Matemáticas II

Unidad 4. Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras.

PROPÓSITO DE LA UNIDAD

✍*Al finalizar, el alumno:*

✍ *Aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.*

CONTENIDO

4.1 Congruencia.
- 4.1.1 Notación.
- 4.1.2 Congruencia.
- 4.1.3 Figuras congruentes.

4.2 Congruencia de triángulos.
- 4.2.1 Criterios de congruencia de triángulos.
  - a) LLL.
  - b) LAL.
  - c) ALA.
- 4.2.2 Argumentación de las construcciones de:

a) Bisectriz de un ángulo.

PRESENTACIÓN

Una forma de adquisición del conocimiento matemático es en forma reflexiva, mediante la lógica, desarrollando un conocimiento analítico y reflexivo: Razonamiento deductivo.

Muchos campos de estudio se basan en el razonamiento deductivo, por lo que es importante que nuestros alumnos aprendan a desarrollar este método de pensamiento como complemento en la adquisición del conocimiento matemático. Como el proceso deductivo no es fácil de lograr, se requiere una madures en los conceptos matemáticos, hacer uso de la visualización y de un razonamiento lógico-deductivo, este es uno de los retos en su enseñanza al cual dedicaremos nuestros esfuerzos.

El razonamiento deductivo, también llamado demostración o prueba, es el razonar a partir de hechos demostrados, utilizando pasos lógicamente válidos para llegar a una conclusión[1]. Los matemáticos a menudo utilizan la demostración para verificar que una conjetura es verdadera para todos los casos, no sólo para aquellos examinados, o para convencer a otros. Las demostraciones a menudo ayudan a responder a la pregunta: ¿por qué? El uso de la demostración para explicar el por qué, es una extensión natural para los estudiantes en este momento del curso de Matemáticas II y les ayudará a profundizar su comprensión.

Esta unidad resalta este propósito iluminador de la demostración o prueba, pretende que el alumno se inicie en el proceso de la deducción, identificando propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, que construya y proporcione argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, que establezca relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más avanzados.

Al igual que en las unidades anteriores, este material intenta apoyar el trabajo de profesores y sobre todo, a nuestros alumnos, y como tal, ofrece un conjunto de sugerencias de estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo.

Conceptos clave: Congruencia; semejanza; Teorema de Pitágoras.

[1] 2008, Kendall Hunt Publishing

4.1 CONGRUENCIA.

En la geometría euclidiana, la congruencia es fundamental, es lo equivalente a igualdad matemática en aritmética y álgebra. La igualdad se da entre unidades de medida o cantidades u objetos matemáticos que tengan el mismo valor, pero en Geometría no podemos afirmar que un ángulo, un triángulo o un polígono en general son iguales, ya que al ser objetos geométricos ocupan diferentes espacios en el plano, tendrán iguales las medidas de lados o de ángulos, pero como figuras planas son diferentes.

Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas. Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

4.1.1 Notación

Como ya se mencionó no podemos comparar dos o más figuras diciendo que son iguales sino que ahora la palabra adecuada será **congruentes.**

Notación: La palabra **congruencia** se representa con el símbolo $\cong$ ó **≡**.

Para trazar o construir diferentes figuras necesitamos medir tanto longitudes como ángulos, y así, a la medición le asignamos un número real.
Si es longitud, las unidades de longitud pueden ser ___________, ___________, _____________... etc.
Y un ángulo será en ____________.

Segmento: Al trazo del segmento $A \longmapsto B$ lo escribiremos $\overline{AB}$ o segmento AB.
Si sólo se escribe AB nos referiremos a su longitud o medida, ejemplos:
Si la longitud de $\overline{AB}$ es 5.6 cm, se escribe AB = 5.6 cm.
Si la longitud de $\overline{CD}$ es 5.6 cm, se escribe CD = 5.6 cm.
Como estos dos segmentos tienen la misma _____________, podemos decir que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ y se escribe: $\overline{AB} \cong$ ________

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida

Ángulo: La medida en grados del $\angle ABC$ es 35 o el $\angle ABC$ mide 35°, también suele escribirse como $m\ \angle ABC$ = 35°.
Y si $m \angle DBC$ = 35° (la medida del $\angle DBC$ es 35°), entonces, $\angle ABC$ y $\angle DBC$ tienen la misma ___________, por lo que los dos ángulos son congruentes y se escribe:

___________$\cong$____________

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida

Para afirmar que NO son congruentes utilizaremos el símbolo $\ncong$ ó $\not\equiv$.

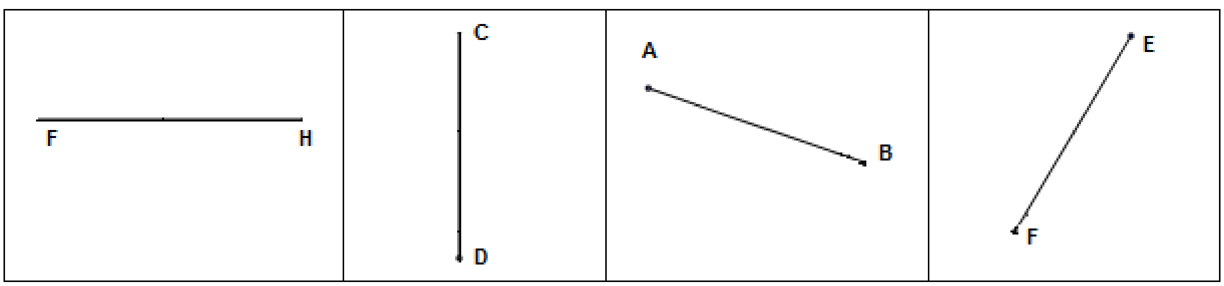
Actividad 1.
Si CD = 8.2 m, $m\angle ABC$ = 125°, FG = 10.4 cm, $m\angle Q$ = 55°, $m\angle DFG$ = 125°, PQ = 8.2 m y RT = 10.4 cm, completa lo que se pide:

a) $\overline{RT}$ ____ $\overline{FG}$	b) CD ____ PQ	c) $\angle ABC$ ____ $\angle Q$	d) FG ____ RT
e) $m\angle DFG$ ____ $m\angle DFG$	f) $\overline{CD}$ ____ $\overline{PQ}$	g) $\angle ABC$ ____ $\angle DFG$	h) PQ ____ RT

