (3 , – 2)  d) (– 3 , 2)  e) (3 , 2)

73(R).- El centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ es:

a) C( $\frac{3}{2}$ ,- $\frac{1}{2}$ )  b) C( $\frac{3}{2}$ , $\frac{1}{2}$ )  c) C( 3 , 2 )

d) C( $\frac{3}{2}$ , 1 )  e) C(–3,2 )

74(R).- El centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 4 = 0$ es:

a) C( $\frac{3}{2}$ ,- $\frac{1}{2}$ )  b) C( $\frac{3}{2}$ , $\frac{1}{2}$ )  c) C( 3 , 2 )

d) C( $\frac{3}{2}$ , 1 )  e) C( 2 , 3 )

75(R).- El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$ es:

a) $r = \sqrt{5}$  b) $r = \sqrt{10}$  c) $r = 5$  d) $r = 10$  e) $r = 0$

76(R).- El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$ es:

a) $r = \sqrt{5}$  b) $r = \sqrt{10}$  c) $r = 6$  d) $r = 10$  e) $r = -6$

77(R).- El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$ es:

a) $r = \sqrt{5}$ b) $r = \sqrt{10}$ c) $r = 10$ d) $r = 25$ e) $r = 5$

78(R).- Las coordenadas del centro de la circunferencia con ecuación

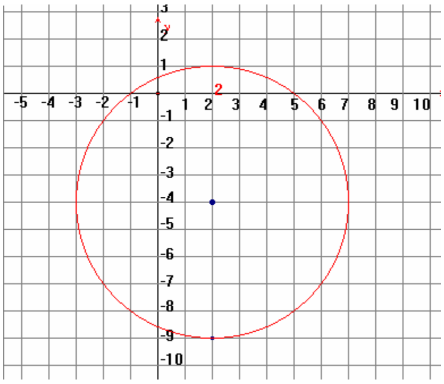
$x^2 + y^2 - 10x + 12y + 25 = 0$ es:

a) C(5 , –6) b) C(–5 , 6) c) C(5 , 3) d) C(–5 , 3) e) C(3 , 5)

79(R).- El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 25 = 0$

a) $r = 5$ b) $r = 6$ c) $r = 7$ d) $r = -5$ e) $r = -6$

80(F).- El diámetro de la circunferencia de la siguiente figura es:



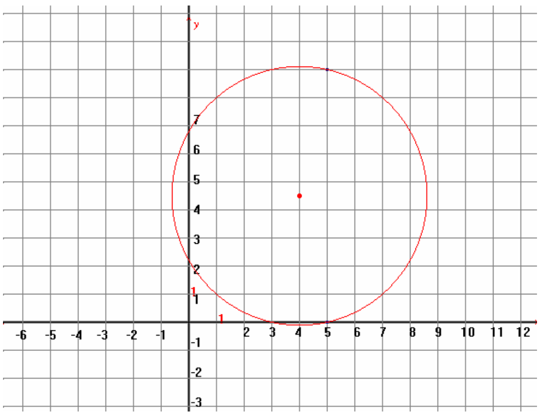
a) $2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{10}$ c) 10 d) 6 e) $\sqrt{6}$

81(F).- La medida del diámetro de la circunferencia con ecuación

$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$ es:

a) 10 b) $2\sqrt{10}$ c) – 10 d) 5 e) $2\sqrt{5}$

82(F).- Encuentra el radio de la circunferencia cuya gráfica es la siguiente figura y cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 8x - 9y + 15 = 0$ :



a) $\sqrt{\frac{85}{4}}$ b) 20 c) $\frac{85}{4}$ d) 10 e) $\sqrt{20}$

83(R).- Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en C(2 , –3) y sea tangente al eje $Y$.

a) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
e) $x^2 + y^2 = r^2$

84(R).- Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en C( 3,2) y sea tangente al eje $X$.

a) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

85(R).- La ecuación de la circunferencia de radio 7 y es concéntrica a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ es:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 7 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 49 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 3x - 2y + \sqrt{7} = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 3y - \sqrt{7} = 0$

86(R).- La ecuación de la circunferencia de radio 3 y que es concéntrica a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ es:

a) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - y + 9 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 9 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$

87(R).- La ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{18}$ y que es concéntrica a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 7y + 5 = 0$ es:

a) $(x - 10)^2 + (y + 7)^2 = \sqrt{18}$ b) $x^2 + y^2 = 18$
c) $x^2 + y^2 - \sqrt{18} = 0$ d) $(x + 5)^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = 18$
e) $x^2 + y^2 + 10x - 7y + \sqrt{18} = 0$

88(R).- Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 3 = 0$
$2x + y - 2 = 0$

a) $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$

89(R).- Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 2 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $x - 2y + 2 = 0$
$2x - 3y + 2 = 0$

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$

90( R).- Encuentra el perímetro de la circunferencia y el área que encierra. Si la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$ .

