# UNIDAD 2

# SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

OBJETIVOS GENERALES:

- Reconocer aspectos relevantes en el método de la Geometría Analítica.
- Estudiar analíticamente los puntos en un Plano Cartesiano o en un Plano Polar.
- Estudiar analíticamente un segmento en el Plano Cartesiano, su magnitud dados sus puntos extremos, la razón en que es dividido dicho segmento por uno de sus puntos y viceversa, su ángulo de inclinación, su pendiente y condiciones de paralelismo y perpendicularidad.
- Estudiar analíticamente lugares geométricos sencillos en el Plano Cartesiano, su representación algebraica y sus intersecciones con los ejes cartesianos.

# INTRODUCCIÓN

Desde la aparición del hombre este ha tenido necesidad de saber en que sitio está, si el lugar donde habita es el mejor para vivir tomando en cuenta sus alrededores. Se ha permitido elegir muchas características que son convenientes para su existencia y su conocimiento no sólo es suficiente en su alrededor cercano sino que ha trascendido más allá haciendo suposiciones y ayudándose con los conocimientos de otros hombres, de esta forma se fue orientando y conociendo las dimensiones de los terrenos es que vive y por esta necesidad fue que surgieron los mapas o cartas geográficas los cueles nos ayudan a identificar cada lugar o punto en nuestra superficie terrestre.

En la actualidad existen mapas con mucha exactitud ya que podemos localizar un punto de la Tierra tomando como referencia a las líneas llamadas meridiano de Greenwich y el Ecuador, los cuales los podemos identificar asociándoles dos números: el ángulo formado con el ecuador y el que se forma con el meridiano.

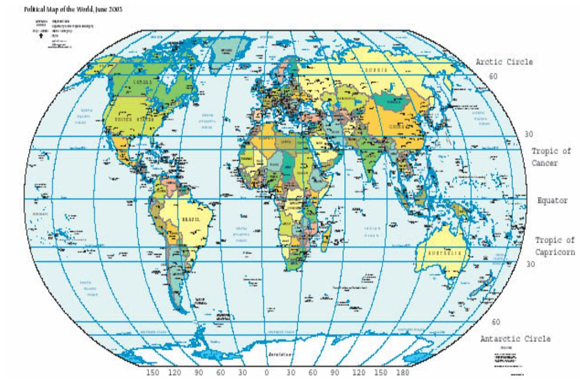


Figura 1

Con esta idea de identificar puntos mediante números, surge en Matemáticas la *Geometría Analítica* que relaciona el mundo de los números con el de las figuras.

Para la humanidad es una necesidad el saber la posición de los objetos, saber si esta arriba o abajo, a la derecha o a la izquierda, a 3 metros de... o a 2 kilómetros hacia la..., en cualquier caso tenemos la necesidad de saber la posición exacta de los objetos pero siempre para hacerlo hacemos uso de otros objetos, por ejemplo una mesa en el salón de clases se puede caracterizar por su distancia a la pared de la derecha y la distancia de la pared que está enfrente; una ventana del salón la podemos identificar por la distancia a la que se encuentra del suelo y por la distancia a cualquier pared adyacente; el lugar donde vive algún compañero lo podemos identificar haciendo referencia a calles conocidas. De cualquier forma siempre localizamos objetos haciendo referencia a otros objetos, estos otros objetos se les llama "*Sistemas de Referencia*". Existen muchos sistemas de referencia que se pueden utilizar para identificar o localizar objetos, estos dependen del tipo de objetos a localizar, en Matemáticas son conocidos los Sistemas de: Coordenadas Cartesianas, Coordenadas Polares, Coordenadas Cartesianas del Espacio, Coordenadas Esféricas, Coordenadas Cilíndricas, entre otras que faltan por mencionar.

En esta Unidad estudiaremos el Sistema de Coordenadas cartesianas en el Plano y lo más básico del Sistema de Coordenadas Polares también en el Plano.

NOTA: El Sistema de Coordenadas Geográficas expresa todas las posiciones sobre la *Tierra* usando dos de las tres coordenadas de un sistema de *coordenadas esféricas* que está alineado con el eje de rotación de la Tierra. Este define dos ángulos medidos desde el centro de la Tierra:

- La *latitud* mide el ángulo entre cualquier punto y el *ecuador*.
- La *longitud* mide el ángulo a lo largo del ecuador desde cualquier punto de la Tierra. Se acepta que *Greenwich* en *Londres* es la longitud 0 en la mayoría de las sociedades modernas.

Combinando estos dos ángulos, se puede expresar la posición de cualquier punto de la superficie de la Tierra. Por ejemplo, Baltimore, Maryland (En los Estados Unidos), tiene latitud 39,3 grados norte, y longitud 76,6 grados oeste. Así un vector dibujado desde el centro de la tierra al punto 39,3 grados norte del ecuador y 76,6 grados al oeste de Greenwich pasará por Baltimore

## 2.1 ESTUDIO ANALÍTICO DE UN PUNTO EN EL PLANO

### 2.1.1 Representación numérica de un punto en el plano.

Como ya lo mencionamos en la introducción para que quede bien determinada la posición de un objeto debemos de tomar como referencia otros objetos, por ejemplo: Cuando te preguntan donde se encuentra el CCH Oriente, es muy probable que les indiques que está sobre canal de san Juan (anillo Periférico oriente) esquina con la avenida universidad en la colonia agrícola oriental; o quizás puedas decir que está sobre anillo


Figura 2

Periférico oriente a un lado de la Secretaría de Marina; hay muchas formas de indicar su posición pero cualquiera que sea siempre hacemos referencia a otros objetos.

Para el estudio de esta unidad los *Sistemas de Referencia* que utilizaremos para localizar un punto en el plano serán dos, que son el Sistema de Coordenadas Rectangulares y el sistema de Coordenadas Polares.

### a) El Sistema de Coordenadas Rectangulares.

En este sistema para localizar un punto en el Plano utilizaremos como referencia dos rectas perpendiculares, una horizontal(eje de abscisas $X$) y la otra vertical(eje de ordenadas $Y$) que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas, y a los ejes se les asocia una escala numérica como lo observas en la figura 3.

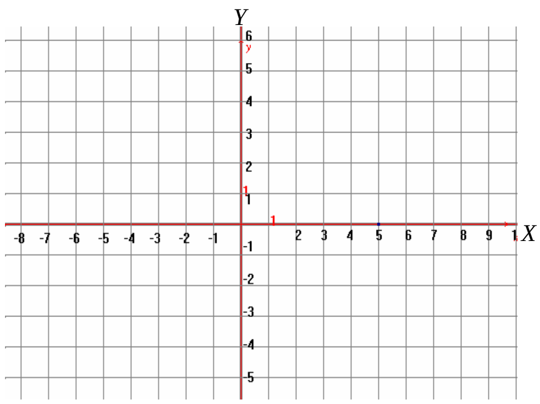



Figura 3

De esta forma todo punto $P$ en este Sistema de Referencia queda determinado de forma única por dos números: la distancia del origen sobre el eje de abscisas "$x$", y la distancia del origen sobre el eje de ordenadas "$y$"; estos dos números los escribimos como la pareja ordenada ($x$ , $y$) que son las coordenadas Cartesianas del punto $P$.

Estos ejes dividen al Plano en cuatro regiones que se llaman Cuadrantes, y **los signos de las coordenadas nos indican el cuadrante en que se encuentra el punto**.

Por ejemplo el punto P(–2 , 3) está en el Cuadrante II, el punto Q(1 , –3) está en el cuadrante IV, como lo puedes observar en la figura 4.

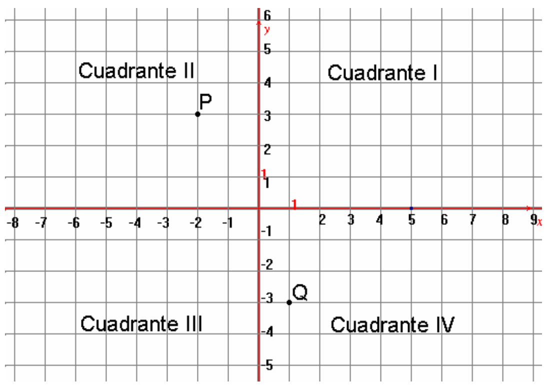



Figura 4

EJEMPLOS:

**1)** Localizar en el Plano Cartesiano el punto A(5 , 2) y decir en que cuadrante está.

**Solución:**

En un Plano Cartesiano con una determinada escala, se considera a partir del origen 5 unidades sobre el eje $X$ y se traza un segmento paralelo al eje $Y$, luego a partir del origen se consideran 2 unidades sobre el eje $Y$ y se traza un segmento paralelo al eje $X$, donde se cortan estos segmentos estará determinado el punto A que queda en el Cuadrante I.

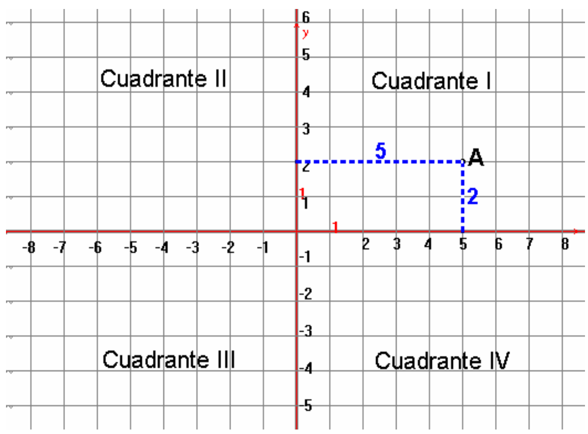



Figura 5

**2)** Localizar en el Plano Cartesiano el punto B(–4 , 0) y decir en que cuadrante está.

**Solución:**

En el Plano Cartesiano se considera a partir del origen 4 unidades a la izquierda (por el signo negativo) sobre el eje $X$ y se traza un segmento paralelo al eje $Y$, luego a partir del origen se consideran 0 unidades sobre el eje $Y$ es decir el punto quedará sobre el eje $Y$ ya que no se traza segmento paralelo al eje $Y$.

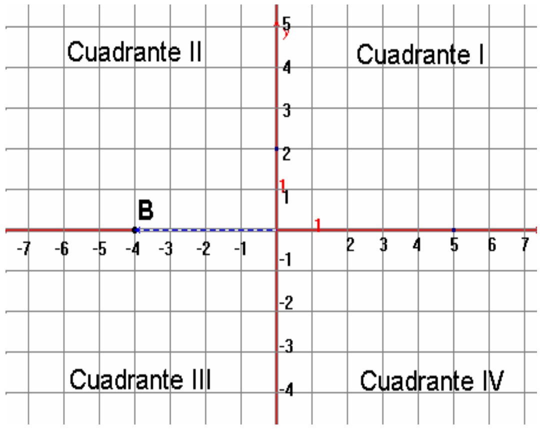



Figura 6

El punto B quedará exactamente sobre el eje $X$ del lado izquierdo del origen, es decir no pertenece ni al Cuadrante II ni al Cuadrante III.

**3)** Localizar en el Plano Cartesiano el punto A(–2 , –5) y decir en que cuadrante está.

**Solución:**

En un Plano Cartesiano se considera a partir del origen 2 unidades sobre el eje $X$ a la izquierda del origen de coordenadas, a partir de este se traza un segmento paralelo al eje $Y$, luego se consideran 5 unidades sobre el eje $Y$ pero hacia abajo y se traza un segmento paralelo al eje $X$, donde se cortan estos segmentos estará determinado el punto C quedando en el Cuadrante III.

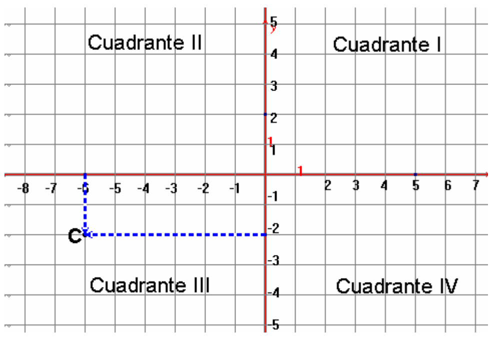



Figura 7

**b) El Sistema de Coordenadas Polares.**

En este sistema para localizar un punto en el Plano utilizaremos como referencia una semirrecta, a la que se le llama *Eje Polar* y al punto que es el extremo izquierdo de la semirrecta se le llama *Origen Polar*, a este eje también se les asocia una escala numérica.

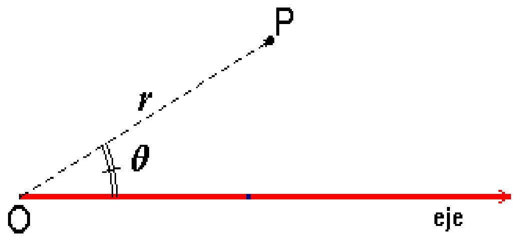


Figura 8

En este Sistema de Referencia también cada punto P queda determinado de forma única por dos números: La distancia desde el punto P al origen O, que se le llama radio-vector ***r*** (al ser una distancia siempre será positiva), y la medida del ángulo que se forma con el **eje** y el radio-vector se le llama ***θ*** , este ángulo se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj iniciando en el **eje** y finalizando en el radio-vector y puede medir desde 0º a 360º , a estos dos números se les llama las Coordenadas Polares del punto P y los representaremos con la pareja (***r*** , ***θ***), ver la figura 8.

EJEMPLOS:

**1)** Localizar en el Plano Polar el punto A(3 , 50º).

**Solución:**

Trazas una semirrecta con una determinada escala.

Tomas un compás abriéndolo desde el origen polar hasta tres unidades y con centro en el origen trazas una circunferencia. Con un transportador marcas un ángulo de 50º tomando el eje polar como el lado inicial del ángulo, donde se corte la circunferencia con el lado terminal del ángulo será el punto polar A buscado.

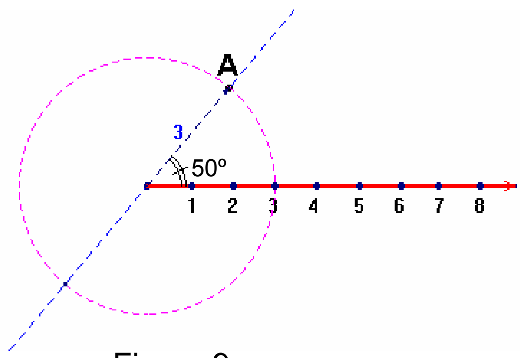


Figura 9

**2)** Localizar en el Plano Polar el punto B(5 , 130º).

**Solución:**

Trazas una semirrecta con una determinada escala.

Tomas un compás abriéndolo desde el origen polar hasta 5 unidades y con centro en el origen trazas una circunferencia. Con un transportador marcas un ángulo de 130º tomando el eje polar como el lado inicial del ángulo, donde se corte la circunferencia con el lado terminal del ángulo será el punto polar B buscado.

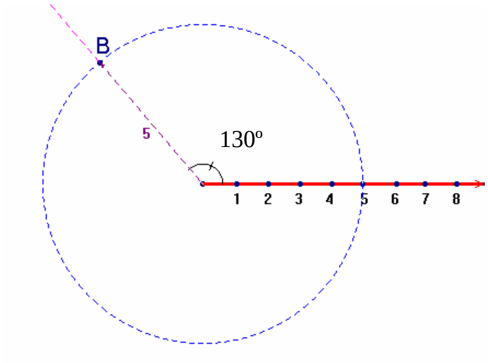


Figura 10

**3)** Localizar en el Plano Polar el punto C(7 , 250º).

**Solución:**

De nuevo trazas una semirrecta con una determinada escala.

Tomas un compás abriéndolo desde el origen polar hasta 7 unidades y con centro en el origen trazas una circunferencia. Con un transportador marcas un ángulo de 250º de forma similar que los ejemplos anteriores y donde se corte la circunferencia y el lado del Ángulo estará el punto C.

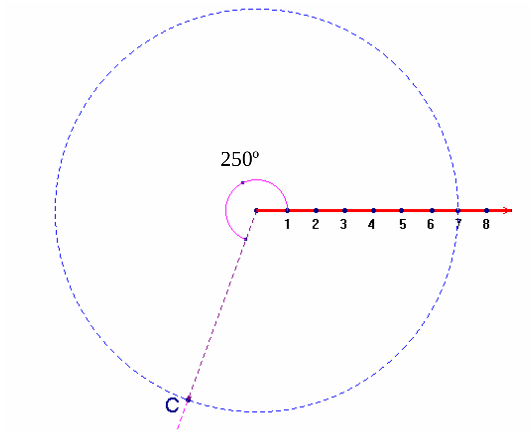


Figura 11

**4)** Localizar en el Plano Polar el punto D(2 , 340º).

**Solución:**

Siguiendo los procedimientos anteriores el punto queda como en la figura 12.

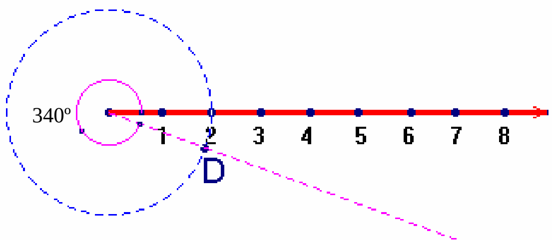


Figura 12

NOTA: Existe papel coordenado polar que facilita la localización de sus puntos.

**5)** Escribir las coordenadas polares del punto P(5 , 3) que se encuentra en el siguiente Plano Cartesiano.

**Solución:**

Debes de tener bien claro lo que deseas encontrar, y son:

1º) la magnitud desde el origen **O** al punto P que será ***r***, y

2º) la medida del ángulo formado por el eje $X$ y el segmento **O**P como lo ves en la figura.

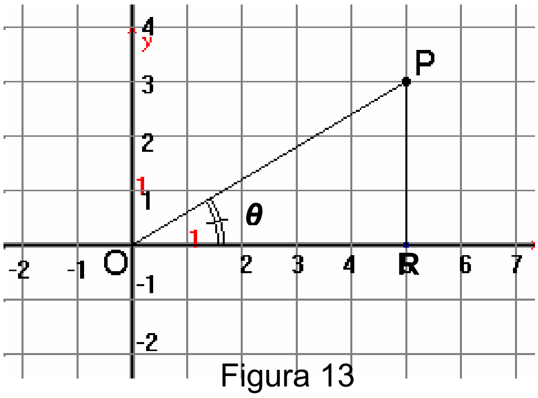



Figura 13

Para esto observa que se formar un triángulo rectángulo con el punto P y el eje $X$, lo utilizaremos para encontrar las coordenadas polares del punto P.

1º) Aplicamos el Teorema de Pitágoras para encontrar la medida de **O**P que será ***r*** :

**O**P$^2$ = **O**R$^2$ + RP$^2$ sustituyendo sus valores tenemos **O**P$^2$ = $5^2 + 3^2$

**O**P$^2$ = 25 + 9 = 34

Es decir OP = $\sqrt{34}$ = 5.83 = ***r***

2º) Usamos la razón trigonométrica tangente del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que será:

$$\tan \boldsymbol{\theta} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyascente}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Usando tu calculadora en MODE DEG tecleamos $\tan^{-1}(0.6)$ y resulta 30.96º , es decir $\boldsymbol{\theta}$ = 30.96º

Las coordenadas polares del punto P son (5.83 , 30.96º)

**6)** Escribir las coordenadas polares del punto A(– 4 , 6) que se encuentra en el siguiente Plano Cartesiano.

**Solución:**

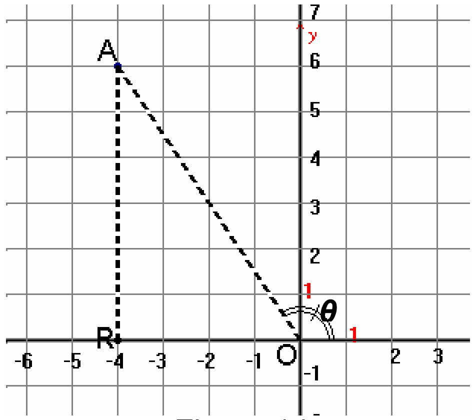


Figura 14

Trazamos el triángulo rectángulo AR**O**, lo utilizaremos para encontrar las coordenadas polares del punto A.