4.1.2 Congruencia

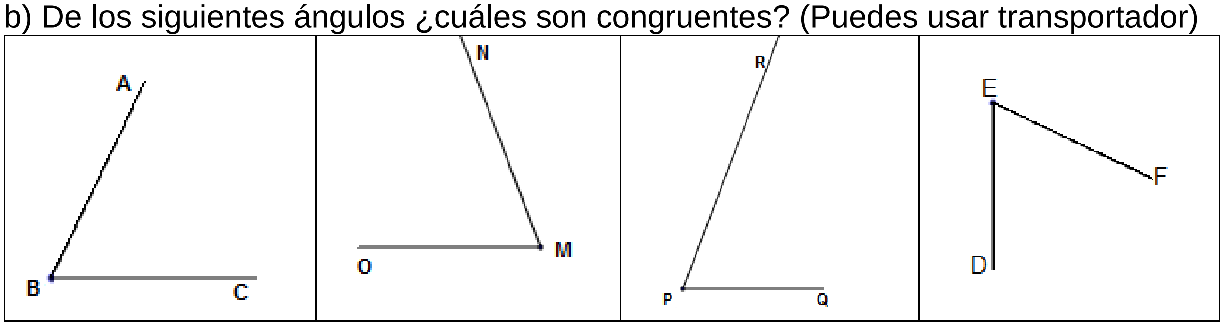
Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Actividad 2. a) De los siguientes segmentos ¿cuáles son congruentes? (utiliza tu compás)



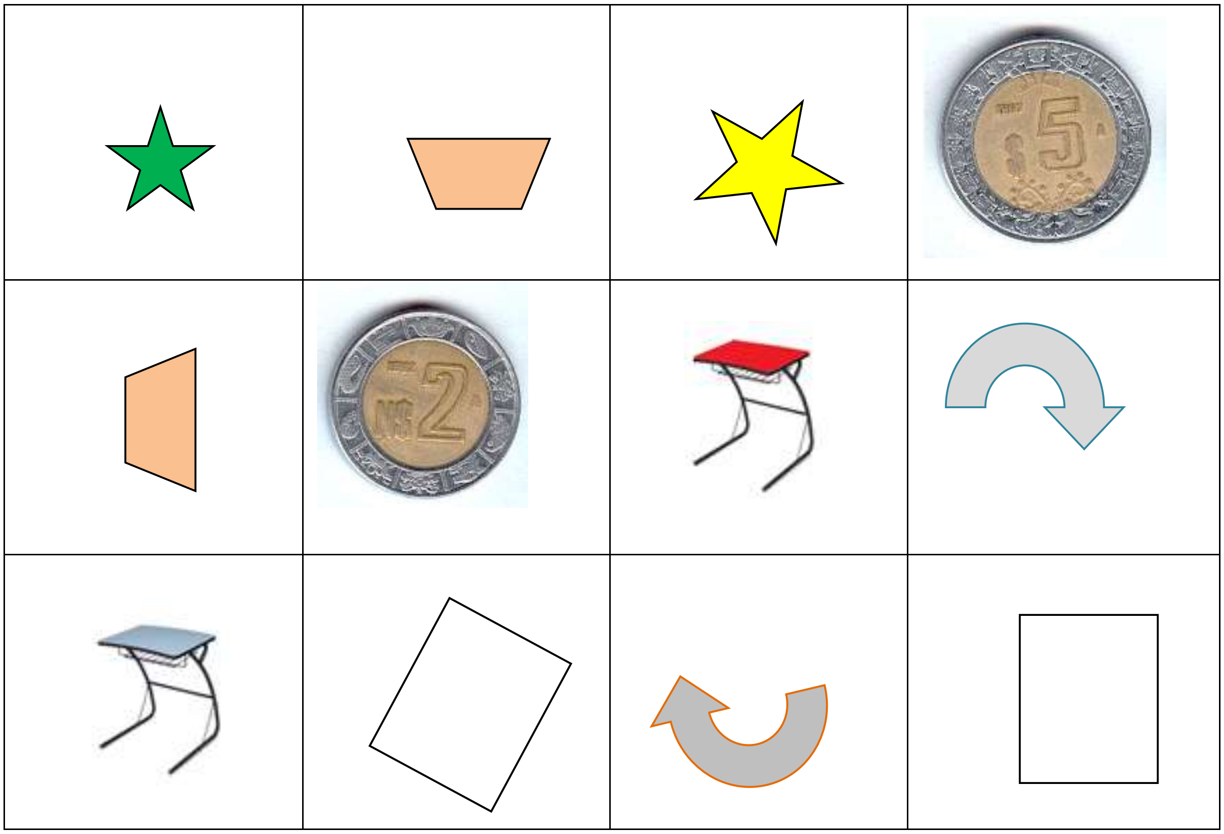
______________________________   ______________________________

b) De los siguientes ángulos ¿cuáles son congruentes? (Puedes usar transportador)



______________________________   ______________________________

c) De las siguientes figuras u objetos, ¿cuáles son congruentes?



d) Da ejemplos de objetos congruentes que se encuentren a tu alrededor.