a) 31.4 b) 157 c) 78.5 d) 66.5 e) 36

91( R).- Encuentra el perímetro de la circunferencia y el área que encierra. Si la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0$.

a) 75.4 b) 37.7 c) 21.7 d) 3.5 e) 39.7

92( D).- Encuentra el perímetro de la circunferencia y el área que encierra. Si la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 5x + y + 1 = 0$.

a) 39.7 b) 21.7 c) 31.4 d) 36 e) 34.5

93(R).- Comprueba gráfica y algebraicamente si el punto A(3, 5) es exterior, interior o pertenece a la circunferencia cuya ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 10$

a) Es interior b) Es exterior c) Está sobre la circunferencia

d) No hay circunferencia e) Es el centro de la circunferencia

94(D).- Comprueba gráfica y algebraicamente si el punto A(–1 , –2) es exterior, interior o pertenece a la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 - 12x + 4y - 9 = 0.$$

a) Es interior b) Es exterior c) Está sobre la circunferencia

d) No hay circunferencia e) Es el centro de la circunferencia

95(D).- Comprueba gráfica y algebraicamente si el punto A(–4, –3) es exterior, interior o pertenece a la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 54 = 0.$$

a) Es interior b) Es exterior c) Está sobre la circunferencia

d) No hay circunferencia e) Es el centro de la circunferencia

96(D).- Un punto se mueve de forma tal que la razón de sus distancias a los puntos A(2 , 4) y B(5 , 1) es 3. La ecuación de su trayectoria es:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ b) $8x^2 - 14x - 10y + 37 = 0$

c) $-2x - 2y + 12 = 0$ d) $8x^2 + 8y^2 - 86x - 10y + 214 = 0$

e) $-8x^2 + 2y^2 + 6x - 10y + 46 = 0$

97(D).- Un punto se mueve de forma tal que la razón de sus distancias a los puntos A(–2 , 4) y B(4 , –3) es 4. La ecuación de su trayectoria es:

a) $15x^2 + 15y^2 - 132x + 104y + 380 = 0$ b) $-3x - 3y + 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 9x - 7y + 25 = 0$ d) $17x^2 + 17y^2 - 4x - 2y + 29 = 0$

e) $17x^2 + 2y^2 + 12x - 14y + 11 = 0$

98(D).- Un punto se mueve de forma tal que la razón de sus distancias a los puntos A(–3 , 4) y B(2 , –1) es 2. La ecuación de su trayectoria es:

a) $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 5 = 0$ b) $-3x - 3y + 3 = 0$

c) $5x^2 + 5y^2 - 10x - 16y + 5 = 0$ d) $-3x^2 - 3y^2 + 5 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 - 22x + 16y - 5 = 0$

99(D).- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(5 , –3), B(–2 , 4) y C(6 , 0).

a) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ b) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 80$

c) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 49$ d) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 20$

e) $(x - 6)^2 + y^2 = 10$

100(D).- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P(–4 , 1), Q(2 , 3) y R(0 , –1).

a) $x^2 + (y+1)^2 = 20$ b) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 40$

c) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 20$ d) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$

e) $(x-1)^2 + y^2 = 10$

## SOLUCIÓN DE LOS REACTIVOS

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | e | 26 | b | 51 | d | 76 | c |
| 2 | c | 27 | a | 52 | b | 77 | e |
| 3 | d | 28 | d | 53 | e | 78 | a |
| 4 | b | 29 | a | 54 | c | 79 | b |
| 5 | c | 30 | d | 55 | b | 80 | c |
| 6 | e | 31 | e | 56 | b | 81 | b |
| 7 | d | 32 | d | 57 | e | 82 | a |
| 8 | b | 33 | c | 58 | d | 83 | b |
| 9 | c | 34 | b | 59 | a | 84 | e |
| 10 | a | 35 | c | 60 | d | 85 | b |
| 11 | b | 36 | a | 61 | a | 86 | e |
| 12 | b | 37 | e | 62 | b | 87 | d |
| 13 | e | 38 | a | 63 | a | 88 | a |
| 14 | d | 39 | c | 64 | c | 89 | d |
| 15 | b | 40 | d | 65 | a | 90 | a |
| 16 | e | 41 | e | 66 | b | 91 | c |
| 17 | b | 42 | b | 67 | b | 92 | e |
| 18 | a | 43 | a | 68 | a | 93 | b |
| 19 | b | 44 | c | 69 | c | 94 | c |
| 20 | d | 45 | d | 70 | e | 95 | a |
| 21 | a | 46 | b | 71 | d | 96 | d |
| 22 | b | 47 | c | 72 | c | 97 | a |
| 23 | c | 48 | e | 73 | b | 98 | e |
| 24 | b | 49 | a | 74 | d | 99 | a |
| 25 | c | 50 | c | 75 | b | 100 | d |