1º) Aplicamos el Teorema de Pitágoras para encontrar la medida de **O**A que será $\boldsymbol{r}$ : $\mathbf{O}A^2 = \mathbf{O}R^2 + RA^2$

sustituyendo tenemos $\mathbf{O}A^2 = 4^2 + 6^2$

$\mathbf{O}A^2 = 16 + 36 = 52$

Es decir $\mathbf{O}A = \sqrt{52} = 7.21 = \boldsymbol{r}$

2º) En este caso primero encontraremos la medida del ángulo A**O**R ya que el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ queda fuera del triángulo y después se lo restaremos a 180º y obtendremos el valor de $\boldsymbol{\theta}$.

Usando la razón trigonométrica tangente del ángulo A**O**R que será:

$$\tan(\angle A\mathbf{O}R) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyascente}} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Usando tu calculadora en MODE DEG tecleamos $\tan^{-1}(1.5)$ y resulta 56.309º , entonces $\boldsymbol{\theta}$ = 180º – 56.309º = 123.69º

Las coordenadas polares del punto A son (7.21 , 123.69º)

**EJERCICIOS 2.1**

1) En un Plano Polar localizar los siguientes puntos:
   A(5 , 75º), B(3 , 40º), C(4.5 , 130º), D(7 , 220º), E(2 , 30º), F(6 , 160º)

2) Escribe las Coordenadas Polares de los siguientes puntos del Plano Cartesiano.

P(6 , 2), Q(3 , 7), R(–2 , 5), S(4 , –3), T(–6 , 5), U(–2 , –5), V(7 , –1), Z(1 , – 4)

## 2.2 ESTUDIO ANALÍTICO DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO EN EL PLANO CARTESIANO.

### 2.2.1 Localización de un segmento rectilíneo en el plano, condiciones necesarias y suficientes.

Cuando nos hablan de un Plano Cartesiano de inmediato nos debe de venir a la mente el Sistema de Referencia formado por una recta horizontal y la otra vertical que se cortan en un punto llamado origen. Si en este localizamos dos puntos cualesquiera P($x_1$ , $y_1$) y Q($x_2$ , $y_2$), y los unimos con un segmento rectilíneo este quedará determinado de forma única por las coordenadas de sus extremos y lo identificaremos como el segmento $\overline{PQ}$.

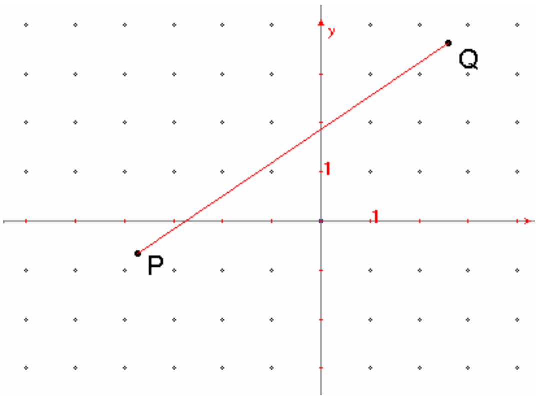



Figura 15

**EJEMPLOS:**

**1)** Trazar en un Plano Cartesiano el segmento rectilíneo $\overline{AB}$, donde las coordenadas de $A$ y de $B$ son $A(-3 , 5)$ y $B(2 , 1)$.

**Solución:**

En un Plano Cartesiano localizamos los puntos dados, y con una regla trazamos el segmento desde $A$ hasta $B$ como se ve en la figura 16.

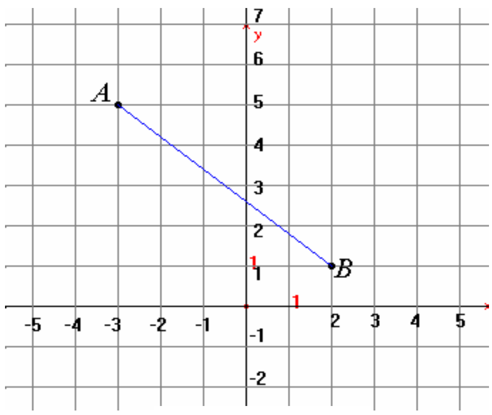



Figura 16

**2)** Trazar en un Plano Cartesiano el segmento rectilíneo $\overline{MN}$, donde las coordenadas de $M$ y de $N$ son $M(1\ ,\ –3)$ y $N(7\ ,\ 4)$.

**Solución:**

En un Plano Cartesiano localizamos los puntos dados, y con una regla trazamos el segmento desde $M$ hasta $N$, como se ve en la figura 17.

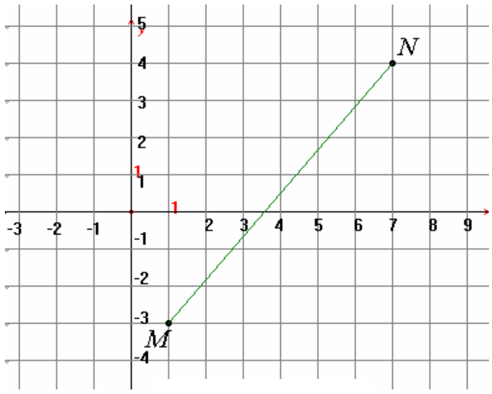



Figura 17

**EJERCICIOS 2.2.1**

1) Trazar en un Plano Cartesiano el segmento rectilíneo definido por cada par de puntos cuyas coordenadas son:

a) $A(1\ ,\ 3)$ y $B(4\ ,\ 6)$ b) $C(–4\ ,\ 1)$ y $D(3\ ,\ –2)$

c) $L(2\ ,\ –5)$ y $M(0\ ,\ 3)$ d) $N(–2\ ,\ –3)$ y $P(4\ ,\ 0)$

e) $Q(4\ ,\ –1)$ y $R(6\ ,\ 2)$ f) $S(0\ ,\ –5)$ y $T(9\ ,\ 0)$

g) $U(–6\ ,\ 0)$ y $V(0\ ,\ 0)$ h) $W(–3\ ,\ –3)$ y $Z(5\ ,\ –1)$

i) $J(2\ ,\ –6)$ y $K(5\ ,\ –1)$ j) $H(0\ ,\ –2)$ y $I(–5\ ,\ 1)$

2) Localiza en un Plano Cartesiano los puntos $P(–5\ ,\ 1)$, $Q(2\ ,\ 7)$ y $R(6\ ,\ –2)$, trazar los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$; ¿qué figura obtienes?. Para referirnos a ella, ¿cómo la llamarías?

3) Localiza en un Plano Cartesiano los puntos $A(–2\ ,\ 3)$, $B(6\ ,\ 0)$, $C(4\ ,\ –5)$ y $D(0\ ,\ –7)$ , trazar los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AC}$; ¿qué figura obtienes?. Para referirnos a ella, ¿cómo la llamarías?

4) Localiza los puntos $H(–1\ ,\ 1)$, $I(2\ ,\ 4)$, $J(5\ ,\ 1)$ y $K(2\ ,\ –2)$ , trazar los segmentos $\overline{HI}$ , $\overline{IJ}$ , $\overline{JK}$ y $\overline{KH}$; ¿qué figura obtienes?. Para referirnos a ella, ¿cómo la llamarías?

### 2.2.2 Longitud de un segmento. Distancia entre dos puntos.

Un segmento en el Plano Cartesiano queda bien definido si conocemos las coordenadas de sus extremos, como se ve en la figura 18 .

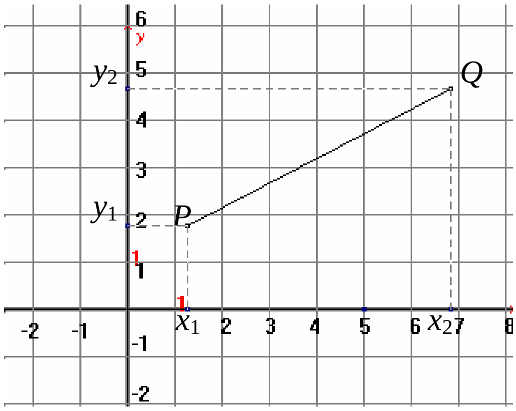


Figura 18

Si tenemos dos puntos cualesquiera en el plano $P(x_1 , y_1)$ y $Q(x_2 , y_2)$ para saber la longitud del segmento $\overline{PQ}$ debemos utilizar la fórmula

$$d(PQ) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

en la cuál sólo tienes que sustituir las coordenadas de los puntos extremos del segmento y después realizar las operaciones aritméticas necesarias hasta llegar a un número, este será la longitud del segmento $\overline{PQ}$, que es lo mismo que la distancia entre los puntos $P$ y $Q$ (recuerda que una distancia siempre es positiva).

**EJEMPLOS:**

**1)** Calcular la distancia entre los puntos P(3 , 1) y Q( 7 , 8).

**Solución:**

Hacemos $x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $x_2 = 7$ y $y_2 = 8$. Sustituyendo estos valores en la fórmula tenemos:

$$d(\text{PQ}) = \sqrt{(7-3)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65} = 8.06 \text{ u.}$$

**2)** Calcular la distancia entre los puntos A(1 , – 5) y B(–2 , 9).

**Solución:**

Hacemos $x_1 =1$, $y_1 = -5$, $x_2 = -2$ y $y_2 = 9$. Sustituyendo estos valores en la fórmula tenemos:

$$d(\text{AB}) = \sqrt{(-2-1)^2 + (9-(-5))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (9+5)^2} = \sqrt{9+14^2} =$$

$$\sqrt{205} = 14.31 \text{ u.}$$

OBSERVACIÓN: Al sustituir ten cuidado con los signos; y te habrás fijado que no necesitas localizar los puntos en el Plano Cartesiano para calcular la distancia entre ellos, además recuerda que tu resultado siempre debe de ser positivo ya que una distancia es positiva.

**3)** Encuentra el perímetro del triángulo cuyos vértices son A(–3 , 5), B(2 , 3) y C(4 , –6).

**Solución:**

El perímetro de cualquier polígono es la suma de la medida de cada uno de sus lados, por tal razón debemos de encontrar la longitud de cada lado del triángulo ABC y luego sumarlas y así obtendremos el perímetro pedido.

$d(\text{AB}) = \sqrt{(-3-2)^2+(5-3)^2} = \sqrt{(-5)^2+(2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ = 5.385 u.

$d(\text{BC}) = \sqrt{(2-4)^2+(3-(-6))^2} = \sqrt{(-2)^2+(9)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$ = 9.219 u.

$d(\text{AC}) = \sqrt{(-3-4)^2+(5-(-6))^2} = \sqrt{(-7)^2+(11)^2} = \sqrt{49+121} = \sqrt{170}$ = 13.038 u.

El perímetro del triángulo ABC es: 5.385 + 9.219 + 13.038 = 27.642 u.

**4)** Muestra que el triángulo cuyos vértices son P(1 , – 1), Q(8 , 6) y R(– 3 , 3) es un triángulo rectángulo.

**Solución:**

Para verificar si es triángulo rectángulo usaremos el Teorema de Pitágoras, para esto necesitamos saber la medida de cada lado.

$d(\text{PQ}) = \sqrt{(1-8)^2+(-1-6)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$

$d(\text{QR}) = \sqrt{(8-(-3))^2+(6-3)^2} = \sqrt{(11)^2+(3)^2} = \sqrt{121+9} = \sqrt{130}$

$d(\text{PR}) = \sqrt{(1-(-3))^2+(-1-3)^2} = \sqrt{(4)^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

Veamos si se verifica el Teorema de Pitágoras:

(lado mayor)$^2$ = $(d(\text{QR}))^2$ = $(\sqrt{130})^2$ = 130

$$\left.\begin{array}{l}(d(\text{PQ}))^2 = (\sqrt{98})^2 = 98 \\ (d(\text{PR}))^2 = (\sqrt{32})^2 = 32\end{array}\right\}$$

$(d(\text{PQ}))^2 + (d(\text{PR}))^2 = 98 + 32 = 130 = (d(\text{QR}))^2$

SE CUMPLE EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Entonces es un triángulo rectángulo.

**EJERCICIOS 2.2.2:**

I) Calcular la distancia entre los siguientes puntos:

1) A(3 , 5) y B(9 , 11)
2) C(– 3 , 1) y D(7 , –9)
3) E(4 , 8) y F(–6 , –12)
4) G(1 , 10) y H(–5 , 2)
5) I(–7 , 0) y J(3 , 8)
6) K(–4 , –7) y L(12 , 0)

II) Calcular el perímetro de:

7) El triángulo cuyos vértices son $A(1 , 5)$, $B(2 , 8)$ y $C(-3 , -7)$.
8) El triángulo cuyos vértices son $P(-5 , 1)$, $Q(2 , 7)$ y $R(6 , -2)$,
9) El cuadrilátero cuyos vértices son P(–6 , 3), Q(0 , 5), R(–2 , –7) y S(3 , –9).
10) El cuadrilátero cuyos vértices son $H(-1 , 1)$, $I(2 , 4)$, $J(5 , 1)$ y $K(2 , -2)$.

III) Decir si los siguientes triángulos son escalenos, isósceles, equiláteros o triángulos rectángulos, si sus vértices son:

11) A(1 , 2), B(3 , 4) y C(–1 , 4).
12) P(–4 , 3), Q(–1 , –1) y R(3 , 2).
13) L(–2 , 5), M(6 , 7) y N(0 , –3).
14) D(–3 , 2), E(1 , –2 ) y F(2 , 3)
15) H(0 , 1), I(3 , 0) y $K\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} , \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

## 2.2.3 Ángulo de inclinación de un segmento. Concepto de Pendiente.

Todo segmento de recta (no horizontal) al prolongarlo cortará al eje de las abscisas $X$, como se ve en la figura 19, el ángulo que forma con este eje se le llama **ángulo de inclinación** del segmento.

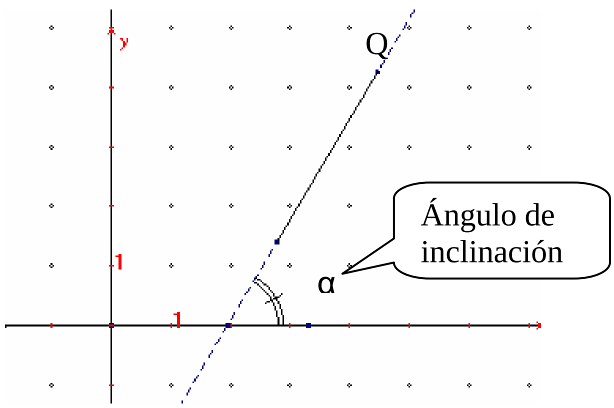


Figura 19

A la tangente del ángulo de inclinación se le llama **pendiente** y la vamos a identificar con la letra $m$. Así $m = \tan \alpha$ donde α es la medida del ángulo de inclinación de la recta que contiene al segmento.

**EJEMPLOS:**

**1)** Calcular la pendiente de la recta que contiene al segmento PQ, si su ángulo de inclinación mide 38º.

**Solución:**

Como la pendiente $m$ = tan α, sustituyendo tenemos $m$ = tan 38º . Usaremos la calculadora para saber cuanto vale tan 38º obtenemos que tan 38º = 0.78.

Entonces la pendiente de la recta es $m = 0.78$

OBSERVACIÓN: Al usar tu calculadora debes de verificar que se encuentre en MODE DEG, ya que si no es así obtendrás un resultado incorrecto.

**2)** Calcular la pendiente de la recta que contiene al segmento AB, si su ángulo de inclinación mide 152º .

**Solución:**

Como la pendiente $m$ = tan α, sustituyendo tenemos $m$ = tan 152º . Usando la calculadora tenemos que tan 152º = – 0.53.

Entonces la pendiente de la recta es $m = -0.53$

Cuando no sepamos el ángulo de inclinación, pero si las coordenadas de los extremos del segmento usaremos una nueva fórmula que es la siguiente:

Si los extremos de un segmento son los puntos $P(x_1 , y_1)$ y $Q(x_2 , y_2)$, la pendiente de la recta que pasa por ellos es: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

La pendiente de una recta horizontal es cero, mientras que la de una recta vertical no está definida.

**EJEMPLOS:**

**1)** Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(3 , 2) y Q(5 , 9).

**Solución:**

Hacemos $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 5$ y $y_2 = 9$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de la pendiente y tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-2}{5-3} = \frac{7}{2} = 3.4$$

**2)** Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(– 4 , 1) y B(3 , –2).

**Solución:**

Hacemos $x_1 = -4$, $y_1 = 1$, $x_2 = 3$ y $y_2 = -2$. Sustituyendo estos valores en la fórmula tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-1}{3-(-4)} = \frac{-3}{3+4} = \frac{-3}{7} = -0.428$$

OBSERVACIÓN: Recuerda que si la **pendiente** $m$ de una recta es positiva, la recta se inclina a la derecha; pero si es negativa la recta se inclina a la izquierda. Además si la pendiente es positiva, entre más pequeño sea el número de la pendiente la recta se va haciendo horizontal y entre más grande sea la recta se va haciendo vertical.

**3)** Calcular el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos del ejercicio 1, es decir por los puntos P(3 , 2) y Q(5 , 9).

**Solución:**

En el ejercicio 1 calculamos la pendiente $m = 3.4$, usando la definición $m = \tan \alpha$ entonces $\tan \alpha = 3.4$ es decir $\alpha = \tan^{-1}(3.4) = (73.51)^{o}$

El ángulo de inclinación de la recta que pasa por P y por Q es $(73.51)^{o}$.

NOTA: El cálculo de $\tan^{-1}(3.4)$ lo obtienes con tu calculadora en MODE DEG.

**4)** Calcular el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos del ejercicio 2, es decir por los puntos A(– 4 , 1) y B(3 , –2).

**Solución:**

En el ejercicio 2 calculamos la pendiente $m$ = –0.428, por otro lado por definición $m$ = tan α entonces tan α = –0.428 esto quiere decir que α = $\tan^{-1}$ (–0.428) = (–23.17)º

Cuando el ángulo resultante sea negativo nos está dando la medida del suplemento del ángulo de inclinación, entonces el ángulo de inclinación es:

$$180^\circ - (23.17)^\circ = (156.83)^\circ$$

Finalmente el ángulo de inclinación de la recta que pasa por A y por B es (156.83)º.

**EJERCICIOS 2.2.3:**

I) Encontrar el ángulo de inclinación de las rectas cuyas pendientes son:

1) $m = 3$ 2) $m = 5$ 3) $m = -2$ 4) $m = \frac{2}{7}$ 5) $m = -\frac{3}{8}$

II) Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas que pasan por los puntos:

6) A( 2 , 5) y B(7 , –8) 7) C( 5 , 1) y D(3 , –2)

8) E(–5 , 0) y F(1 , 7) 9) G( 0 , 3) y H(6 , –9)

10) I(–4 , –3) y J(6 , 5) 11) K(–1 , 5) y L(3 , –3)

12) Mostrar analíticamente que los puntos A(3 , –5), B(0 , –2) y C(–3 , 1) son colineales, es decir están sobre una línea recta.

13) Mostrar analíticamente que los puntos P(0 , 5), Q(4 , 0) y R(8 , –5) son colineales, es decir están sobre una línea recta.

14) Encontrar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son A(0 , 2), B(10 , – 2) y C(3 , –5).

### 2.2.4 Razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos.

Todo punto $P$ que está sobre un segmento con extremos A y B, lo divide en dos segmentos como lo observas en la figura 20. Estos segmentos son A$P$ y $P$B.

A la razón formada por A$P$ y $P$B se le llama **razón de división** y la identificaremos por:

$$r = \frac{AP}{PB}$$

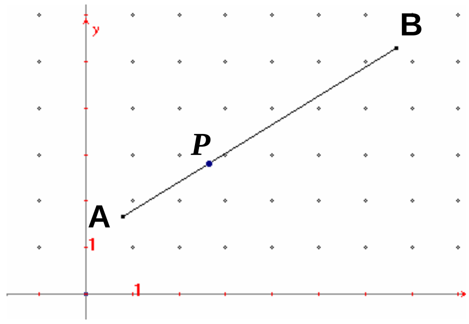



Figura 20

**Observa el sentido del segmento, el punto** A **antes de $P$ y el punto** B **después de $P$. Es muy importante que siempre lo utilices de esa forma para los cálculos que se vayan hacer con esta razón.**

Existen otros dos casos para esta división y son cuando el punto $P$ no está entre A y B; es decir cuando $P$ está después de B ó cuando está antes que A como se ve en la figura 21. Para estos casos **la razón $r$ es negativa**.