____ ____________________________________

____ ____________________________________

4.1.3 Figuras congruentes

Con base en lo anterior, ¿Cuándo dos o más figuras son congruentes? ____________

____

En la unidad anterior aprendimos a trazar segmentos y ángulos congruentes, vamos a recordar como lo hicimos, ya que conociendo la forma en que éstos se pueden reproducir, podemos trazar otras figuras sencillas que los involucren.

Actividad 3: Construcción de segmentos congruentes

En tu cuaderno puedes realizar cada uno de los pasos que a continuación se indican.

1°) Marca dos puntos A y B en la posición que desees, únelos para tener el segmento AB. Trazaremos otro segmento PQ congruente a $\overline{AB}$.

2°) Traza un rayo cualquiera, y sobre él marca un punto P. Abre el compás desde A hasta B del segmento en el paso anterior, y marca esta abertura del compás sobre el rayo a partir de P.

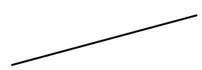
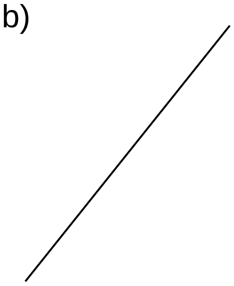
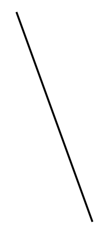
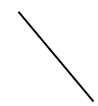
3º) Llama Q a la marca que hiciste, obteniéndose el segmento PQ.

De esta forma se reproduce el segmento dado AB, por lo que se puede decir que:

$$\overline{AB} \ \_\_\_\_\_ \ \overline{PQ}$$

Vuelve a escribir este procedimiento en tu cuaderno, con tus palabras.

Actividad 4: Para cada uno de los siguientes segmentos, en el espacio de abajo traza un nuevo segmento congruente al dado, con regla y compás.

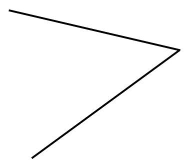
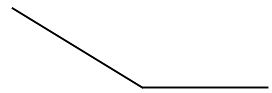
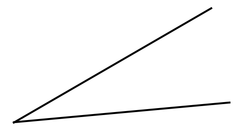
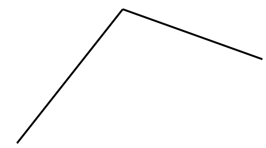
a)	b)	c)	d)
			

Actividad 5: Construcción de ángulos congruentes

En tu cuaderno puedes realizar cada uno de los pasos que a continuación se indican.

1)Traza un ángulo cualquiera y llámalo ABC. A parte traza un rayo cualquiera que inicie en P.	2) Con tu compás, con centro en el vértice B traza un arco que intercepte a los dos lados que forman el ángulo, en D y en E.	3) Con la misma abertura del compás y con centro en P del rayo, traza un arco lo suficientemente grande que lo corte en Q.	4) Regresa al ángulo ABC y abre el compás de D a E.
5) Con esa abertura y con centro en Q haz una marca sobre el arco y llámala R.			
6) Une P con R, y obtendremos el ángulo RPQ, entonces podemos afirmar que: $\angle ABC \cong \angle RPQ$			

Actividad 6. Para cada uno de los siguientes ángulos, en el espacio de abajo traza con regla y compás un nuevo ángulo congruente al dado.

a)	b)	c)	d)
			

4.2 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

Ya aclarado el concepto de congruencia, nos dedicaremos a estudiar la congruencia entre triángulos, donde aprenderemos a decidir y justificar cuando dos o más triángulos son congruentes.

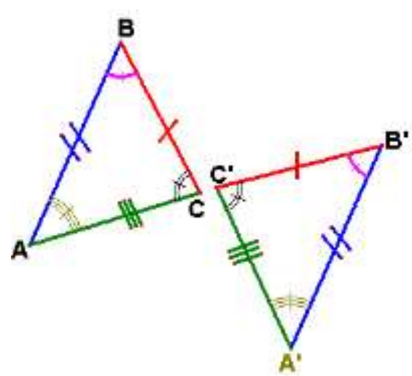
En el caso de los triángulos, se incluye más de un elemento, ya que no hay una medida (número) que defina a un triángulo, lo que si podemos afirmar es que dos triángulos son **congruentes** si pueden hacerse coincidir uno sobre el otro mediante giros, traslaciones y/o reflexiones.
Para que dos triángulos sean **congruentes** se debe de cumplir seis igualdades, tres lados y tres ángulos.

Los tres lados correspondientes:

AB = A’B’

BC = B’C’

AC = A´C’



Los tres ángulos correspondientes:

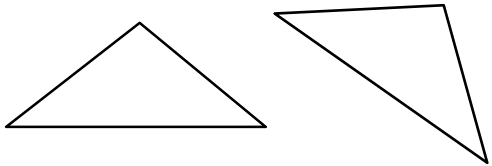
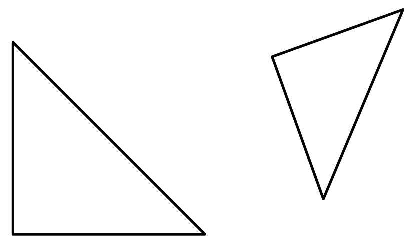
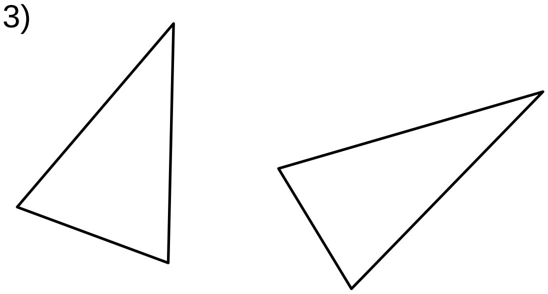
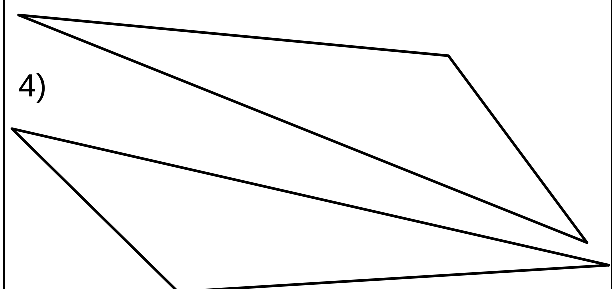
$m\angle \mathbf{BAC} = m\angle \mathbf{B'A'C'}$

$m\angle \mathbf{ABC} = m\angle \mathbf{A'B'C'}$

$m\angle \mathbf{ACB} = m\angle \mathbf{A'C'B'}$

*Si se cumple la igualdad de estos 6 elementos en dos triángulos, estos serán **congruentes,** ya que se puede sobreponer uno sobre el otro y coincidirán en todas* *sus partes. Esto equivale a que los tres lados y los tres ángulos (interiores) pueden hacerse coincidir con sus homólogos, es decir, los dos triángulos tienen la misma forma y el mismo tamaño.*

Actividad 1: De acuerdo a la definición de congruencia, verifica cuál de los siguientes pares de triángulos son congruentes

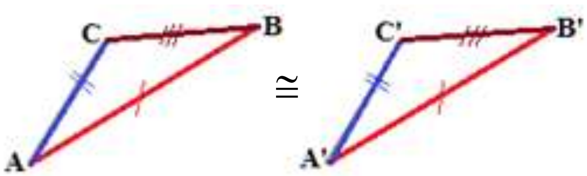
1) 	2) 
3) 	4) 

Para mostrar la congruencia de dos o más triángulos no será necesario hacer ver la igualdad de los 6 elementos, bastará con la igualdad de sólo 3, esto lo afirma los siguientes criterios de congruencia.

4.2.1 Criterios de congruencia de triángulos.

a) Primer criterio: lado, lado, lado (LLL)

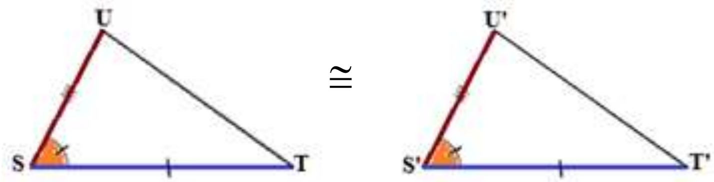
Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos son iguales en medida o congruentes a los lados correspondientes del otro triángulo. Es decir:



$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ ya que $AB = A'B'$,
$BC = B'C'$
$CA = C'A'$.

b) Segundo criterio: lado, ángulo, lado (LAL)

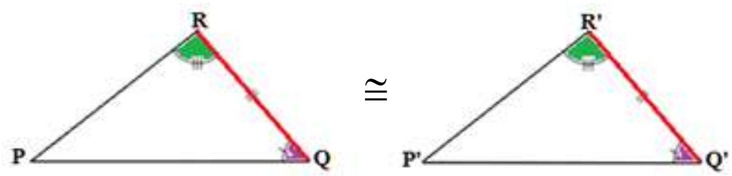
Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales en medida o congruentes con sus homólogos del segundo triángulo. Es decir:



$\Delta STU \cong \Delta S'T'U'$ ya que $SU = S'U'$,
$\angle S = \angle S'$
$ST = S'T'$.

c) Tercer criterio: ángulo, lado, ángulo (ALA)

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos son respectivamente congruentes con sus homólogos del segundo triángulo. Es decir:

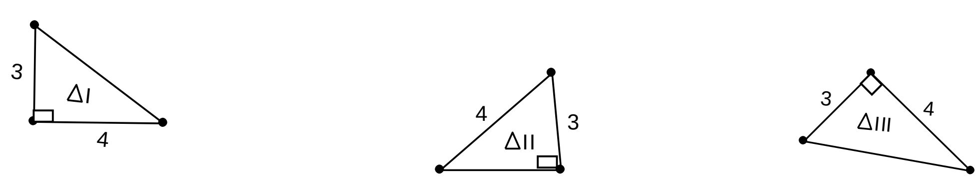


$\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$ ya que $\angle R = \angle R'$,
$RQ = R'Q'$
$\angle Q = \angle Q'$.

Sugerencia: Para reafirmar estos criterios puedes ver algunos videos en las siguientes direcciones electrónicas:
http://www.youtube.com/watch?v=nEEEEKAOao4&feature=player_embedded#at=11
http://www.youtube.com/watch?v=4iEZP0lH8xI

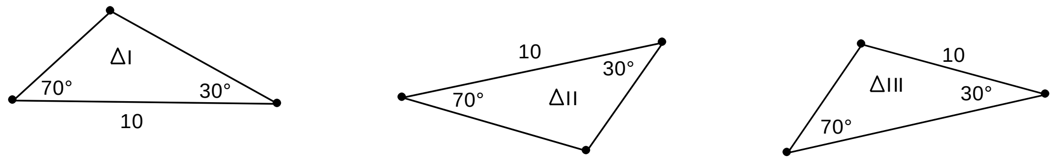
Actividad 2. En cada inciso indica qué triángulos son congruentes escribiendo los tres elementos que son iguales y el criterio de congruencia que justifica tu respuesta:

a)



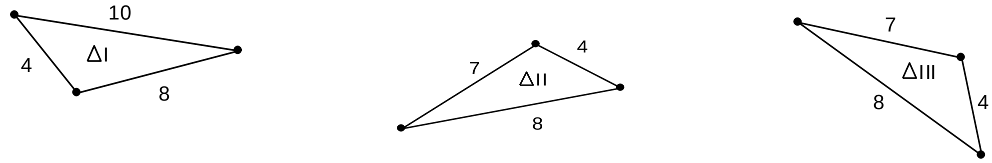
Respuesta __________

b)