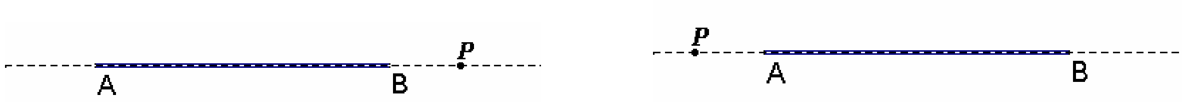



Figura 21

### 2.2.5 Coordenadas del punto que divide al segmento en una razón dada.

Si las coordenadas de los extremos del segmento AB son A ($x_1$ , $y_1$) y B($x_2$ , $y_2$), para encontrar las coordenadas del punto $P(x\ ,\ y)$ que divide al segmento AB en la razón $r = \frac{AP}{PB}$ usaremos las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

Recuerda que si $r$ es positiva, el punto $P$ está entre A y B; pero si $r$ es negativa $P$ está antes que A o después de B.

RECOMENDACIÓN: Es conveniente que localices en un Plano Cartesiano los extremos del segmento, ya que aquí es muy importante tomar en cuenta la dirección de éste.

**EJEMPLOS:**

**1)** Encuentra las coordenadas del punto $P$ que divide al segmento cuyos extremos son A(2 , 3) y B(7 , 9) en la razón $r$ =3.

**Solución:**

Localizamos los puntos en un plano como se ve en la figura 22, y efectivamente A está antes que B.

Entonces $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 7$ y $y_2 = 9$.

Sustituimos en las fórmulas y obtenemos:

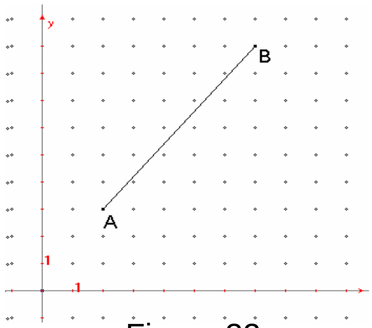


Figura 22

$$x = \frac{2+3(7)}{1+3} = \frac{2+21}{4} = \frac{23}{4} = 5.75$$

$$y = \frac{3+3(9)}{1+3} = \frac{3+27}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

Entonces el punto que divide al segmento AB en la razón 3 es $P$(5.75 , 7.5), como se ve en la figura 23.

Es bueno que observes que A$P$ = 3 y $P$B = 1,

ya que la razón $r = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{1} = 3$, entonces el segmento AB se dividió en cuatro partes iguales y el punto $P$ queda a tres cuartas partes del segmento AB.

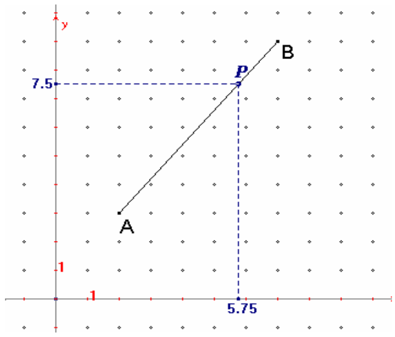


Figura 23

**2)** Encuentra las coordenadas del punto $P$ que divide al segmento cuyos extremos son A(6 , –1) y B(–3 , –5) en la razón $r$ =2/3.

**Solución:**

Localizamos los puntos en un plano como se ve en la figura 24, y observa que B está antes que A.

Entonces $x_1 = -3$, $y_1 = -5$, $x_2 = 6$ y $y_2 = -1$.

Sustituimos en las fórmulas y obtenemos:

$$x = \frac{-3+\frac{2}{3}(6)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-3+4}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

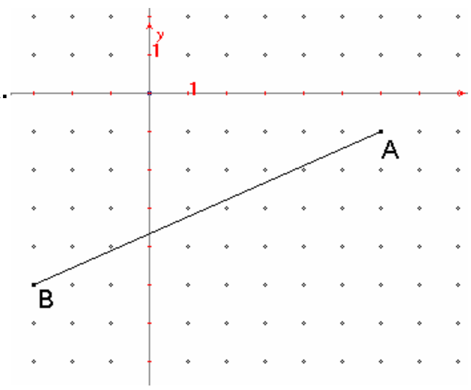


Figura 24

$$y = \frac{-5 + \frac{2}{3}(-1)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-5 - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{17}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{17}{5} = -3.4$$

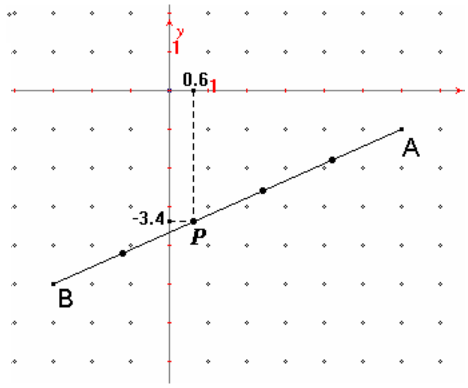


Figura 25

Así el punto que divide al segmento BA en la razón 2/3 es $P(0.6 , -3.4)$, como se ve en la figura 25.

**EJERCICIOS 2.2.5:**

Encontrar las coordenadas del punto ***P*** que divide a cada segmento en la razón dada.

1) A(2 , 4) y B(3 , 7) razón $r = 2$ 2) C(3 , –5) y D(8 , 2) razón $r = \frac{2}{3}$

3) E(–6 , 1) y F(5 , – 4) razón $r = \frac{3}{2}$ 4) G(0 , –9) y H(8 , 3) razón $r = \frac{1}{5}$

5) K(– 4 , –3) y L(5 , –1) razón $r = \frac{2}{7}$ 6) P(1 , –3) y H(6 , 9) razón $r = \frac{1}{4}$

7) Q(5 , –2) y R(8 , 7) razón $r = \frac{4}{3}$ 8) S(1 , 2) y T(6 , –3) razón $r = 3$

9) En un segmento AB las coordenadas de uno de sus extremos es A(1 , 5), encuentra las coordenadas del extremo B, si el punto P(4 , 2) divide al segmento AB en la razón $r = 3$.

10) En un segmento AB las coordenadas de uno de sus extremos es A(–2 , 5), encuentra las coordenadas del extremo B, si el punto P(3 , –2) divide al segmento AB en la razón $r = \frac{2}{3}$.

11) Determinar las coordenadas del punto del segmento que une A(–2 , 1) y B(7 , 5), que se encuentra al triple de distancia de A que de B.

12) Hallar las coordenadas del punto R situado entre PQ de tal forma que el segmento PR mide tres veces el segmento RQ, donde P(1 , –5) y Q(4 , 9).

## 2.3 ESTUDIO ANALÍTICO DE ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO CARTESIANO.

### 2.3.1 Lugares geométricos sencillos que dan lugar a rectas y circunferencias y parábolas, y su representación algebraica.

En esta parte de la unidad expresaremos mediante una ecuación el enunciado de una frase que se refiera a ciertas condiciones que cumplen varios puntos del Plano Cartesiano, para esto primero nos debe de quedar bien claro lo que es un lugar geométrico.

Un **Lugar Geométrico** queda definido por una frase y estará formado por todo el conjunto de puntos que la hacen verdadera. Un lugar geométrico se establece por una serie de puntos que tienen una propiedad común y esta propiedad se puede expresar mediante una ecuación que será su representación algebraica. Todo lugar geométrico queda bien determinado cuando podemos asegurar sin alguna duda si un punto cualquiera pertenece o no pertenece a él, veamos algunos ejemplos para aclarar estos enunciados.

**EJEMPLOS**

**1)** Encontrar el lugar geométrico definido por la frase: "Puntos del plano que estén a una distancia de 4 unidades a la derecha del eje de ordenadas $Y$", también encontrar su representación algebraica es decir su ecuación.

**Solución:**

Es claro que el sistema de referencia que vamos a usar es un sistema de ejes cartesianos, lo primero que debes hacer es colocar algunos puntos en un plano cartesiano que cumplan con lo mencionado en la frase; es decir que estén a 4 unidades a la derecha del eje $Y$ como se ve en la figura.

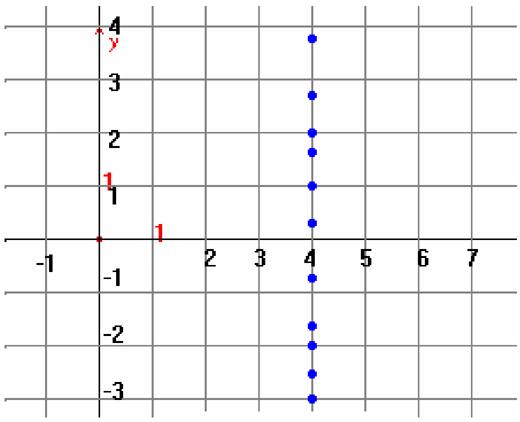


Figura 26

Si sigues colocando más puntos creo que ya sabes que obtendrás una línea recta paralela al eje $Y$ que corta al eje $X$ en 4, si escribes las coordenadas de cada punto ¿qué observas?.

Efectivamente, todos los puntos tienen la misma abscisa que es 4, es decir para cualquiera de estos puntos se cumple que $x = 4$.

Así podemos concluir que el lugar geométrico buscado es una línea recta vertical que corta al eje $X$ en 4, y su ecuación es $x = 4$.

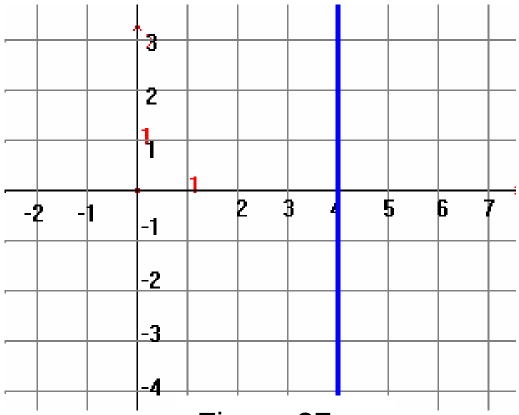


Figura 27

**2)** Encontrar el lugar geométrico definido por la frase: "Puntos del plano que estén a una distancia de 3 unidades abajo del eje de abscisas $X$", también encontrar su representación algebraica es decir su ecuación.

**Solución:**

Colocamos algunos puntos en un plano cartesiano que cumplan con lo mencionado en la frase; es decir que estén a 3 unidades abajo del eje $X$ como se ve en la figura. Si sigues colocando más puntos creo que ya sabes que obtendrás una línea recta paralela al eje $X$ que corta al eje $Y$ en –3, si escribes las coordenadas de cada punto ¿qué observas?.

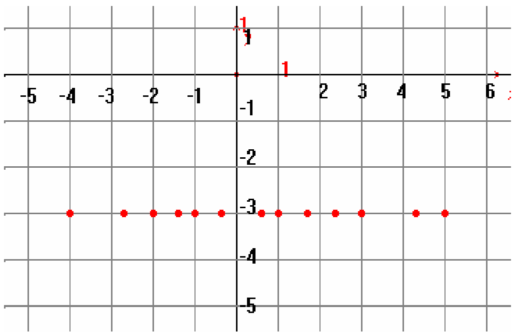


Figura 28

Así es, todos los puntos tienen la misma ordenada que es –3, es decir para cualquiera de estos puntos se cumple que $y = -3$.

Así podemos concluir que el lugar geométrico buscado es una línea recta horizontal que corta al eje $Y$ en –3, y su ecuación es $y = -3$.

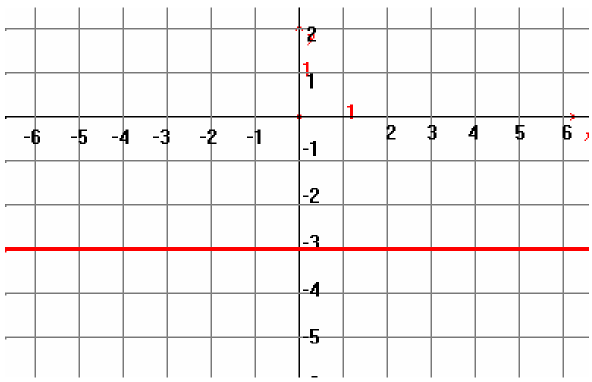


Figura 29

**3)** Encontrar el lugar geométrico definido por la frase: "Todos los puntos del plano cuya distancia al punto C(3 , 2) es de 2 unidades", también encontrar su representación algebraica es decir su ecuación.

**Solución:**

Colocamos algunos puntos en un plano cartesiano que cumplan con lo mencionado en la frase; es decir que estén a 2 unidades de distancia del punto C(3 , 2). Si sigues colocando más puntos podrás darte cuenta de inmediato que se trata de una circunferencia, entonces el lugar geométrico buscado es una circunferencia.

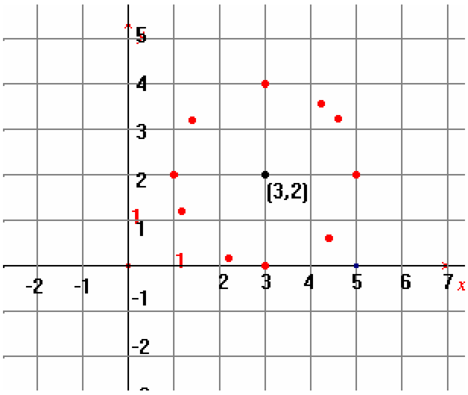



Figura 30

Ahora procedamos a encontrar su ecuación:

Utilicemos un punto cualquiera de la circunferencia y lo llamamos P($x$ , $y$), como esta a 2 unidades de distancia del punto C(3 , 2) entonces se cumple que:

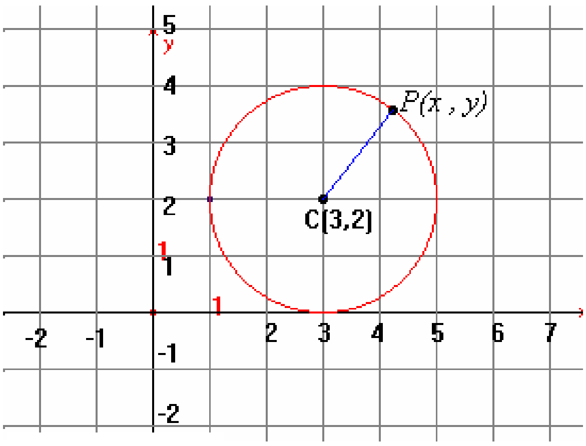



Figura 31

La distancia de C a P es 2, y esto se escribe como $d$(CP) = 2.

Usando la fórmula de distancia entre dos puntos, nos queda:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 2$$

Para eliminar la raíz cuadrada elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad y nos queda:

$$\left(\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\right)^2 = 2^2$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Que es la ecuación de todos los puntos cuya distancia al punto C(3 , 2) es de 2 unidades.

**4)** Encontrar el lugar geométrico definido por la frase: "Todos los puntos del plano que equidistan de los puntos A(1 , 5) y B(6 , –2)", también encontrar su ecuación.

**Solución:**

En un plano cartesiano localizamos los puntos A(1 , 5) y B(6 , – 2), y colocamos algunos puntos que estén a la misma distancia tanto de A como de B, obsérvalo en la figura. De esta forma de inmediato te darás cuenta que el lugar geométrico que describen estos puntos es una línea recta.

Encontremos la ecuación de esta línea recta:

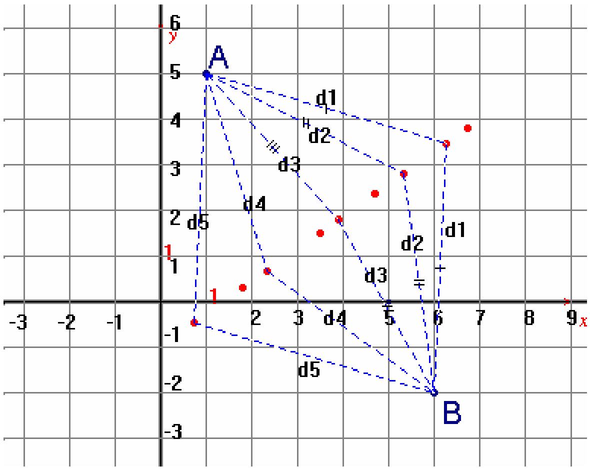



Figura 32

Utilicemos un punto cualquiera de los ya trazados y que forman la recta, lo llamamos P($x$ , $y$), como esta a la misma distancia tanto de A(1 , 5) como de B(6 , – 2) se cumple que:

$$d\,(PA) = d(PB)$$

es decir:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2} \;=\; \sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados tenemos:

$(x-1)^2 + (y-5)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2$

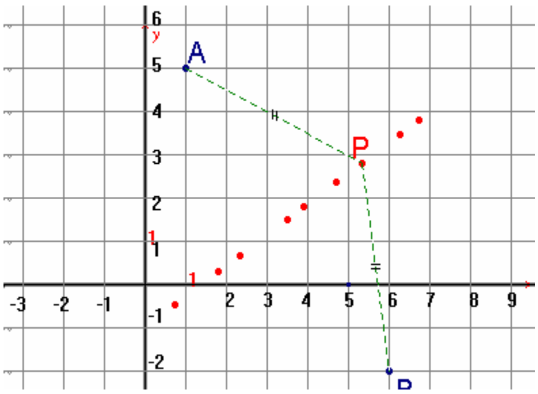



Figura 33

Desarrollando cada binomio al cuadrado:

$x^2 - 2x + 1 \;+\; y^2 - 10y + 25 \;=\; x^2 - 12x + 36 \;+\; y^2 + 4y + 4$

Sumando los términos semejantes e igualando a cero obtenemos:

$10x - 14y - 14 = 0$ dividiéndola entre 2 la ecuación del lugar geométrico buscado es: $5x - 7y - 7 = 0$

**5)** Encontrar el lugar geométrico y la ecuación de todos los puntos los cuales equidistan de un punto A(3 , 2) y del eje $X$. (Recuerda que la distancia de un punto a una recta, es la distancia de la perpendicular a la recta desde el punto dado).

**Solución:**

Para empezar debemos de trazar un punto que lo llamaremos P, de tal manera que la distancia de P al punto A sea igual que la distancia de P al eje

$X$; el más fácil de trazar es el que queda en medio de A y del eje $X$. Trazamos un segundo punto que llamaremos Q, tal que su distancia al punto A sea la misma que su distancia al eje $X$; de forma similar trazamos otros 6 puntos. Creo que son suficientes para que te des cuenta de la forma de este nuevo lugar geométrico.

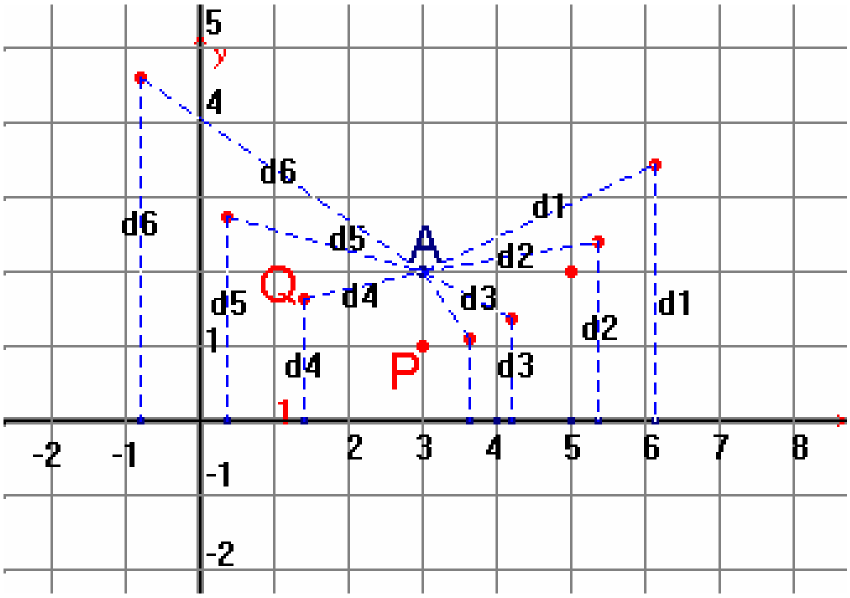



Figura 34

Nota: La notación d1, d2, d3, ...... denotan distancias.

Para encontrar su ecuación se puede utilizar cualquier punto que trazamos, esta ves utilizaremos el punto Q($x$ , $y$):

Sabemos que $d$(QA) = distancia de Q al eje $X$

Por un lado $d$(QA) = $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$

Y por otro lado si observas la figura con más detalle te darás cuenta de que la distancia de cualquier punto del lugar geométrico que estamos analizando al eje $X$ siempre es la ordenada del punto, por tal razón:

La distancia de Q al eje $X$ = $y$.