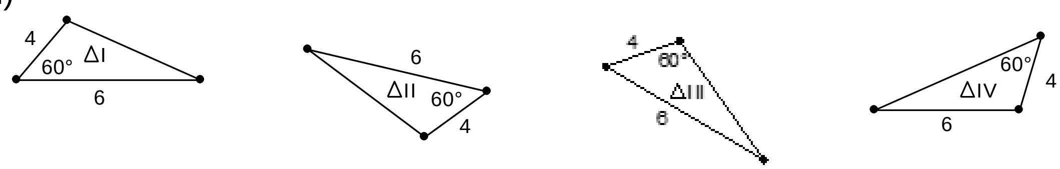
Respuesta __________

c)



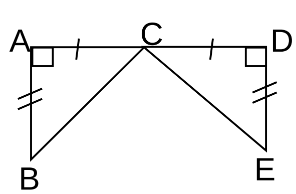
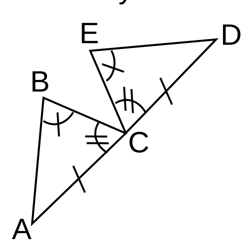
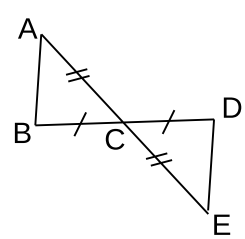
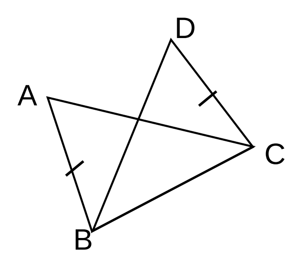
Respuesta _________

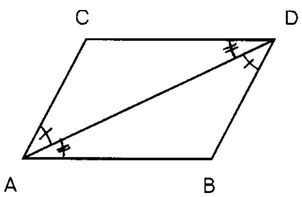
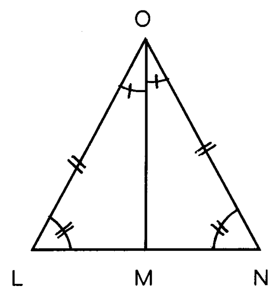
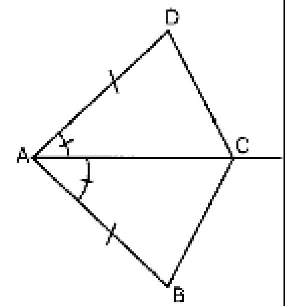
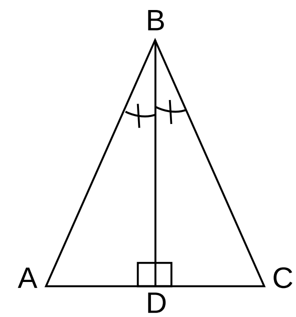
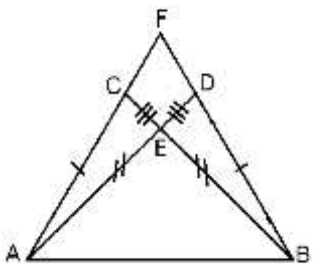
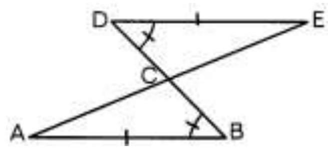
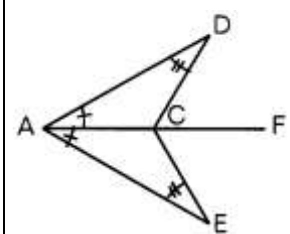
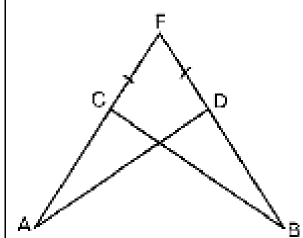
d)



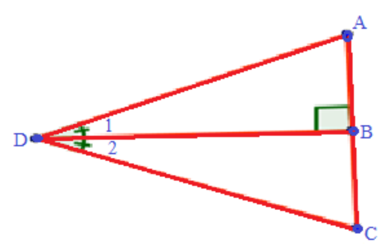
Respuesta _____

Actividad 3. En las siguientes figuras los elementos que están marcadas de la misma forma, indican que tienen medidas iguales. Para cada una, indica el criterio mediante el cual los triángulos señalados son congruentes.

a. ΔABC y ΔCDE	**b.** ΔABC y ΔCDE	**c.** ΔABC y ΔDEC.	**d.** ΔABC y ΔDCB. Con AC = BD
			

e. ΔABD y ΔACD. 	**f.** ΔLOM y ΔNOM. 	**g.** ΔABC y ΔADC. 	**h.** ΔABD y ΔCBD. 
i. ΔACE y ΔBDE. 	**j.** ΔABC y ΔDEC. 	**k.** ΔADC y ΔAEC. 	**l.** ΔAFD y ΔBFC, si AF = BF. 

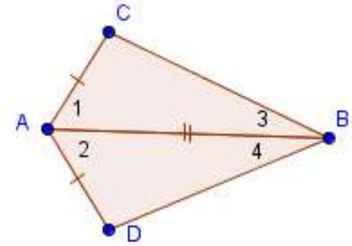
Actividad 4. En la siguiente figura, si $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$, entonces ΔABD $\cong$ CBD.



Justificación:
Paso 1. $m\ \angle$ABD = $m\ \angle$CBD = 90º ya que _____________.
Paso 2. $\overline{BD}$= $\overline{BD}$ por ser lado común de ambos __________.
Paso 3. $m\ \angle 1$ = $m\ \angle 2$ por __________.
Conclusión: ΔABD $\cong$ ΔCBD por criterio ________.