Igualando ambas expresiones tenemos:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = y$$

Elevando al cuadrado ambos lados: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = y^2$

Desarrollando cada binomio al cuadrado: $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2$

Igualando a cero, sumando los términos semejantes y ordenando obtenemos:

$$x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$$

Es la ecuación del lugar geométrico buscado que es una parábola.

**EJERCICIOS 2.3.1**

Trazar y encontrar la ecuación del lugar geométrico que cumple con:

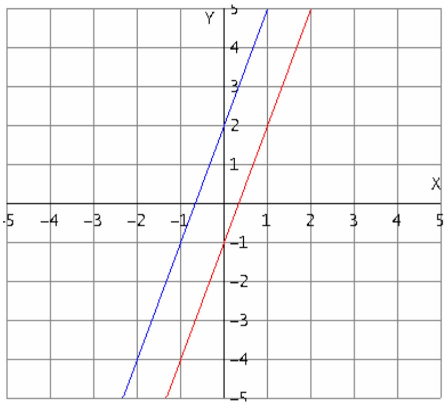
1) Todos los puntos del plano que están 6 unidades a la derecha del eje $Y$.
2) Todos los puntos del plano que están 4 unidades arriba del eje $X$.
3) Todos los puntos del plano que están 2 unidades abajo del eje $X$
4) Todos los puntos del plano que están 3 unidades a la izquierda del eje $Y$.
5) Todos los puntos del plano que están 6 unidades a la derecha de la recta $x = -1$.
6) Todos los puntos del plano que están 1 unidad arriba de la recta $y = 3$.
7) Todos los puntos del plano que distan de las recta $x = -3$ y $x = 1$.
8) Todos los puntos del plano que equidistan de los puntos A(2 , 3) y B(6 , 7)
9) Todos los puntos del plano que equidistan de los puntos C(–3 , 1) y D(5 , –1).
10) Todos los puntos del plano que equidistan de los puntos P(–4 , –1) y Q(2 , 1).
11) Todos los puntos del plano cuya distancia al punto C(5 , 3) es de 3 unidades.
12) Todos los puntos del plano cuya distancia al punto C(2 , –4) es de 5 unidades.
13) Todos los puntos del plano cuya distancia al punto C(–3 , –2) es de 7 unidades.
14) Todos los puntos los cuales equidistan de un punto B(5 , 4) y del eje $X$.
15) Todos los puntos los cuales equidistan de un punto C(–2 , 5) y del eje $Y$.
16) Todos los puntos los cuales equidistan de un punto D(1 , 4) y del eje $Y$.
17) Todos los puntos los cuales equidistan de un punto C(3 , –2) y del eje $X$.
18) Todos los puntos los cuales equidistan de un punto C(–6 , –4) y del eje $Y$.

### 2.3.2 Intersecciones entre los Lugares Geométricos y con los ejes cartesianos.

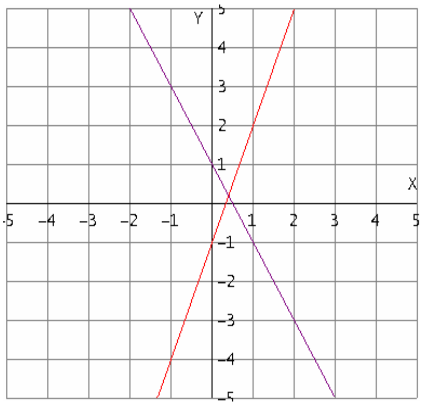
Con los ejemplos y ejercicios anteriores creo que ya te quedó más claro lo que es un lugar geométrico, y ya te diste cuenta que un lugar geométrico puede quedar representado por una gráfica que puede ser una recta, una parábola, una circunferencia, una hipérbola u otra, ya que los lugares geométricos pueden ser una gran variedad de gráficas pero nosotros sólo analizaremos rectas, parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas.

Si comparamos dos de estos lugares geométricos en un mismo plano cartesiano pueden cortarse entre si en uno, dos, tres, cuatro o en ningún punto, como ya lo vimos en la unidad anterior. Las siguientes figuras son para aclarar mejor estas afirmaciones:

DOS RECTAS:

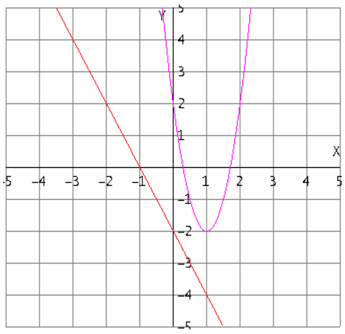



Si son paralelas NO hay intersección

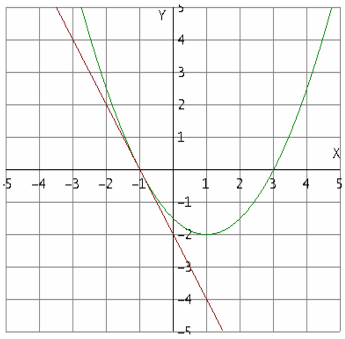



Si no son paralelas hay UNA sola intersección.

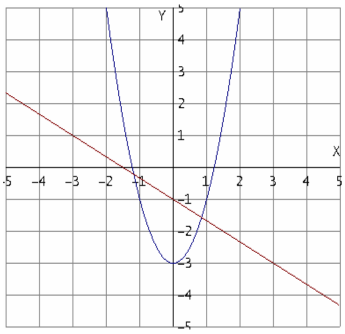
UNA RECTA Y UNA PARÁBOLA:




No hay intersección.

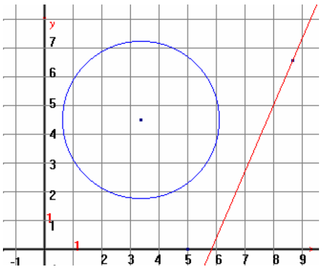



Una sola intersección.

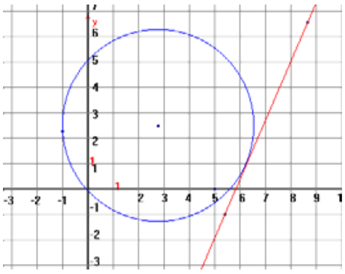



Dos intersecciones.

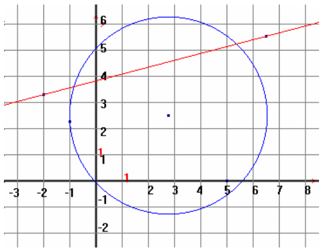
UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA.



No hay intersección.

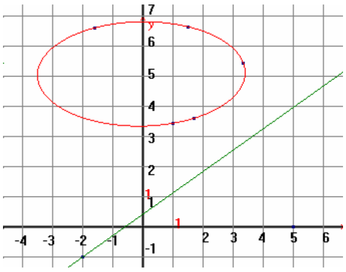


Una intersección.

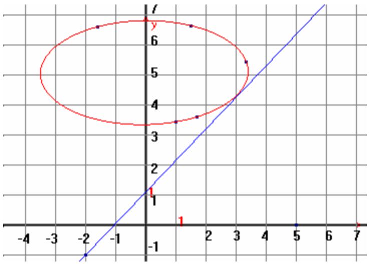


Dos intersecciones.

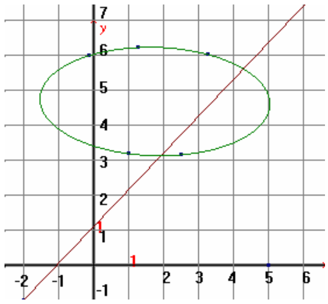
UNA RECTA Y UNA ELIPSE.



No hay intersección.

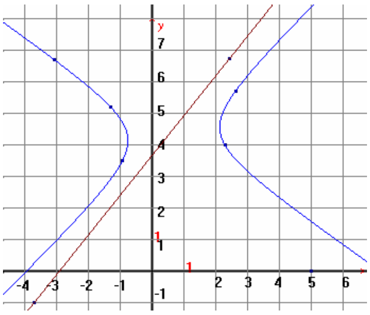


Una intersección.

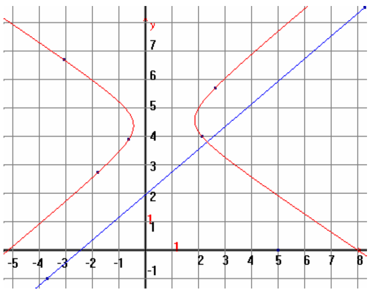


Dos intersecciones.

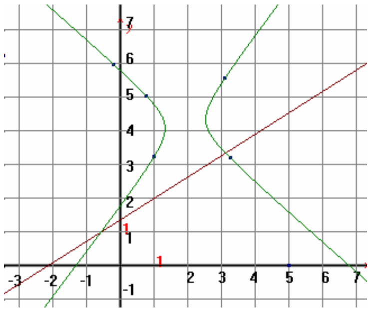
UNA RECTA Y UNA HIPÉRBOLA.



No hay intersección.

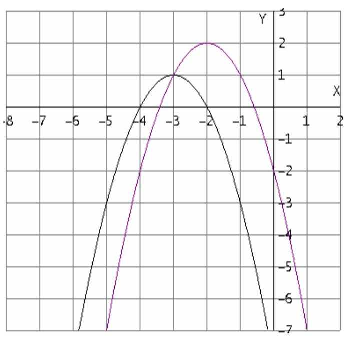


Una intersección.

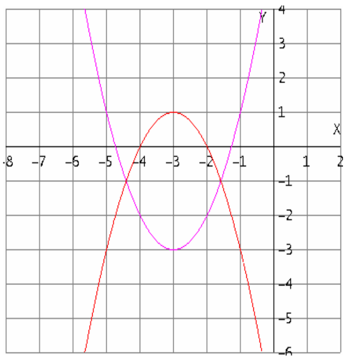


Dos intersecciones.

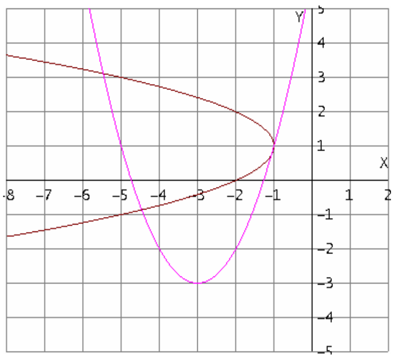
UNA PARÁBOLA CON OTRA PARÁBOLA



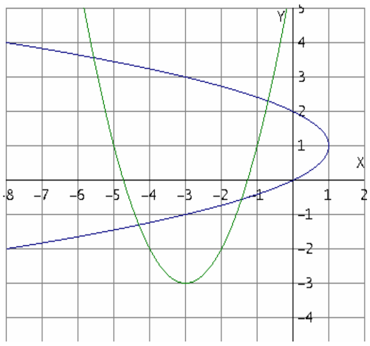
Una intersección.



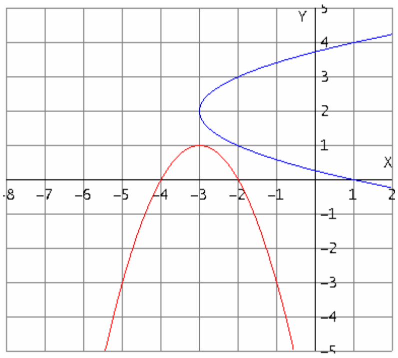
Dos intersecciones.



Tres intersecciones.

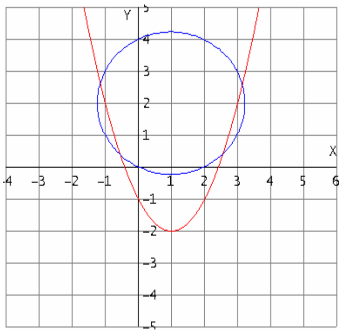


Cuatro intersecciones.

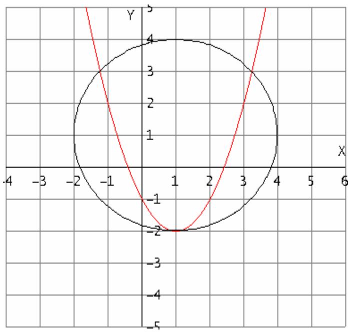


Ninguna intersección.

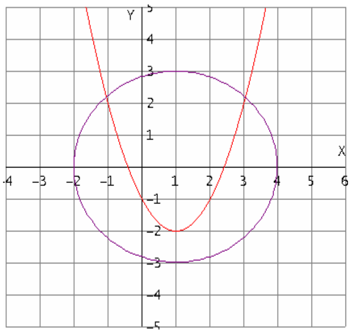
UNA PARÁBOLA CON UNA CIRCUNFERENCIA:



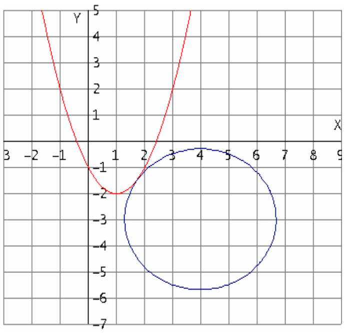
Cuatro intersecciones.



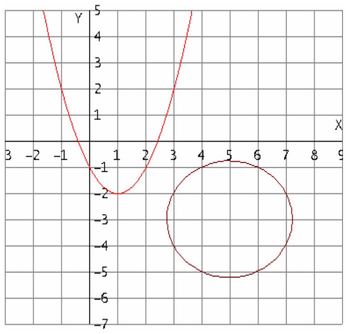
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.

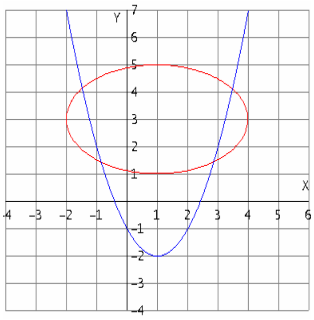


Una intersección.

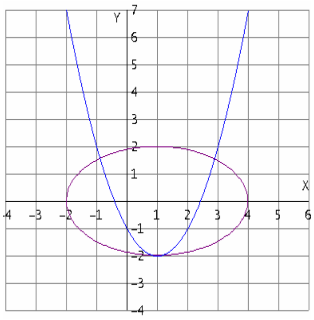


Ninguna intersección.

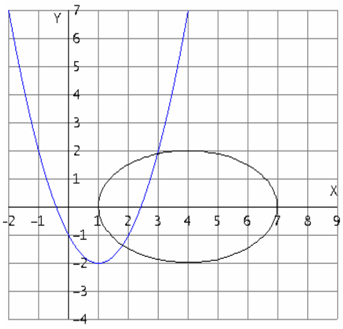
UNA PARÁBOLA CON UNA ELIPSE.



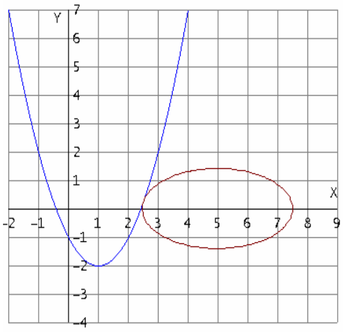
Cuatro intersecciones.



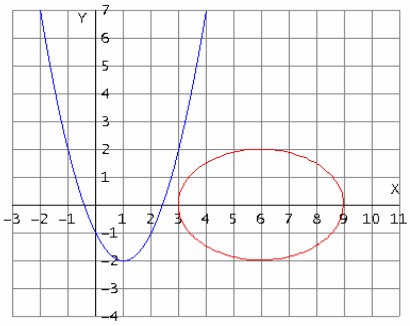
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.

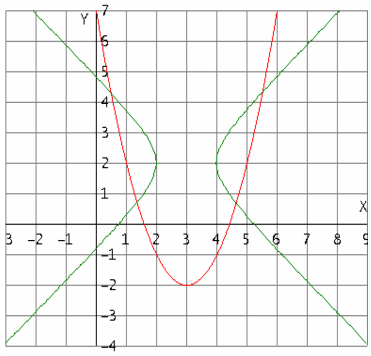


Una intersección.

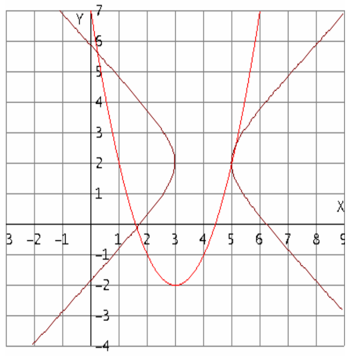


Ninguna intersección.

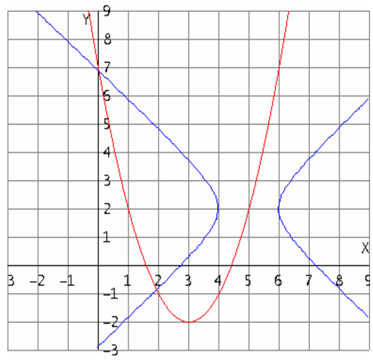
UNA PARÁBOLA CON UNA HIPÉRBOLA.



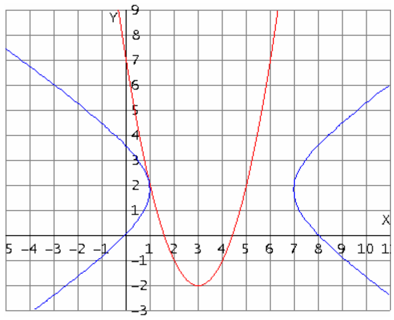
Cuatro intersecciones.



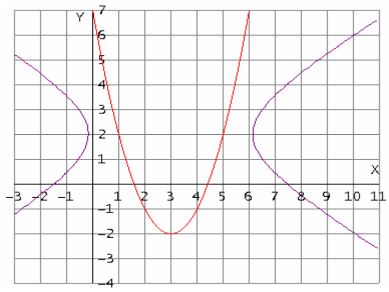
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.

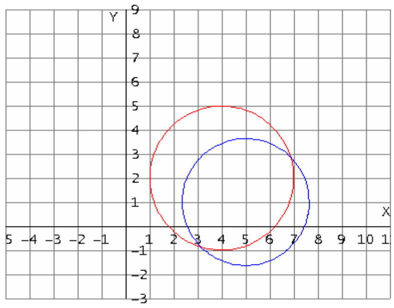


Una intersección.

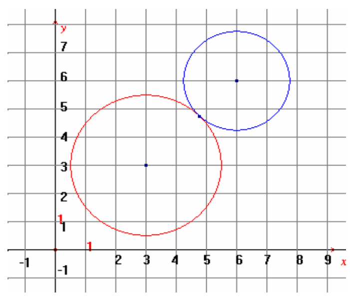


Ninguna intersección.

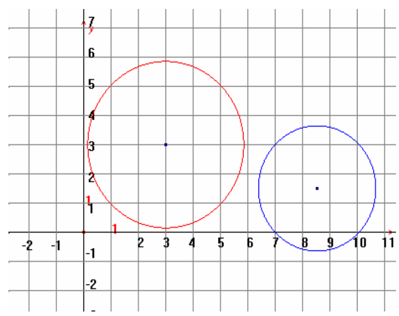
UNA CIRCUNFERENCIA CON OTRA CIRCUNFERENCIA.



Dos intersecciones.

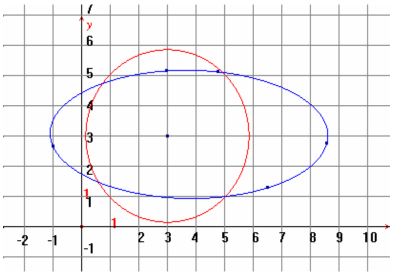


Una intersección.

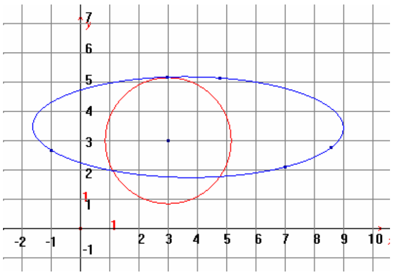


Ninguna intersección.

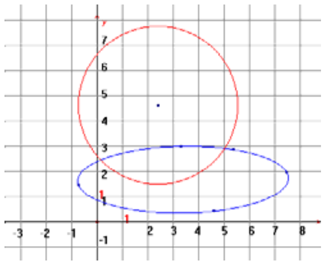
UNA CIRCUNFERENCIA CON UNA ELIPSE.



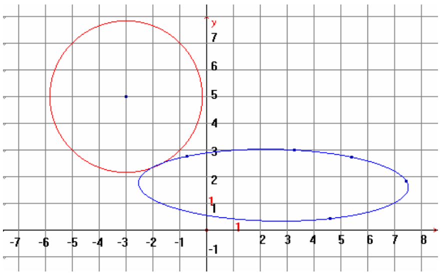
Cuatro intersecciones.



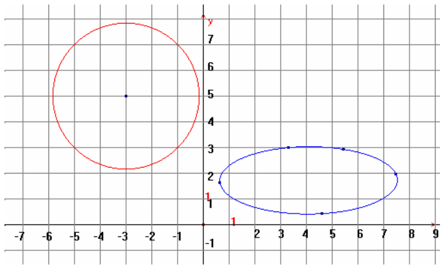
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.

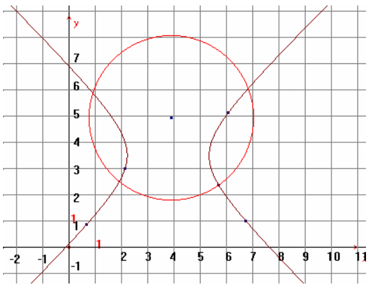


Una intersección.

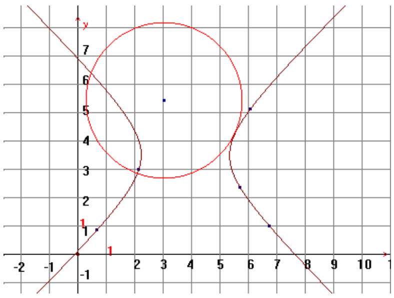


Ninguna intersección.

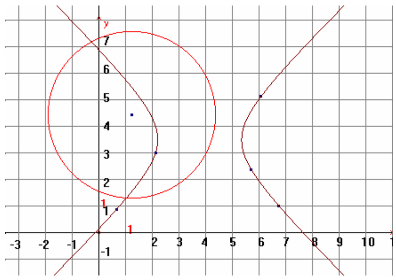
UNA CIRCUNFERENCIA CON UNA HIPÉRBOLA.



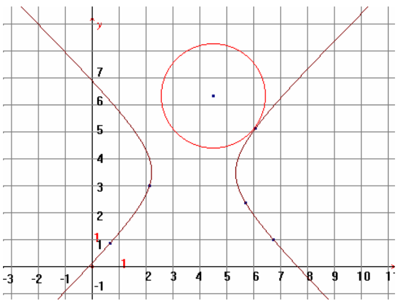
Cuatro intersecciones.



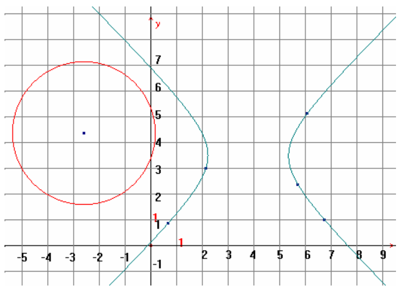
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.

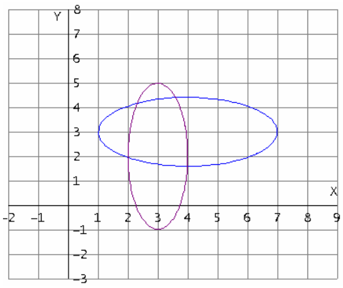


Una intersección.

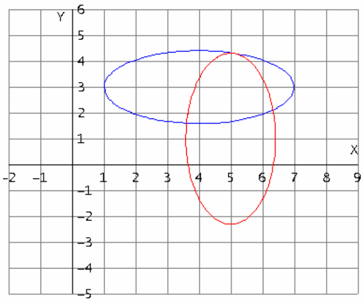


Ninguna intersección.

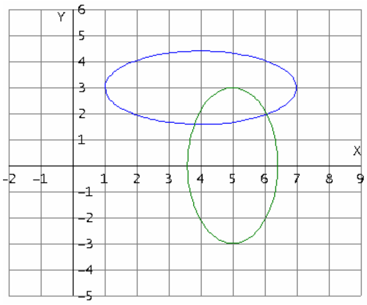
UNA ELIPSE CON OTRA ELIPSE.



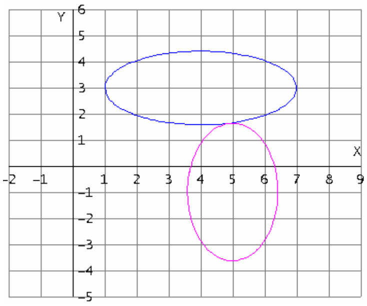
Cuatro intersecciones.



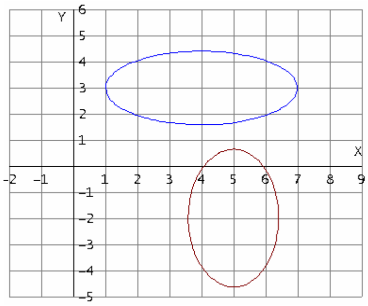
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.

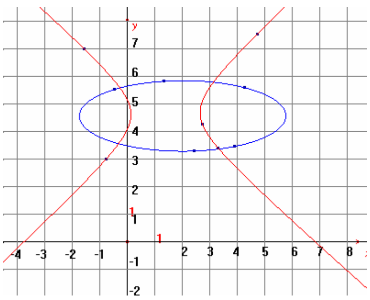


Una intersección.

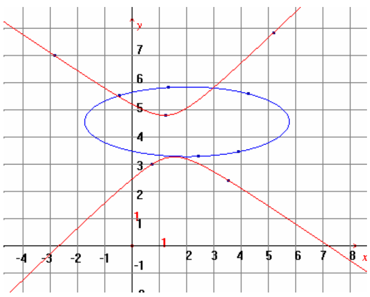


Ninguna intersección.

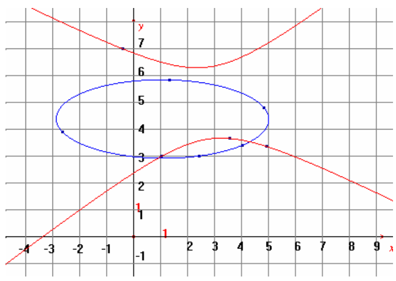
UNA ELIPSE CON UNA HIPÉRBOLA.



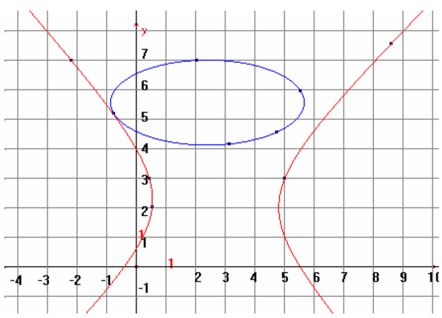
Cuatro intersecciones.



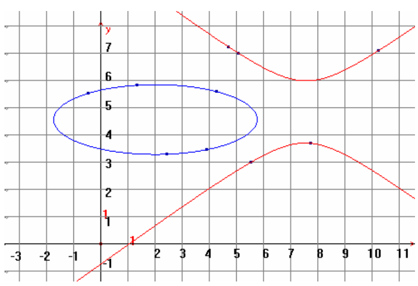
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.

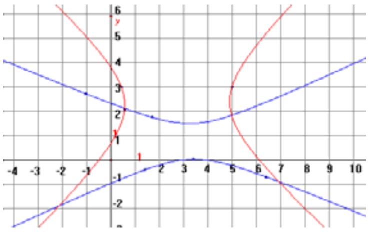


Una intersección.

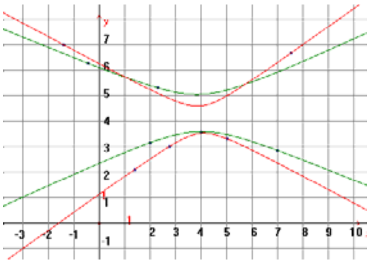


Ninguna intersección.

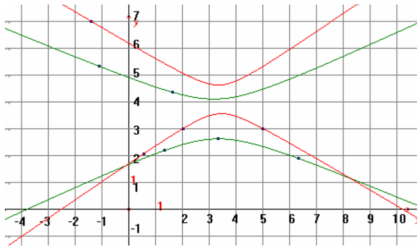
UNA HIPÉRBOLA CON OTRA HIPÉRBOLA.



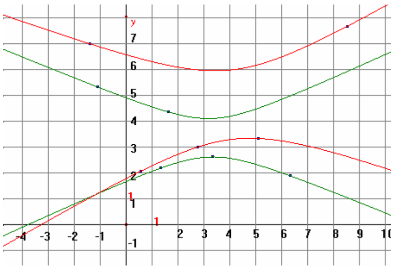
Cuatro intersecciones.



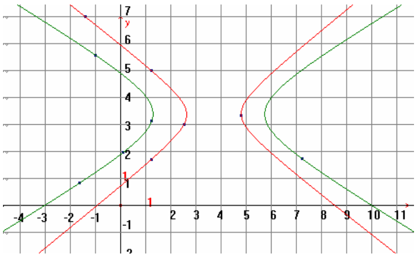
Tres intersecciones.



Dos intersecciones.



Una intersección.



Ninguna intersección.

EN LA SIGUIENTE TABLA SE RESUMEN TODOS LOS DIFERENTES CASOS.

| **Lugar Geométrico** | **Recta** | **Parábola** | **Circunferencia** | **Elipse** | **Hipérbola** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Recta** | Una o ninguna intersección. | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos o ninguna intersección. |
| **Parábola** | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. |
| **Circunferencia** | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. |
| **Elípse** | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. |
| **Hipérbola** | Una, dos o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. | Una, dos, tres, cuatro o ninguna intersección. |

En la unidad anterior aprendimos a encontrar las coordenadas de los diferentes puntos de intersección de lugares geométricos sencillos.

Para trazar la gráfica de un Lugar Geométrico es de mucha utilidad saber en que puntos corta o toca al eje $X$ y en que puntos al eje $Y$, a estos puntos se les llama las intersecciones de la gráfica con los ejes; estas intersecciones pueden ser una, varias o ninguna.
Las intersecciones con el eje $X$ serán todos los puntos con coordenadas de la forma $(x , 0)$, ya que todo punto sobre el eje $X$ su ordenada es cero. De forma similar las intersecciones de la gráfica con el eje $Y$ serán todos los puntos con coordenadas de la forma $(0 , y)$, ya que todo punto sobre el eje $Y$ su abscisa es cero. Por esto podemos afirmar que:

Para encontrar las intersecciones de una curva con el eje $X$, se le debe de dar el valor de cero a la variable "$y$" en la ecuación de esta curva y despejar a "$x$" para encontrar su valor o valores.

Para encontrar las intersecciones de una curva con el eje $Y$, se le debe de dar el valor de cero a la variable "$x$" en la ecuación de esta curva y despejar a "$y$" para encontrar su valor o valores.

**EJEMPLOS:**

**1)** Dado el lugar geométrico con ecuación $3x - 2y + 5 = 0$, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

**Solución:**

**Intersección con el eje $X$:**

Hacemos $y = 0$ al sustituirlo tenemos $3x - 2(0) + 5 = 0$

$$3x + 5 = 0$$

Despejando a $x$

$$x = -\frac{5}{3}$$

Entonces hay una intersección con el eje $X$ y es el punto $(\frac{5}{3} , 0)$.

**Intersección con el eje *Y*:**

Hacemos $x = 0$ al sustituirlo tenemos $3(0) - 2y + 5 = 0$

$$-2y + 5 = 0$$

Despejando a $y$ $\qquad y = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$

Así también hay una intersección con el eje Y que es el punto $(0\ ,\ \frac{5}{2})$.

**2)** Dado el lugar geométrico con ecuación $2x^2 + 3y - 6 = 0$, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

**Solución:**

**Intersección con el eje *X*:**

Hacemos $y = 0$ al sustituirlo tenemos $2x^2 + 3(0) - 6 = 0$

$$2x^2 - 6 = 0$$

Despejando a $x$ $\qquad x = \pm\sqrt{3}$

Es decir hay dos valores para $x$ $\qquad x_1 = +\sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$

Así hay dos intersecciones con el eje $X$ que son $(\sqrt{3}\ ,\ 0)$ y $(-\sqrt{3}\ ,\ 0)$.

**Intersección con el eje *Y*:**

Hacemos $x = 0$ al sustituirlo tenemos $2(0) + 3y - 6 = 0$

$$3y - 6 = 0$$

Despejando a $y$ $\qquad y = 2$

Hay sólo una intersección con el eje $Y$, que es el punto $(0\ ,\ 2)$.

**3)** Dado el lugar geométrico con ecuación $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 11$, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

**Solución:**

**Intersección con el eje *X*:**

Hacemos $y = 0$ al sustituirlo tenemos $(x - 2)^2 + (0 + 1)^2 = 11$

$$(x - 2)^2 + 1 = 11$$

$$(x - 2)^2 = 10$$

Despejando a $x$ se obtiene $\longrightarrow$ $\qquad x = \pm\sqrt{10} + 2$

Hay dos valores para $x$ que son $x_1 = \sqrt{10} + 2 = 5.162$

$x_2 = -\sqrt{10} + 2 = -1.162$

Las dos intersecciones con el eje $X$ son los puntos (5.162 , 0) y (–1.162 , 0).

**Intersección con el eje *Y*:**

Hacemos $x = 0$ al sustituirlo tenemos $(0-2)^2 + (y+1)^2 = 11$

$4 + (y+1)^2 = 11$

Despejando a $y$ $(y+1)^2 = 7$

$y = \pm\sqrt{7} - 1$

Los dos valores para $y$ son $y_1 = 1.645$ y $y_2 = -3.645$

Las intersecciones con el eje $Y$ son los puntos (0 , 1.645) y (0 , –3.645).

**4)** Dado el lugar geométrico con ecuación $2x^2 + 5y^2 = 12$, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

**Solución:**

**Intersección con el eje *X*:**

Hacemos $y = 0$ al sustituirlo tenemos $2x^2 + 5(0)^2 = 12$

$2x^2 = 12$

Despejando a $x$ $x = \pm\sqrt{6}$

Las dos intersecciones con el eje $X$ son los puntos (2.449 , 0) y (–2.449 , 0).

**Intersección con el eje *Y*:**

Hacemos $x = 0$ al sustituirlo tenemos $2(0)^2 + 5y^2 = 12$

$5y^2 = 12$

Despejando a $y$ $y = \pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$

Los dos valores para $y$ son $y_1 = 1.549$ y $y_2 = -1.549$

Las intersecciones con el eje $Y$ son los puntos (0 , 1.549) y (0 , –1.549).

**5)** Dado el lugar geométrico con ecuación $x^2 + 9(y-5)^2 = 9$, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

**Solución:**

**Intersección con el eje *X*:**

Hacemos $y = 0$ al sustituirlo tenemos $x^2 + 9(0-5)^2 = 9$

Despejando a $x$ se tiene

$$x^2 + 9(25) = 9$$
$$x^2 = -216$$
$$x = \pm\sqrt{-216}$$

Resulta que el valor de $x$ es la raíz cuadrada de un número negativo que no es un número real, esto quiere decir que **no hay intersección con el eje $X$.**

**Intersección con el eje $Y$:**

Hacemos $x = 0$ al sustituirlo tenemos

$$(0)^2 + 9(y - 5)^2 = 9$$
$$9(y - 5)^2 = 9$$

Despejando a $y$ se tiene

$$(y - 5)^2 = 1$$
$$y - 5 = \pm\sqrt{1}$$
$$y = 5 \pm 1$$

Los valores de $y$ son $y_1 = 6$ y $y_2 = 4$

Las intersecciones con el eje $Y$ son los puntos (0 , 6) y (0 , 4).

**EJERCICIO 2.3.2**

Para las siguientes ecuaciones que representan Lugares Geométricos, encontrar las intersecciones con los ejes cartesianos.

1) $5x - 2y + 10 = 0$ 2) $x + 3y + 8 = 0$ 3) $4x - y - 12 = 0$

4) $7x + 2y + 3 = 0$ 5) $3x - 5y + 9 = 0$ 6) $x^2 - 2y - 6 = 0$

7) $2x - y^2 + 3 = 0$ 8) $5x^2 - 2y = 0$ 9) $x^2 - 2y^2 - 6 = 0$

10) $4x^2 + y^2 - 12 = 0$ 11) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$ 12) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

13) $3x^2 - y^2 - 2 = 0$ 14) $x^2 - 2y^2 + 5 = 0$ 15) $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$

16) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 17) $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$

18) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

## AUTOEVALUACIÓN

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para probar esta unidad, y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas tu formulario que puedes consultar.
Esperamos que esta autoevaluación la termines en 2 horas como máximo.

1) Escribe las Coordenadas Polares de los puntos P(4 , 7) y Q(–2 , 5) del Plano Cartesiano.
2) Decir si los puntos A(– 3 , 2), B(1 , 4) y C(3 , 0) son los vértices de un triángulo isósceles, equilátero o escaleno y además ¿será triángulo rectángulo?. Justifica tu respuesta.
3) Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasan por los puntos P(– 1 , 5) y Q(3 , –2).
4) Encontrar las coordenadas del punto ***P*** que divide al segmento ST en la razón dada. S(3 , –5) y T(8 , 2) razón $r = \frac{1}{5}$ .
5) Trazar y encontrar la ecuación del lugar geométrico que cumple con: “Todos los puntos del plano que están 3 unidades abajo del eje $X$”
6) Encontrar el lugar geométrico definido por la frase: “Todos los puntos del plano que equidistan de los puntos A(1 , 5) y B(6 , –2)”, también encontrar su ecuación.
7) Para la ecuación $4x^2 + 2(y - 1)^2 - 18 = 0$ que representan un Lugar Geométrico, encontrar las intersecciones con los ejes cartesianos.

ESCALA:

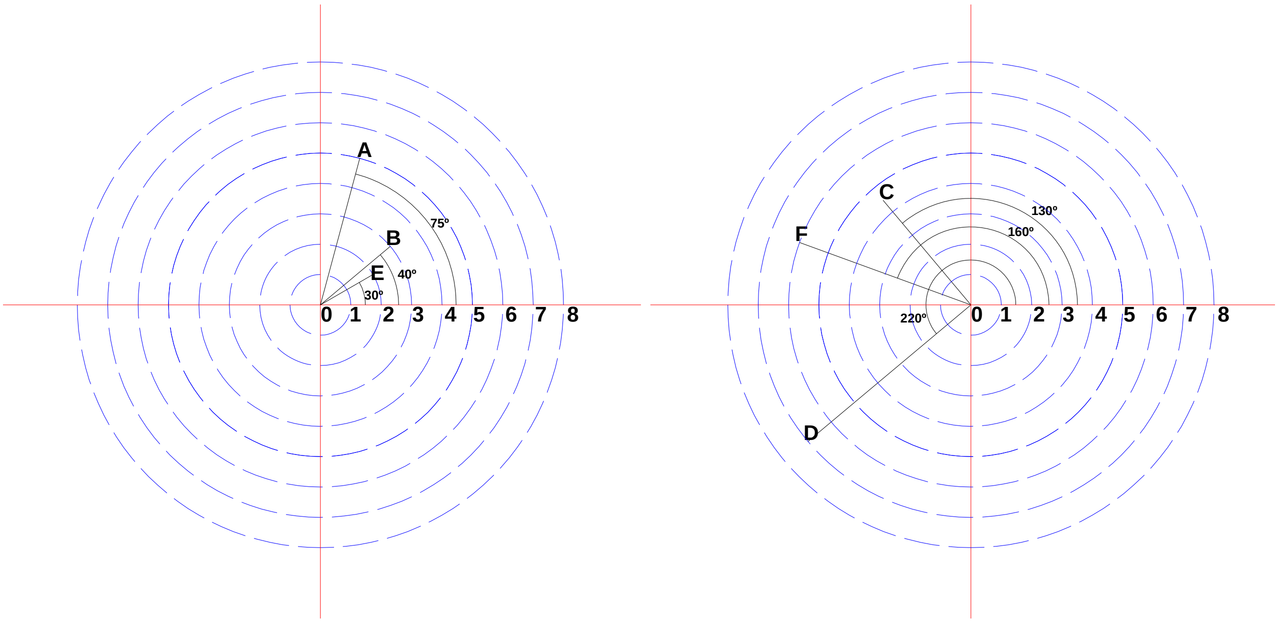
Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3 y 4 pero no has logrado todos los objetivos, SÓLO LOS BÁSICOS. Si resuelves también la 5 y la 7 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 6, ¡FELICIDADES!, lograste todos los objetivos de la unidad y estas listo para continuar con la siguiente. Si resuelves menos de 4 preguntas, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad y hacer todos los ejercicios propuestos.