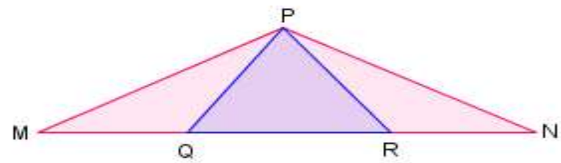
Actividad 5. En la siguiente figura, si $\overline{\text{AC}} \cong \overline{\text{AD}}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$, entonces ΔABC $\cong \Delta$ABD.

Justificación:

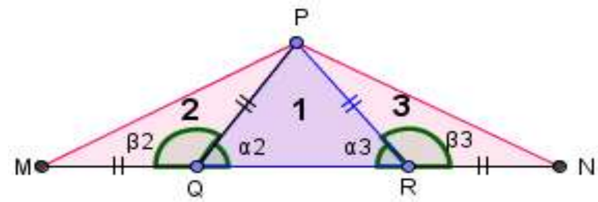


Paso 1. AC = AD por___________________.
Paso 2. m$\angle$1 = m$\angle$2 por _______________.
Paso 3. $\overline{\text{AB}} \cong \overline{\text{AB}}$ por ser lado común a ambos triángulos.
Conclusión: ΔABC $\cong \Delta$ABD por criterio _________.

Actividad 6. En la siguiente figura se cumple MQ = PQ = PR = NR, entonces: ΔPQM $\cong\Delta$ PRN.

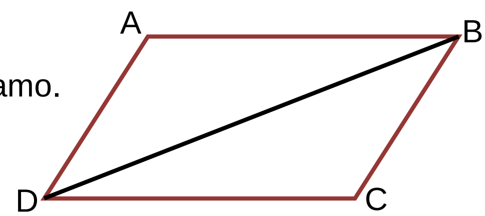


Justificación:
1º) PQ = PR por __________.
2º) Como PQ = PR el ΔPQR es __________,
por lo que $\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3$, y en consecuencia, $\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3$
por ser _____________ de ángulos iguales.
3º) MQ = RN por ser dato.
Conclusión: ΔPQM $\cong$ ΔPRN por criterio____.



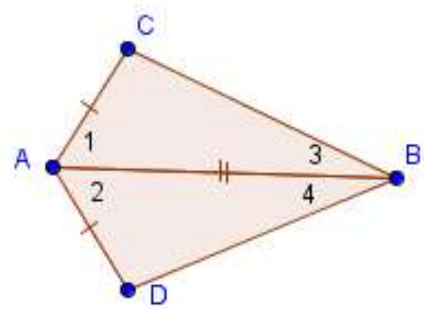
Actividad 7. En la siguiente figura, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, $\overline{BD}$ es una diagonal, entonces ΔABD ≅ ΔBCD. (Marca los elementos iguales en la figura)

Justificación:
1º) AB = DC por ser _______________ del paralelogramo.
2º) AD = BC por ser lados opuestos del paralelogramo
3º) BD es lado común a los dos triángulos.
Conclusión: ΔABD $\cong\Delta$BCD por criterio ________.



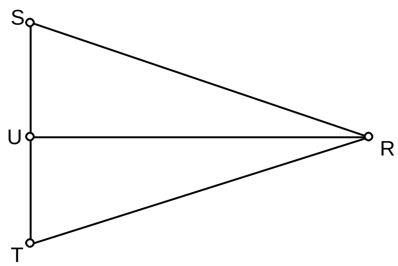
Actividad 8.
Si $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$. Demostrar que $\angle C \cong \angle D$.

Justificación:
AC = AD ________________
$m\angle$ 1 = $m\angle$ 2 _________________
$\overline{AB}$ ___________________
ΔABC $\cong\Delta$ABD _________________
Al ser los triángulos congruentes, sus seis elementos son iguales, en particular:
$m\angle$ C = $m\angle$ D por lo que _____________

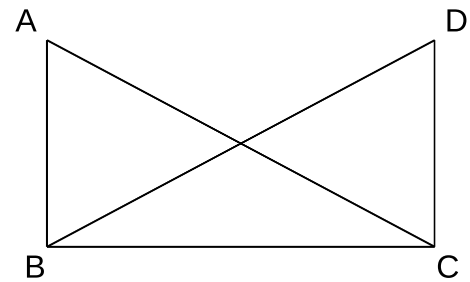


Ejercicios 4.2.1
En cada uno de los siguientes casos justifica lo que se pide y enuncia el criterio que usaste en cada conclusión.

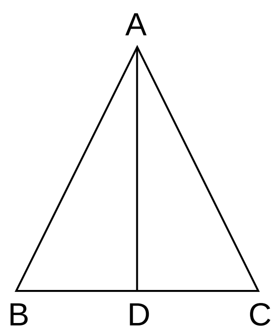
1) El ΔSRT es isósceles, U es punto medio de ST. Mostrar que $\Delta SRU \cong \Delta URT$.



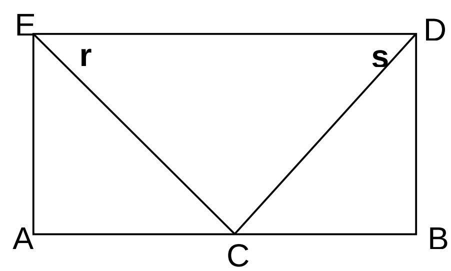
2) $AB \perp BC$, $DC \perp BC$ y AB = DC. Mostrar que $\Delta ABC \cong \Delta BDC$.



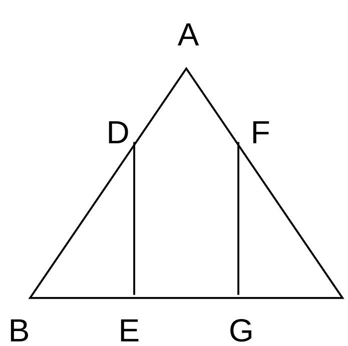
3) $AD \perp BC$, y AD es bisectriz del $\angle BAC$, mostrar que $\Delta ABD \cong \Delta ADC$.