TE RECOMENDAMOS RESOLVER LOS REACTIVOS CORRESPONDIENTES A ESTA UNIDAD PARA QUE REPASES Y COMPLETES MEJOR TU ESTUDIO.

## SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

### EJERCICIO 2.1

1)




2)

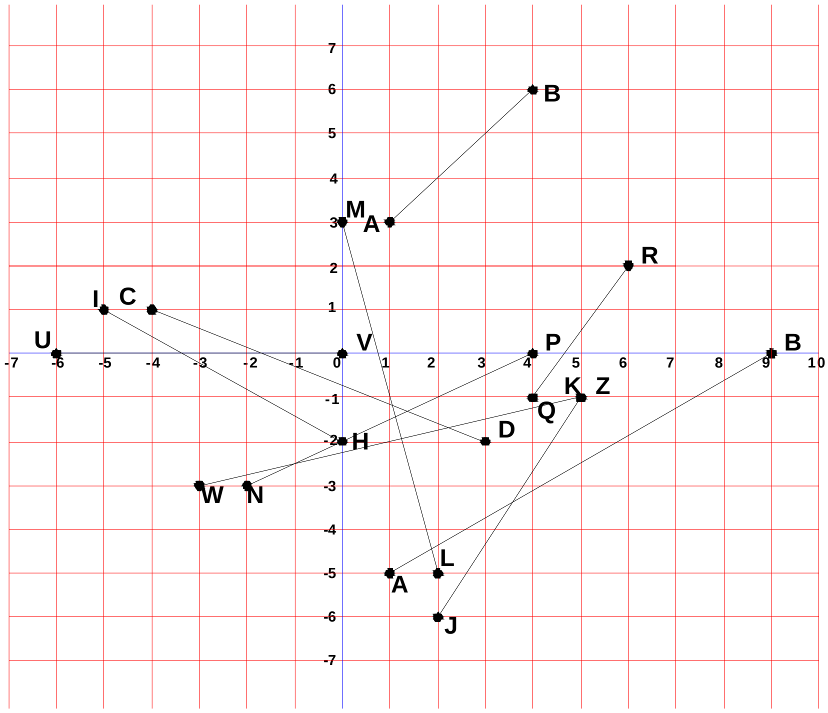
P(6 , 2) = (6.32, 18º)   Q(3 , 7) = (7.59, 67º);   R(–2 , 5) = (5.36, 112º)

S(4 , –3) = (5, 323º)   T(–6 , 5) = (7.79, 140º);   U(–2 , –5) = (5.39, 248º)

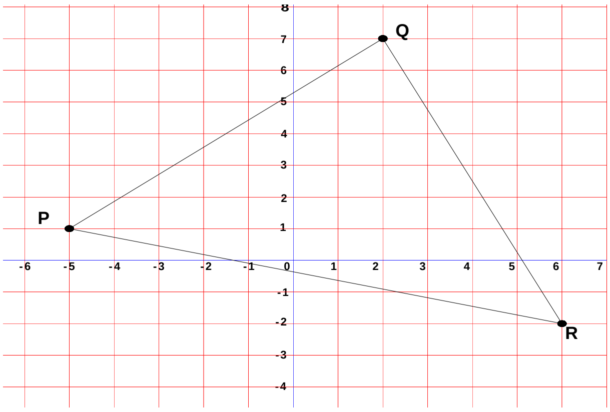
V(7 , –1) = (7.07, 352º)   Z(1 , – 4) = (4.12, 284º).

### EJERCICIO 2.2.1

1)

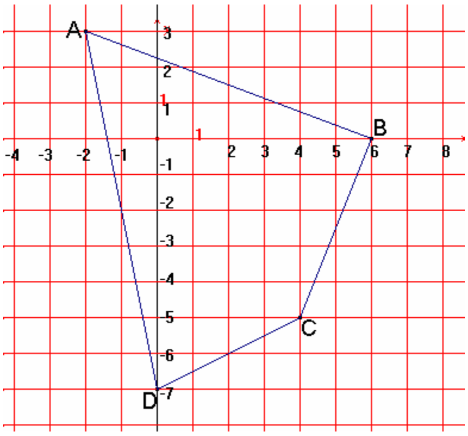


2)

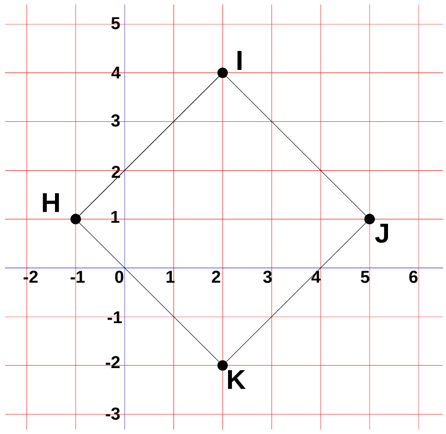



La figura es un Triángulo

3)




4)




Es un cuadrilátero

Es un cuadrado

**EJERCICIO 2.2.2**

I) 1) 8.48u 2) 14.14u 3) 22.36u 4) 10u 5) 12.80u 6) 17.46u

II) 7) 31.61u 8) 22.36u 9) 38.86u 10) 16.97u

III) 11) Isósceles ya que AB = AC = $\sqrt{8}$, además como cumple con el Teorema de Pitágoras es un triángulo rectángulo.

12) Isósceles ya que PQ = QR = 5, además como cumple con el Teorema de Pitágoras es un triángulo rectángulo.

13) Isósceles ya que LM = LN = $\sqrt{68}$, y como cumple con el Teorema de Pitágoras es un triángulo rectángulo.

14) Es isósceles ya que EF = FD = $\sqrt{26}$, pero no cumple el Teorema de Pitágoras por eso NO es triángulo rectángulo.

15) Equilátero ya que HI = IK = HK = $\sqrt{10}$ y en consecuencia NO es triángulo rectángulo.

**EJERCICIO 2.2.3**

1) 71.56°  2) 78.69°  3) 116.56°  4) 15.94°  5) 159.4°
6) –2.6, 111°
7) 1.5, 56°
8) 7/6, 49.3°
9) –2, 116.5°
10) $\frac{4}{5}$, 38.6°
11) –2, 116.5°
12) los segmentos de recta AB y BC tienen una pendiente m= –1
13) los segmentos de recta PQ y QR tienen una pendiente m= –5/4
14) 45°,45° y 90°

**EJERCICIO 2.2.5**

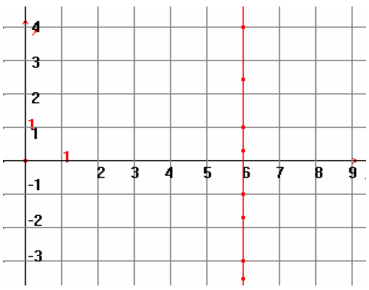
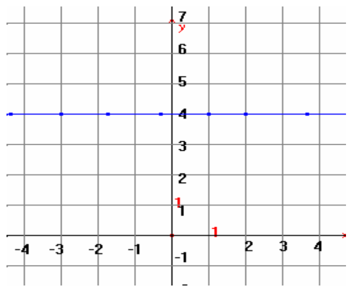
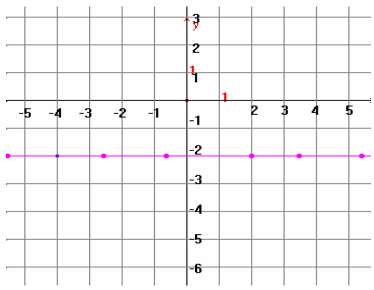
1) P(8/3 , 6)  2) P(5 , –11/5)  3) P(3/5 , –10/3)  4) P(4/3 , –7)

5) P(– 2 , –23/9)  6) P( , –)  7) P( )  8) P( )

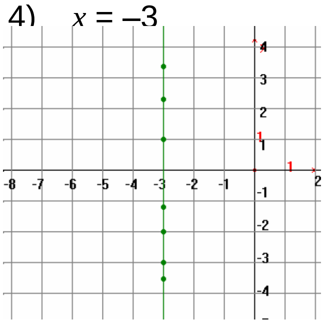
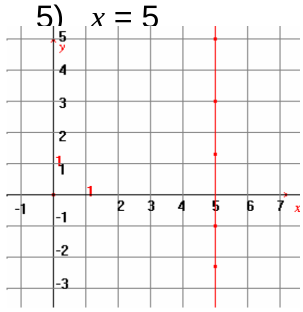
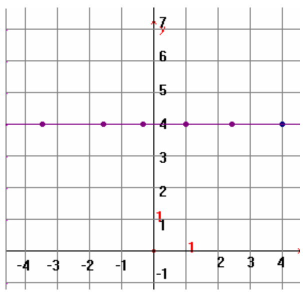
9) P( , )  10) P( , –)  11) P( )  12) P( )

**EJERCICIO 2.3.1**

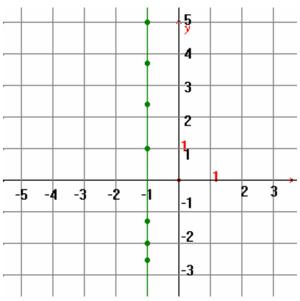
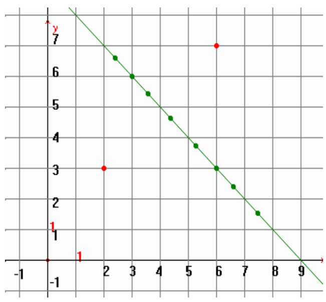
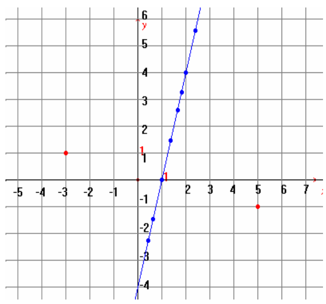
1) $x = 6$  2) $y = 4$  3) $y = -2$

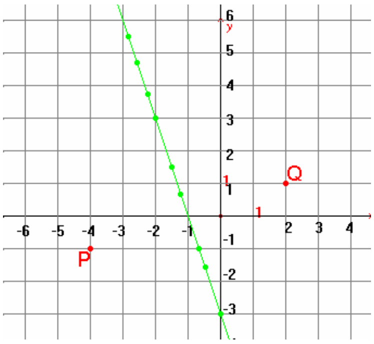
4) $x = -3$  5) $x = 5$  6) $y = 4$

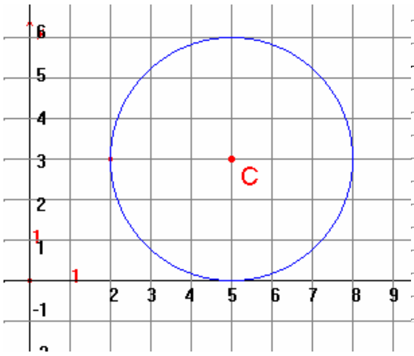
7) $x = -1$  8) $x + y - 9 = 0$  9) $4x - y - 4 = 0$

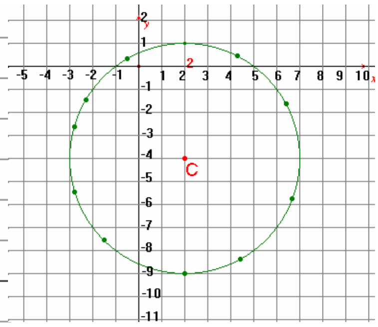
10) $3x + y + 3 = 0$



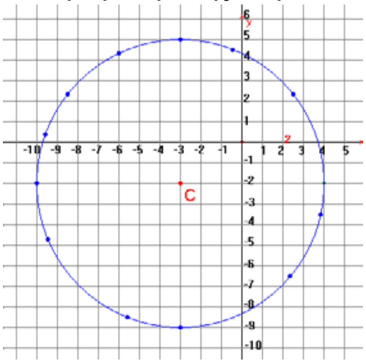

11) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$



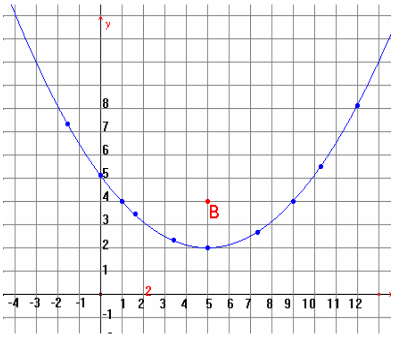

12) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$



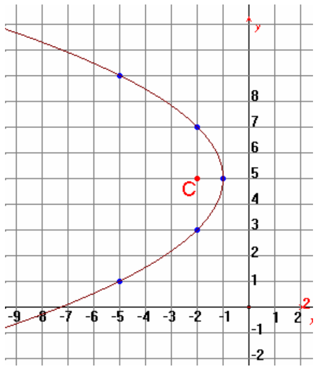

13) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 49$



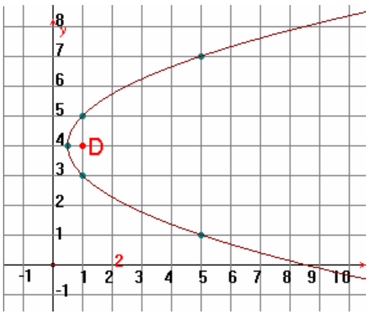

14) $x^2 - 10x - 8y + 41 = 0$



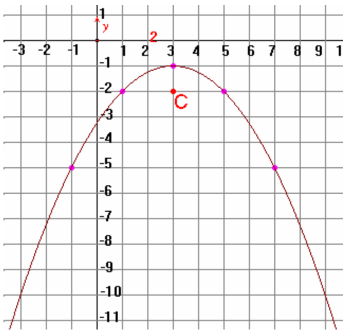

15) $y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$



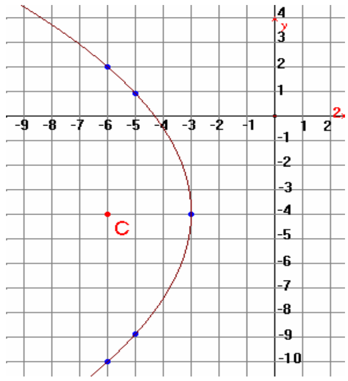

16) $y^2 - 2x - 8y + 17 = 0$




17) $x^2 - 6x + 4y + 13 = 0$




18) $y^2 + 12x + 8y + 52 = 0$




**EJERCICIO 2.3.2**

1) $(-2, 0)$ y $(0, 5)$

2) $(-8, 0)$ y $(0, -8/3)$

3) $(3, 0)$ y $(0, -12)$

4) $(-3/7, 0)$ y $(0, -3/2)$

5) $(-3, 0)$ y $(0, 9/5)$

6) $(\pm\sqrt{6}, 0)$ y $(0, -3)$

7) $(-3/2, 0)$ y $(0, \pm\sqrt{3})$

8) $(0, 0)$

9) $(\pm\sqrt{6}, 0)$ y No hay con eje $Y$

10) $(\pm\sqrt{3}, 0)$ y $(0, \pm\sqrt{12})$

11) No hay intersecciones con los ejes.

12) $(\pm\sqrt{3}, 0)$ y $(0, \pm\sqrt{3})$

13) $(\pm\sqrt{2/3}\ , 0)$ y No hay intersección con el eje $Y$

14) No hay intersección con el eje $X$ y con el eje $Y$ es $(0\ , \pm\sqrt{5/2}\ )$

15) $(\pm\sqrt{10/3}\ , 0)$ y $(0\ , \pm\sqrt{10/3}\ )$ 16) $(3\pm\sqrt{3}\ , 0)$ y No hay con el eje $Y$

17) No hay intersecciones con ninguno de los ejes.

18) $(-1\pm\sqrt{5}\ , 0)$ y $(0\ , -2\pm\sqrt{8}\ )$

**SOLUCIÓN DE LA AUTOEVALUACIÓN**

1) P(8.06 , 60.25º ) y Q(5.385 , 111.8º )

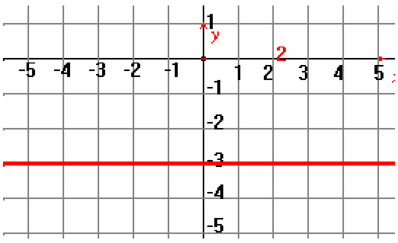
2) Es Isósceles ya que AB = BC = $\sqrt{20}$ , además es triángulo rectángulo ya que se cumple el Teorema de Pitágoras.

3) $m = -\frac{7}{4}$, ángulo de inclinación = (119.74)º

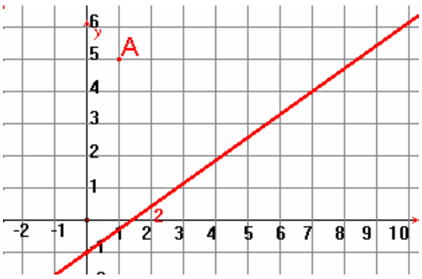
4) P(3.83 , – 3.83)

5) Ecuación: $y = -3$

o $y + 3 = 0$




6)




Su ecuación es:

$10x - 14y - 14 = 0$ ó

$5x - 7y - 7 = 0$

7) Las intersecciones con el eje $X$ son 2 y – 2.

Las intersecciones con el eje $Y$ son: –2 y 4.

## *B I B L I O G R A F I A*

1.- Swokowski E. W. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica. México, 2002.

2.- Fundamentos de Geometría Analítica, Unidad IV: Lugares Geométricos; Dirección General de Proyectos Académicos, UNAM.

3.- Berenguer L., Berenguer M, et al. Construir las Matemáticas, tomo 2, Proyecto Sur, Granada España 1997.

4.- Fuller Gordon, Geometría Analítica, Addison-Wesley, México 1999.

5.- Caballero, A. et al. Geometría Analítica, Esfinge, M-exico 2000.

**REACTIVOS DE LA UNIDAD 2: SISTEMAS COORDENADOS Y LUGARES GEOMÉTRICOS.**

Para complementar tu estudio sobre esta unidad debes de resolver los siguientes reactivos ya que tu examen extraordinario puede estar formado con preguntas muy parecidas a las que te presentamos a continuación.
Cada reactivo tiene asignada una letra que corresponde a su clasificación según el grado de dificultad, F: fácil, R: regular y D: difícil.
Te recomendamos que los clasificados como D los dejes al final y si es necesario pide ayuda a algún profesor, esperamos no tengas mayor problema con los ejercicios marcados con R y menos con los F.

1(F).- Los sistemas de referencia nos sirven para identificar :

a) Las operaciones. b) Los números. c) La posición de los objetos.
d) Las figuras. e) Las ecuaciones.

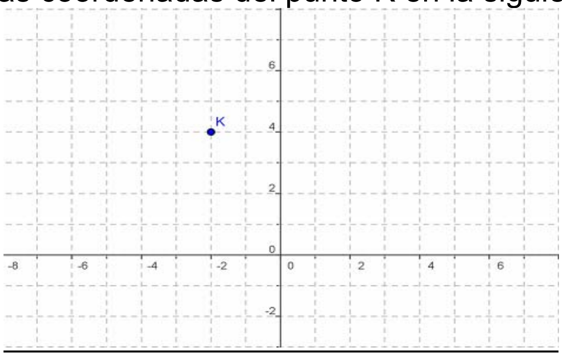
2 (F).- En el plano llamamos sistema de ejes cartesianos al que está formado por :

a) Una recta numérica horizontal.
b) Dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente.
c) Tres rectas numéricas que se cortan perpendicularmente en un punto.
d) Una semirrecta numérica, y un punto, que es su extremo izquierdo.
e) Tres planos perpendiculares dos a dos, que se cortan en un punto.

3(F).- Cada punto en el sistema de ejes cartesianos esta determinado por dos números que representan:

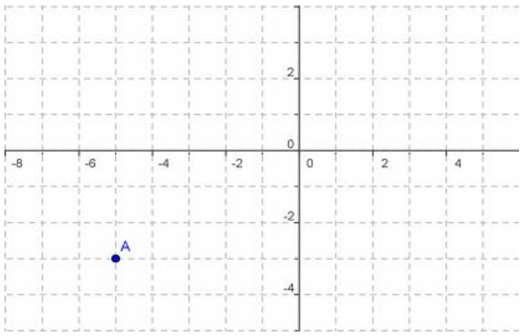
a) La distancia al eje de abscisas y la distancia al eje de ordenadas.
b) Sus soluciones.
c) La distancia al origen y la medida del ángulo que se forma con la semirrecta.
d) Las distancias al origen de coordenadas.
e) Su tamaño y su forma.

4(F).- ¿Cuáles son las coordenadas del punto K en la siguiente gráfica?



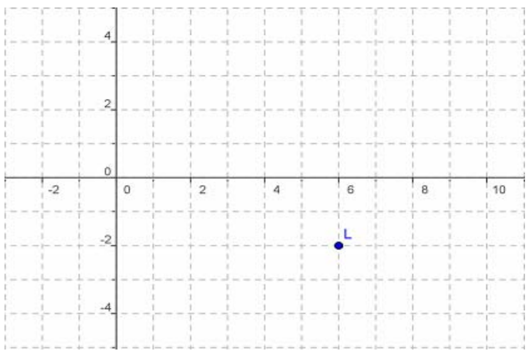

a) (–2 , 4 ) b ) (4 , –2 ) c ) (2 , –4) d ) (–4 , 2) e ) (2 , 4)

5(F).- ¿Cuáles son las coordenadas del punto A de la siguiente gráfica?



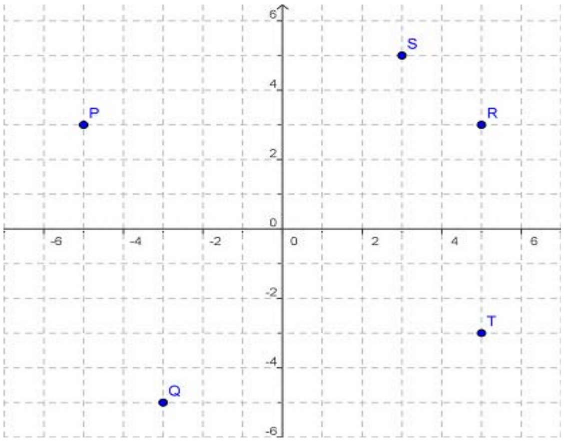

a) (5 , 3) b ) (–5 , –3) c ) (–3 , –5) d ) (5 , 3) e ) (–3 , 5)

6(F).- ¿Cuáles son las coordenadas del punto L en la siguiente gráfica?



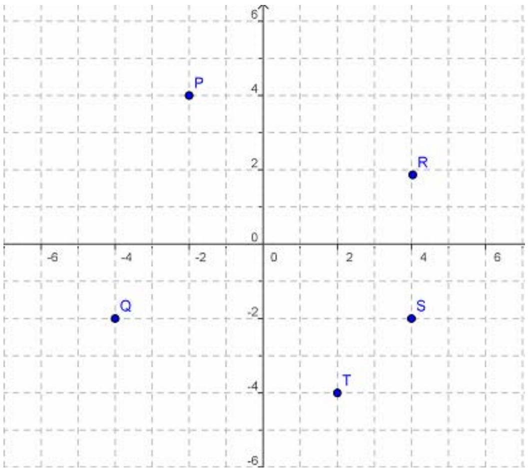

a) (–2 , 6) b ) (–6 , 2) c ) (2 , –6) d ) (–6 , –2) e ) ( 6 , –2 )

7 (F).- ¿Cuál es el punto que tiene coordenadas (–3 , –5) ?



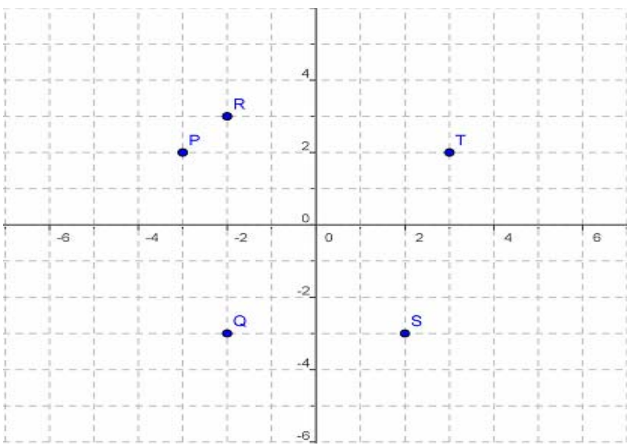

a ) P b ) Q c ) R d ) S e ) T

8(F).- Cuál es el punto que tiene coordenadas (2 , –4)




a ) P b ) Q c ) R d ) S e ) T

9(F).- ¿Cuál es el punto que tiene coordenadas (–2 , 3) ?




a ) P b ) Q c ) R d ) S e ) T

10(F).- En el plano llamamos sistema de coordenadas polares al formado por:

a) Una recta numérica horizontal.

b) Dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente.

c) Tres rectas numéricas que se cortan perpendicularmente en un punto.

d) Una semirrecta numérica, y un punto, que es su extremo izquierdo.

e) Tres planos perpendiculares dos a dos, que se cortan en un punto.

11(F).- Cada punto en el sistema de coordenadas polares esta determinado por dos números que representan:

a) La distancia al eje de abscisas y la distancia al eje de ordenadas.

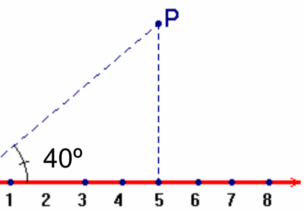
b) Sus soluciones.

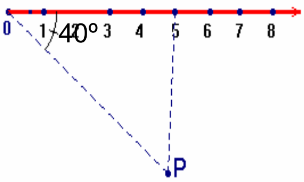
c) La distancia al origen y la medida del ángulo que se forma con la semirrecta.

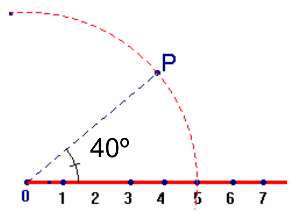
d) Las distancias al origen de coordenadas.

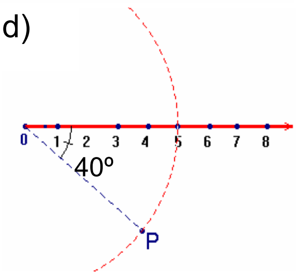
e) Su tamaño y su forma.

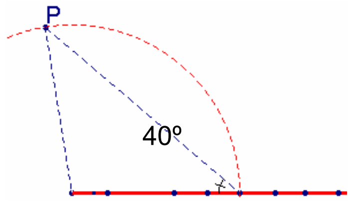
12(R).- La representación gráfica del punto polar P(5 , 40º) es:

a) 

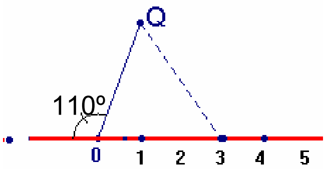

b) 

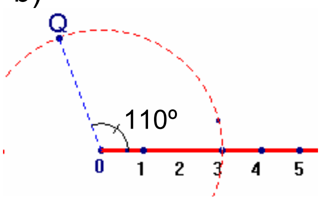

c) 

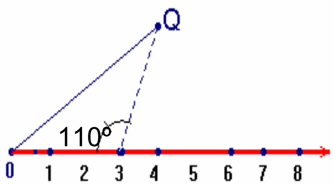

d) 

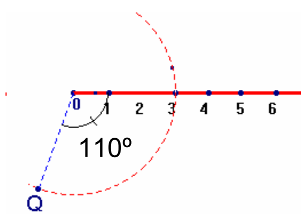

e) 

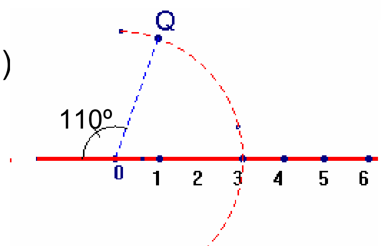

13(R).- La representación gráfica del punto polar Q(3 , 110º) es:

a) 


b) 

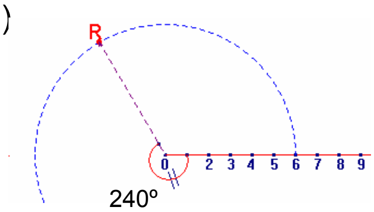

c) 


d) 

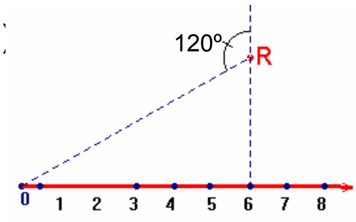

e) 

14(R).- La representación gráfica del punto polar R(6 , 240º) es:

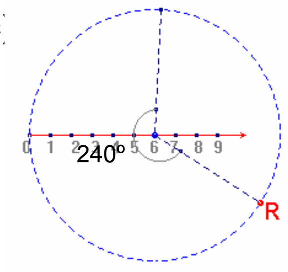
a)



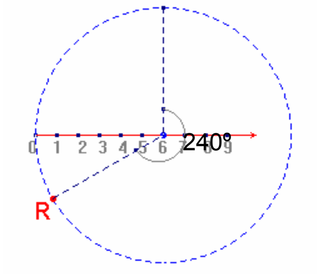

b)



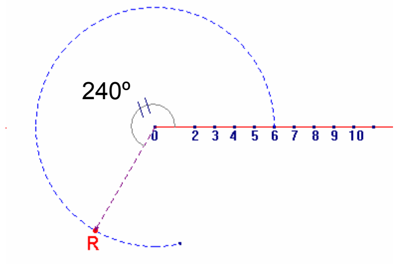

c)



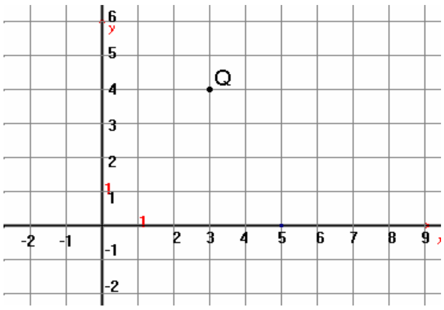

d)




e)




15(R).- En la siguiente figura las **coordenadas polares** del punto **Q** son:

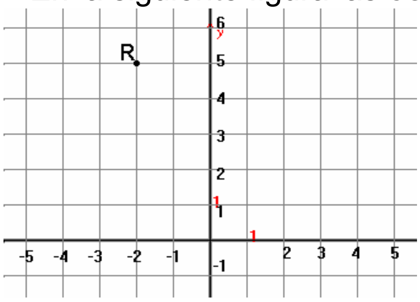



a) (3 , 4) b) (3 , 45º)

c) (4 , 45º) d) (5 , 59º)

e) (5 , 53.13º)

16(R).- En la siguiente figura las **coordenadas polares** del punto **R** son:

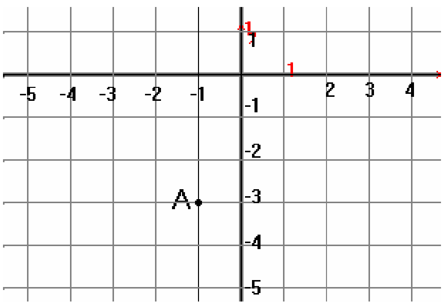



a) (– 2 , 5) b) (– 2 , 120º)

c) (5 , 68.2º) d) (5.38 , 111.8º)

e) (5 , 104º)

17(R).- En la siguiente figura las **coordenadas polares** del punto **A** son:

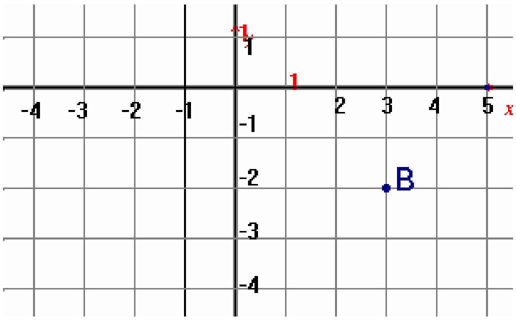



a) (3.16 , 251.56º ) b) (–1 , 80º)

c) (–3 , 71.56º) d) (2.64 , 250º)

e) (– 1 , –3)

18(F).- En la siguiente figura las **coordenadas polares** del punto **B** son:




a) (3 , –2)   b) (3 , 45º)

c) (3.6 , 326.3º)   d) (3 , 33.7º)

e) (–2 , 56.3º)

19(F).- Un segmento en el plano se identifica por:

a) Su forma y posición.   b) Su longitud.   c) Todos sus puntos.
d) Las coordenadas de sus extremos.   e) Las coordenadas de sus vértices.

20(F).- Un polígono en el plano se identifica por:

a) Su forma y posición.   b) Su longitud.   c) Todos sus puntos.
d) Las coordenadas de sus extremos.   e) Las coordenadas de sus vértices.

21(F).- La distancia entre los puntos (0 , 5) y (–3 , 0) es:

a) 8   b) $\sqrt{8}$   c) $\sqrt{31}$   d) $\sqrt{34}$   e) 4

22(R).- La distancia entre los puntos (–1 , 1) y (4 , 3) es:

a) 5   b) $\sqrt{29}$   c) $\sqrt{13}$   d) 7   e) $\sqrt{41}$

23(F).- ¿Cuánto mide el segmento que tiene por extremos los puntos A(3 , 2) y B(9 , 10)?

a ) 10   b ) 9   c ) 5   d ) 8   e ) 7

24(R).- Los vértices de un triángulo son A(–2 , 1), B(4 , –3) y C(6 , 5), por la medida de sus lados el triángulo es:

a) Equilátero   b) Isósceles   c) Escaleno
d) Rectángulo   e) No se forma un triángulo.

25(R).-Determina si el $\Delta ABC$ es isósceles si A(– 1 , 2), B(4 , 3) y C(0 , 0):

a) No es ya que AB = $\sqrt{26}$ , BC = 5 y AC = $\sqrt{5}$

b) No es ya que AB = $\sqrt{34}$ , BC = 5 y AC = $\sqrt{5}$

c) Si es ya que AB = 5.09, BC = 5 y AC = $\sqrt{5}$

d) Si es ya que AB = $\sqrt{24}$ , BC = 5, BA = $\sqrt{24}$

e) No es ya que AB = $\sqrt{10}$ , BC = 5 y AC = $\sqrt{3}$

26(F).- ¿Cuánto miden las diagonales del rectángulo cuyos vértices son A( 2 , 3 ), B(6 , 3), C(6 , 6) y D (2 , 6)?

a ) 3 y 4 b ) Las dos diagonales miden 3 c ) Las dos diagonales miden 5 d ) Las dos diagonales miden 6 e ) 4 y 5

27(F).- ¿Cuánto miden las diagonales del paralelogramo cuyos vértices son A(1 , 2), B(6 , 4), C(7 , 8) y D(2 , 6)?.

a ) $\sqrt{72} y \sqrt{20}$ b) cada una de las diagonales mide 6
c ) cada una de las diagonales mide 6.5 d ) $\sqrt{12} y \sqrt{6}$
e ) cada una de las diagonales mide 4

28(R).- El área del cuadrado cuyos vértices son (0 , 1), (3 , 5), (7 , 2) y (4 , – 2) es:

a) 5 $u^2$ b) $\sqrt{50}$ $u^2$ c) 50 $u^2$ d) 40 $u^2$ e) 25 $u^2$

29(R).- El radio de la circunferencia con centro en C(2 , 3) y que pasa por el punto A(7 , 2) es:

a) $\sqrt{26}$ b) $\sqrt{14}$ c) $\sqrt{106}$ d) 9 e) 4

30(R).- Las coordenadas de los vértices de un triángulo son (2 , 1), (4 , 1) y (3 , 2), la magnitud de su perímetro es:

a) $3\sqrt{2}$ b) 2 + $\sqrt{2}$ c) 2 + $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{6}$ e) $2\sqrt{2}$

31(R).- El área del rectángulo con vértices los puntos A( 1 , 1 ), B ( 7 , 9 ), C ( 3 , 12 ) y D (–3 , 4) es:

a ) 30 u $^2$ b ) 35 u $^2$ c ) 40 u $^2$ d ) 45 u $^2$ e ) 50 u $^2$

32(D).- Si el punto ($x$ , 3) está a la misma distancia de (3 , – 2) y (7 , 4), entonces el valor de $x$ es:

a) 5 b) 7 c) 2 d) 4 e) 1

33(D).- Los vértices de un triángulo son A(–1 , 1), B(–5 , –3) y C(–3 , 3), por la medida de sus lados el triángulo es:

a) Equilátero b) Isósceles c) Acutángulo

d) Rectángulo e) No se forma un triángulo.

34(D).- Si la distancia entre los puntos P(3 , $y$) y Q(–3 , 6) es 10 unidades, el valor de $y$ es:

a) 14 b) – 14 c) 3 d) 2 e) 4

35(F).- Las coordenadas del punto medio del segmento AB donde A(−3, −2) y B(−5, 2) son:

a) (– 4 , 1) b) (– 4 , 0) c) (1 , – 2) d) (2 , 8) e) ($-\frac{5}{2}$ , –☝)

36(F).- Las coordenadas del punto medio del segmento AB donde A(7, −1) y B(5, 3) son:

a) (1 , 2) b) (6 , 1) c) (1 , – 2) d) (2 , 8) e) (3 ,1)

37(R).- Las coordenadas de un extremo de un segmento son A(–3 , 3) y las de su punto medio son M(– 1 , 2); las coordenadas del extremo B son:

a) (0 , 1) b) (2 , 1) c) (2 , – 1) d) (1 , 1) e) (–2 , $\frac{5}{2}$ )

38(R).- Los extremos de un diámetro de una circunferencia son A(–10 , –3) y B(4 , 6), las coordenadas del centro de la circunferencia son:

a) (–3 , $\frac{3}{2}$) b) (–7 , $-\frac{9}{2}$ ) c) (– 3 , $-\frac{3}{2}$) d) (– 6 , 3) e) ($-\frac{13}{2}$ , 5)

39(D).- Un diámetro de una circunferencia de centro C(–4 , 1) tiene como extremo al punto P(2 , 6). Las coordenadas del otro extremo son:

a) (–10 , –4) b) (–1 , $\frac{7}{2}$ ) c) (–4 , 1) d) ($\frac{3}{2}$ , 1) e) (–$\frac{3}{2}$ , 4)

40(D).- Los vértices de un triángulo son A(2 , 2), B (9 , 5) y C (2 , 8). ¿Cuánto mide la mediana del triángulo que va desde el vértice C al lado AB ?.

a ) 4.87 b ) 5.7 c) 6 d ) 6.7 e ) 7

41(D).- Los vértices de un triángulo son A( 2 , 2 ), B ( 9 , 5 ) y C ( 2 , 8 ). ¿Cuánto mide la mediana del triángulo que va desde el vértice B al lado AC?.

a ) 4.87 b ) 5.7 c ) 6 d ) 6.4 e ) 7

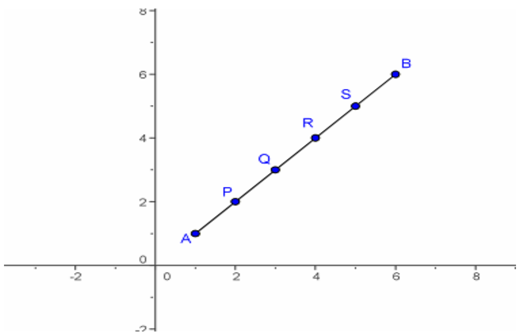
42(D).- Los vértices de un triángulo son A( 2 , 2 ), B ( 9 , 5 ) y C ( 3 , 9 ). Cuánto mide la mediana del triángulo que va desde el vértice A al lado BC.

a ) 4.87 b ) 5.7 c ) 6 d )6.4 e ) 7

43(R).- La mediatriz del segmento AB que tiene por extremos a los puntos A(– 3 , 4) y B(1 , –8) pasa por el punto:

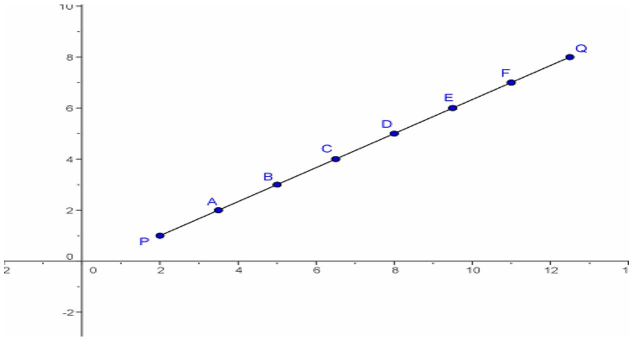
a) (2 , –1) b) (1 , –2) c) (–1 , –2) d) (–2 , –1) e) (1 , 2)