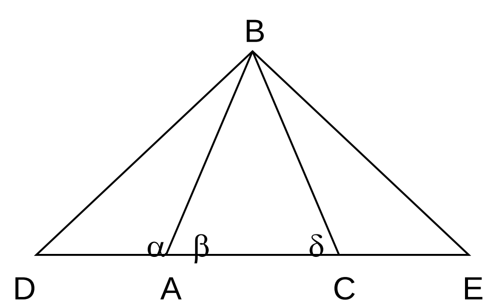
4) ABDE es un rectángulo y $\angle \mathbf{r} = \angle \mathbf{s}$ mostrar que $\Delta ACE \cong \Delta BDC$.



5) AB = AC, BC está trisecado por E y G, $DE \perp BC$ y $FG \perp BC$.
Mostrar que $\Delta BDE \cong \Delta FGC$.



6) AD = CE, $\angle \alpha + \angle \delta = 180°$ mostrar que $\Delta ABD \cong \Delta BCE$.



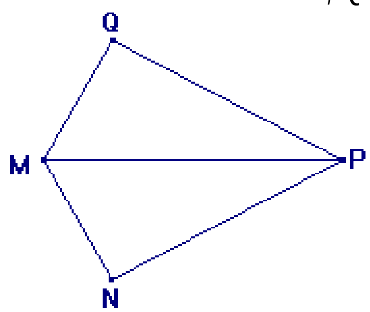
<table>
<tr>
<td>

7) Mostrar que el $\triangle$ MQP $\cong$ $\triangle$ MPN.

Datos:

MP es bisectriz del $\measuredangle$QMN.

MP es bisectriz del $\measuredangle$QPN.



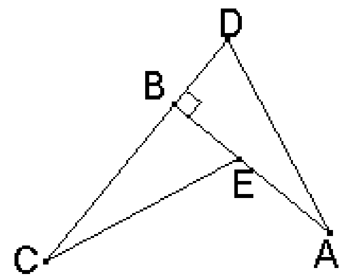
</td>
<td>

8) Mostrar que $\triangle$BCE $\cong$ $\triangle$ABD.

Datos: AB $\perp$ CD

BE = BD

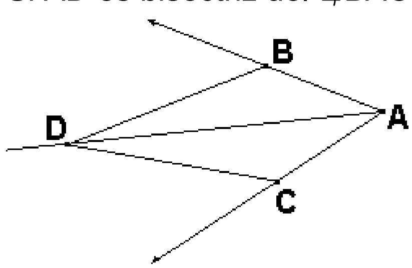
BC = BA



</td>
</tr>
<tr>
<td>

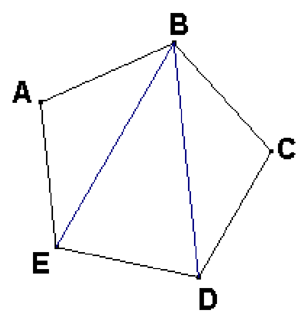
9) Mostrar que $\triangle$ACD $\cong$ $\triangle$ABD.

Si AD es bisectriz del $\measuredangle$BAC y AB = AC.



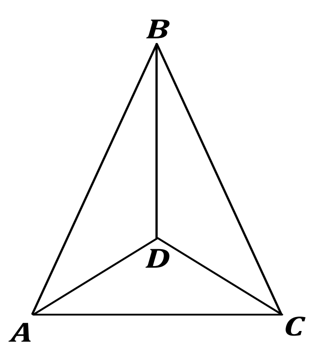
</td>
<td>

10) ABCDE es un pentágono regular, mostrar que $\triangle$ABE $\cong$ $\triangle$BCD.



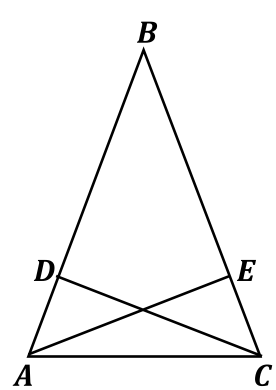
</td>
</tr>
<tr>
<td>

11) $\triangle$ABC y $\triangle$ADC son isósceles, mostrar que $\triangle$ABD $\cong$ $\triangle$BCD.



</td>
<td>

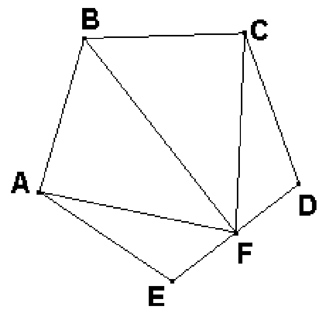
12) $\triangle$ABC es isósceles y AD = EC, mostrar que $\triangle$ABE $\cong$ $\triangle$CBD.



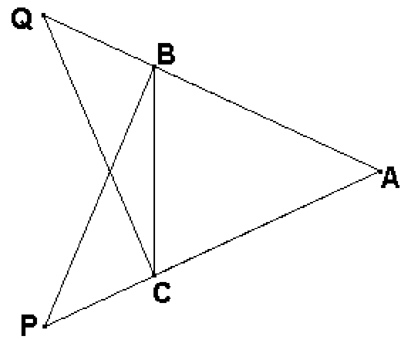
</td>
</tr>
</table>

13) ABCDE es un pentágono regular, F es punto medio de ED, mostrar que

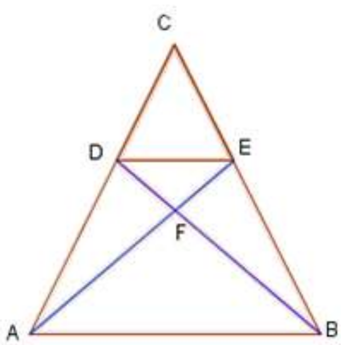
$\triangle AEF \cong \triangle CDF$.