44(F).- El segmento AB se divide en 5 partes iguales como se muestra en la siguiente figura. Cuál es el punto que divide al segmento AB en la razón $r = \frac{3}{2}$



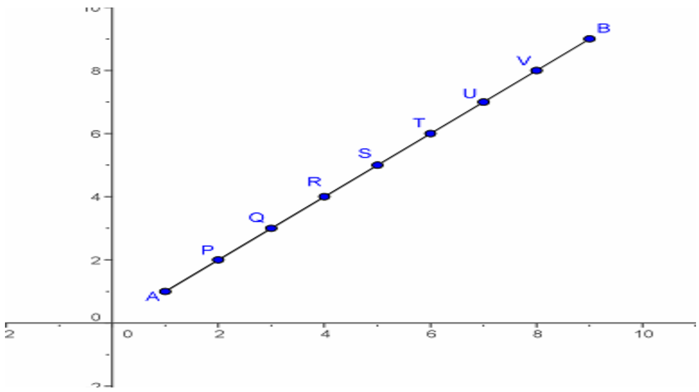

a ) P b ) Q c ) R d ) S e ) B

45(F).- El segmento AB se divide en 7 partes iguales como se muestra en la siguiente figura. Cuál es el punto que divide al segmento PQ en la razón $r = \frac{3}{4}$



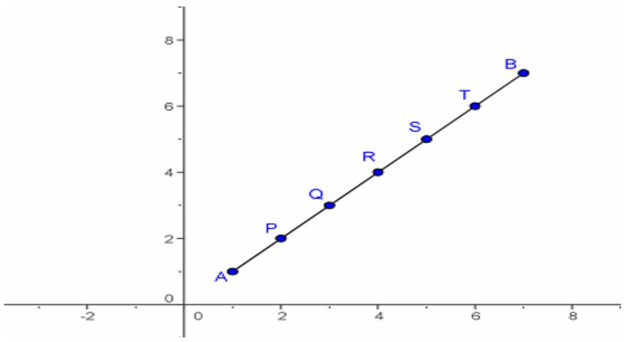

a ) C b ) A c ) E d ) B e ) D

46(F).- El segmento BA se divide en 8 partes iguales como se muestra en la siguiente figura. Cuál es el punto que divide al segmento BA en la razón $r = \frac{5}{3}$



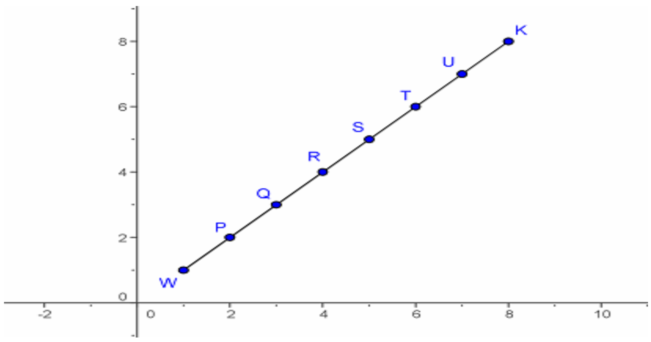

a ) P b ) T c ) Q d ) U e ) R

47(F).- El segmento BA se divide en 6 partes iguales como se muestra en la siguiente figura. Cuál es el punto que divide al segmento BA en la razón $r = \frac{1}{5}$



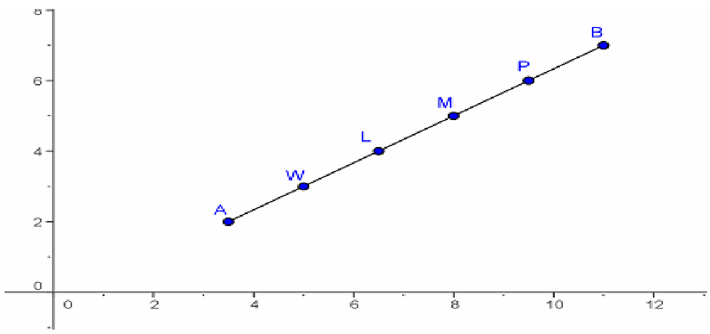

a ) R b ) T c ) P d ) S e ) Q

48(F).- El segmento WK se divide en 7 partes iguales como se muestra en la siguiente figura. Cuál es la razón en la que el punto Q divide al segmento WK



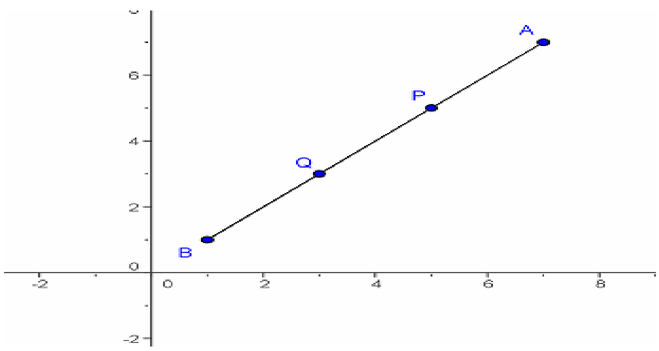

a ) $\frac{3}{4}$ b ) $\frac{5}{2}$ c ) $\frac{4}{3}$ d ) $\frac{2}{5}$ e ) $\frac{1}{6}$

49(F).- El segmento AB se divide en 5 partes iguales como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es la razón en la que el punto P divide al segmento AB?




a ) 5 b ) $\frac{2}{3}$ c ) 4 d ) $\frac{5}{1}$ e ) 6

50(F).- El segmento BA se divide en 3 partes iguales como se muestra en la siguiente figura. La razón en la que el punto P divide al segmento BA es:




a ) 3 b ) 1 c ) 4 d ) 2 e ) $\frac{1}{2}$

51(R).- Las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos

R(2 , 4) y S(8 , –5) en la razón $r = 2$ son:

a) (4 , 1)  b) (6 , –2)  c) (1 , 4)  d) (–2 , 6)  e) (–14/3 , 14/3)

52(R).- Las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos A(8 , –2) y B(2 , 4) en la razón $r = -2$ son:

a) (12 , 6)  b) (–4 , 10)  c) (4 , –10)  d) (–12 , –6)  e) (–4 , 6)

53(R).- Las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos R(–4 , 4) y S(2 , 6) en la razón $r = -3$ son:

a) (7 , 5)  b) (5 , 7)  c) (5 , –7)  d) (–7 , 5)  e) (–5 , –7)

54(D).- Si A(– 4 , 2) y B(4 , 6) son los puntos extremos del segmento AB, la razón $r$ en que el punto P(2 , 5) divide al segmento es:

a) 3  b) ½  c) $\frac{3}{2}$  d) $\frac{1}{3}$  e) ⅔

55(D).- A( 1 , 1 ) y B ( 8 , 8 ) son los puntos extremos del segmento AB. La razón “$r$” en la que el punto P ( 6 , 6 ) divide a este segmento.

a ) $r = 5$  b ) $r = \frac{5}{2}$  c ) $r = \frac{2}{5}$  d ) $r = 2$  e ) $r = 7$

56(R).- A( 1 , 1 ) y B ( 5 , 9 ) son los puntos extremos del segmento AB. La razón “ $r$ ” en la que el punto P(4 , 7) divide a este segmento es:

a ) $r = 5$  b ) $r = 4$  c ) $r = 8$  d ) $r = 3$  e ) $r = 6$

57(F).- El valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (2 , –3) y

B (1 , 6) es.

a ) 9 b ) 4 c ) –9 d )7.5 e ) 6.4

58(F).- La pendiente de la recta que pasa por los puntos (–2 , –4) y (1 , 3) es:

a) 1 b) $\frac{7}{3}$ c) – $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{7}$ e) ⅔

59(R).- La pendiente de la recta que pasa por los puntos (3 , –1) y $(-\frac{9}{4}, \frac{7}{3})$ es:

a) $-\frac{40}{63}$ b) $\frac{9}{16}$ c) – $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{4}{3}$ e) 1

60(R).- Si los puntos A(2 , 6), B(0 , 2) y C(– 3 , $y$) están sobre la misma recta, la ordenada de C es:

a) –8 b) – 4 c) ½ d) 4 e) 8

61(D).- La pendiente de la recta que pasa por A(1 , 3) y B(2 , $y$) es – ⌨, la ordenada de B es:

a) $\frac{23}{8}$ b) $-\frac{21}{8}$ c) $\frac{25}{8}$ d) 2 e) –5

62(D).- Si los puntos A(0 , 4), B(3 , –2) y C($x$ , – 2) están sobre la misma recta, la abscisa de C es:

a) –2 b) 3 c) 12 d) – 8 e) 8

63(F).- La medida del ángulo de inclinación de la recta con pendiente $\frac{7}{8}$ es:

a) 0.015º b) 0.71º c) 41.18º d) 45.76º e) 48.8º

64(R).- La medida del ángulo de inclinación de la recta con pendiente $-\frac{8}{5}$ es:

a) 57.99º b) 178.09º c) 115.56º d) 122º e) 64.43º

65(R).- El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(–4 , –1) y B(–2 , 1) mide:

a) 45º b) 135º c) 101.31º d) 0º e) 59º

66(R).- El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos P(6 , 3) y Q(7 , 2) mide:

a) 45º b) 130º c) 30.96º d) 0º e) 135º

67(R).- El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(3 , –1) y B(–2 , 3) mide:

a) 38.65º b) 141.35º c) 128.66º d) 0 e) 89º

68(R).- ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación del segmento que tiene por extremos los puntos A(1 , 3) y B( 6 , 7)?.

a ) $40^{O}$ b) $38.65^{O}$ c ) $45^{O}$ d ) $51.34^{O}$ e ) $55^{O}$

69(F).- ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación del segmento que tiene por extremos los puntos A(2 , 4) y B(–2 , 8)?.

a ) $135^{O}$ b) $145^{O}$ c ) $130^{O}$ d ) $140^{O}$ e ) $150^{O}$

70(R).- ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación del segmento que tiene por extremos los puntos A(6 , 2) y B(– 2 , 6) ?.

a ) $116.56^{O}$ b) $45^{O}$ c ) $130^{O}$ d ) $153.43^{O}$ e ) $63.43^{O}$

71(R).- ¿Cuánto miden el ángulo C del triángulo rectángulo cuyos vértices son

A ( 0 , 0 ), B( 4 , 0 ) y C( 0 , 3) ?.

a ) 53.13$^{O}$ b) 36.869$^{O}$ c ) 45$^{O}$ d ) 26.869$^{O}$ e ) 42.1$^{O}$

72(R).- ¿Cuánto miden el ángulo C del triángulo rectángulo cuyos vértices son A(2 , 0), B(8 , 0) y C(2 , 5) ?.

a ) 60$^{O}$ b) 40.22$^{O}$ c ) 45$^{O}$ d ) 50.19$^{O}$ e ) 39.8$^{O}$

73(R).- ¿Cuánto miden el ángulo C del triángulo con vértices A (2 , 0), B(7 , 0) y C( 4 , 6) ?.

a ) 45$^{O}$ b) 47$^{O}$ c ) 40$^{O}$ d )55$^{O}$ e ) 42$^{O}$

74(D).- ¿Cuánto mide el ángulo A del triángulo cuyos vértices son A (2 , 2), B( 9 , 5 ) y C( 2 , 8 )?.

a ) 72$^{O}$ b ) 60.5$^{O}$ c ) 66.8$^{O}$ d ) 70$^{O}$ e ) 62$^{O}$

75(D).- ¿Cuánto mide el ángulo D del paralelogramo cuyos vértices son A (– 2 , 1), B (1 , 5), C (10 , 7) y D (7 , 3)?.

a ) 139.39$^{O}$ b ) 40.6$^{O}$ c ) 143.7$^{O}$ d ) 128$^{O}$ e ) 154.6$^{O}$

76(F).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 3 unidades a la izquierda del eje $Y$ es:

a) $y = 3$ b) $x = 3$ c) $y = -3$ d) $x = -3$ e) $x + y = 3$

77(F).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 2 unidades abajo del eje $X$ es:

a) $y = 2$ b) $x = 2$ c) $y = -2$ d) $x = -2$ e) $x - y = 2$

78(F).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 5 unidades a la derecha del eje $Y$ es:

a) $y = 5$ b) $x = 5$ c) $y = –5$ d) $x = –5$ e) $y + 5 = x$

79(F).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 4 unidades arriba del eje $X$ es:

a) $x + 4 = y$ b) $y = 4$ c) $x = 4$ d) $y = –4$ e) $x = –4$

80(F).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 9 unidades abajo del eje $X$ es:

a) $y = 9$ b) $x = 9$ c) $x = –9$ d) $y = –9$ e) $x – y = 9$

81(F).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 7 unidades a la izquierda del eje $Y$ es:

a) $y = 7$ b) $x = 7$ c) $y = –7$ d) $x + y = –7$ e) $x = –7$

82(R).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 1 unidad a la derecha de la recta $x = 3$.

a) $x = 4$ b) $y = 4$ c) $x = 2$ d) $y = 2$ e) $x = –2$

83(R).- Cuál es la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 5 unidades arriba de la recta $y = –3$.

a) $y = 8$ b) $y = 2$ c) $x = 4$ d) $y = –4$ e) $x = –2$

84(R).- La ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que están 2 unidades abajo de la recta $y = 7$.

a) $x = 5$ b) $y = 7$ c) $x = 7$ d) $y = 5$ e) $y = –2$

85(R).- La ecuación de todos los puntos que están a la misma distancia tanto del eje de las abscisas como del eje de las ordenadas es:

a) $y = \pm x$ b) $y = 0$ c) $2x + y = 0$ d) $y = \pm 1$ e) $x = \pm 2y$

86(R).- La ecuación de todos los puntos que están a 3 unidades de distancia del origen del plano cartesiano es:

a) $x = 3y$ b) $y = 3$ c) $x^2 + y^2 = 9$ d) $x^2 + y^2 = 3$ e) $x = 3$

87(R).- La ecuación de todos los puntos que están a 5 unidades de distancia del origen del plano cartesiano es:

a) $y = 5x$ b) $y = 5$ c) $x^2 + y^2 = 5$ d) $x = 5$ e) $x^2 + y^2 = 25$

88(F).- La ecuación $y = -7$ es el lugar geométrico de :

a) Todos los puntos que están 7 unidades arriba del eje $X$.
b) Todos los puntos que están 7 unidades abajo del eje $X$.
c) Todos los puntos que están 7 unidades a la izquierda del eje $Y$.
d) Todos los puntos que están 7 unidades a la derecha del eje $Y$.
e) Todos los puntos que están 7 unidades de distancia del origen cartesiano.

89(F).- Considera la ecuación "$x + y = 4$". ¿Cuál de los siguientes puntos forma parte de su gráfica ?.

a ) A(– 4 , 1) b ) B(0 , 4) c ) C(0 , – 4) d ) D(0 , 0) e ) E(1 , 1)

90(F).- Considera la ecuación "$x + 2xy - y + 4 = 0$". ¿Cuál de los siguientes puntos forma parte de su gráfica?.

a ) P(– 4 , 1) b ) Q (0 , 4) c ) R(0 , –4) d ) S(0 , 0) e ) T(1 , 1)

91(F).- Considera la ecuación "$x^2 - 2x^3 y + y - 2 = 0$". ¿Cuál de los siguientes puntos forma parte de su gráfica?.

a ) L(1 , 1) b ) M(0 , 4) c ) N(0 , 2) d ) P(0 , 0) e ) Q(1 , 0)

92(F).- Considera la ecuación "$x^3 + 4xy - 2y + 5 = 0$". ¿Cuál de los siguientes puntos forma parte de su gráfica?.

a ) A (0 , 5)   b ) B(0 , 0)   c ) C(–1 , 1)   d ) D(1 , –3)   e ) E(1 , 2)

93(F).- Considera la ecuación "$x + 2xy - y + 4 = 0$". ¿Cuáles son las coordenadas del punto de su gráfica que está sobre el **eje de las abscisas**?.

a ) (–4 , 0 )   b ) ( 0 , 4 )   c ) ( 4 , 0 )   d ) ( 0 , 0 )   e ) ( 2 , 0)

94(F).- Considera la ecuación "$(y - 2)^2 + 2x^2y + 4x - 8 = 0$". ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de su gráfica y el **eje de las abscisas**?.

a ) (4 , 0)   b ) (0 , 1)   c ) (–1 , 0)   d ) (0 , 0)   e ) (1 , 0)

95(F).- Considera la ecuación "$x^3 + 2x^2y^3 - 4y = 12$". ¿Cuáles son las coordenadas del punto de su gráfica que esta sobre el **eje de las ordenadas**?.

a ) (–3 , 0)   b ) (1 , –1)   c ) (0 , 1)   d ) (0 , 0)   e ) (0 , –3)

96(F).- Considera la ecuación "$(x + 1)^3 + 2xy^2 + 6x + y = 12$". ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de su gráfica y el **eje de las ordenadas**?.

a ) (2 , 0)   b ) (0 , 11)   c ) (0 , 8)   d ) (0 , 0)   e ) (0 , –5)

97(F).- Considera la recta que tiene por ecuación "$2x + y + 4 = 0$". Encuentra las coordenadas del punto de la recta que está en el **eje de las ordenadas**.

a ) (–4 , 0)   b ) (–2 , 0)   c ) (0 , –2)   d ) (0 , 0)   e ) (0 , –4)

98(F).- Considera la recta que tiene por ecuación "$-x + 2y = 6$". Encuentra las coordenadas del punto de la recta que está en el **eje de las abscisas**.

a ) (6 , 0)   b ) (0 , 2)   c ) (0 , –2)   d ) (–6 , 0)   e ) (3 , 0)

99(R).- Considera la circunferencia que tiene por ecuación “$x^2 + y^2 – 6y + 5 = 0$”. Encuentra las coordenadas de los puntos de la circunferencia que están sobre el **eje de las ordenadas**.

a ) (1 ,0) y (5,0) b ) (0,0 ) y (0,5) c ) (0,1) y (0,5)
d ) (0,1) y (0,4) e ) (2,0) y (4,0)

100(R).- Considera la circunferencia con ecuación “$x^2 – 16x + y^2 – 6y + 48 = 0$”. Encuentra las coordenadas de los puntos de la circunferencia que están sobre el eje de las abscisas.

a ) (4 ,0) y (12,0) b ) (0,4 ) y (0,12) c ) (3,0) y (13,0)
d ) (0,3) y (0,13) e ) (5,0) y (11,0)

## SOLUCIÓN DE LOS REACTIVOS DE LA UNIDAD 2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | c | 26 | c | 51 | b | 76 | d |
| 2 | b | 27 | a | 52 | b | 77 | c |
| 3 | a | 28 | e | 53 | b | 78 | b |
| 4 | a | 29 | a | 54 | a | 79 | b |
| 5 | b | 30 | c | 55 | b | 80 | d |
| 6 | e | 31 | e | 56 | d | 81 | e |
| 7 | b | 32 | c | 57 | c | 82 | a |
| 8 | e | 33 | d | 58 | b | 83 | b |
| 9 | c | 34 | a | 59 | a | 84 | d |
| 10 | d | 35 | b | 60 | b | 85 | a |
| 11 | c | 36 | b | 61 | a | 86 | c |
| 12 | c | 37 | d | 62 | b | 87 | e |
| 13 | b | 38 | a | 63 | c | 88 | b |
| 14 | e | 39 | a | 64 | d | 89 | b |
| 15 | e | 40 | b | 65 | a | 90 | b |
| 16 | d | 41 | e | 66 | e | 91 | c |
| 17 | a | 42 | d | 67 | b | 92 | d |
| 18 | c | 43 | c | 68 | b | 93 | a |
| 19 | d | 44 | c | 69 | a | 94 | e |
| 20 | e | 45 | a | 70 | d | 95 | e |
| 21 | d | 46 | e | 71 | a | 96 | b |
| 22 | b | 47 | b | 72 | d | 97 | e |
| 23 | a | 48 | d | 73 | a | 98 | d |
| 24 | c | 49 | c | 74 | c | 99 | c |
| 25 | a | 50 | d | 75 | a | 100 | a |