14) AQ = AP, el $\triangle ABC$ es isósceles, mostrar que $\triangle BCQ \cong \triangle CBP$.

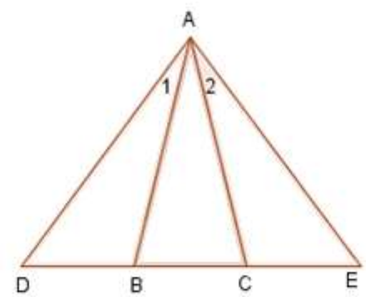


15) $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son isósceles, mostrar que AE = BD.

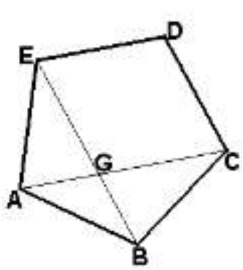


16) $\triangle ABC$ es isósceles. $\measuredangle DAE$ está trisecado.

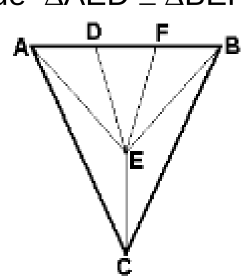
Mostrar que DB = CE

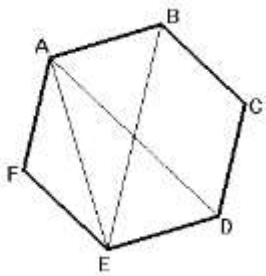
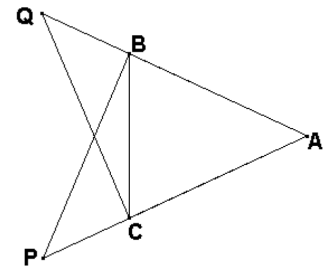


17) ABCDE es un pentágono regular. Mostrar que $\triangle EAG \cong \triangle CBG$.



18) AC = BC, DE = FE, CE es bisectriz del $\angle ACB$, y $\angle AED = \angle BEF$. Mostrar que $\triangle AED \cong \triangle BEF$



19) ABCDEF es un hexágono regular. Mostrar que AD ≅ BE. 	20) BQ = CP, el ΔABC es isósceles, mostrar que ∠AQC ≅ ∠APB. 

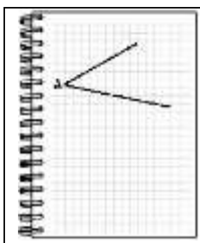
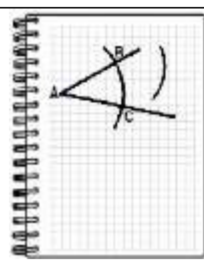
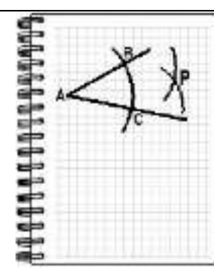
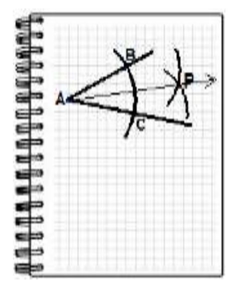
4.2.2 Justificación de algunas construcciones.

En este apartado se justificarán algunas de las construcciones que se realizaron con regla y compas en la unidad anterior como son:
a) Bisectriz de un ángulo. b) Mediatriz de un segmento. c) Perpendicular a una recta y d) Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

Estas construcciones con regla y compás ya la realizaste en la unidad 3, las volveremos a trazar para justificar que son válidas:

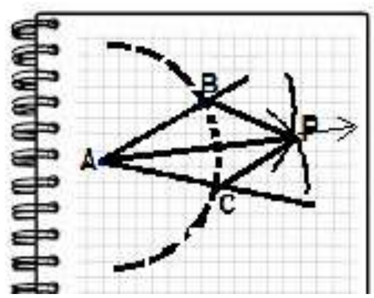
a) Bisectriz de un ángulo.
Sea el ∠BAC un ángulo cualquiera dado, hay que dividirlo en dos partes iguales. La recta que lo divide es llamada Bisectriz.

Construcción.

				
Se traza un ángulo cualquiera llamando a su vértice A.	1º. Con centro en A se traza un arco de circunferencia que corte a los dos lados del	2º. Con centro en *B*, el compás se abre una longitud cualquiera y se traza un arco de	3° Con la misma abertura del compás y con centro en *C*, se traza otro arco de circunferencia que corte al arco	4º. Se traza la semirrecta desde A y que pase por P, entonces ∠BAP = ∠CAP

	ángulo en *B* y *C.*	circunferencia lo suficiente grande dentro del ángulo.	anterior. Sea P el punto de intersección.	

Justificación.
En el 4º paso, se unen los puntos B, P y C, P, y se forman dos triángulos que son ∆ABP y ∆ACP, en los cuales se cumple:



1) AB = AC por ser _______________ del mismo círculo.
2) BP = CP por ser radios iguales por construcción.
3) El segmento AP es lado común en ambos triángulos.

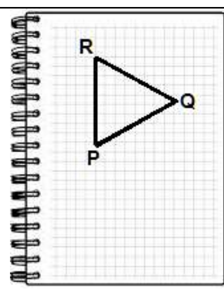
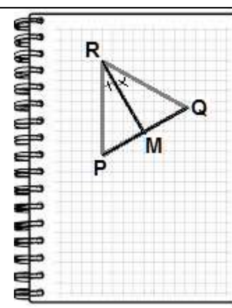
Conclusión: ∆ABP ≅ ∆ACP por criterio _______.

Al ser los dos triángulos congruentes, sus 6 elementos correspondientes serán iguales, es decir, $m\angle BAP$ = ________ y el segmento AP es la Bisectriz del _________.

b) Mediatriz de un segmento.

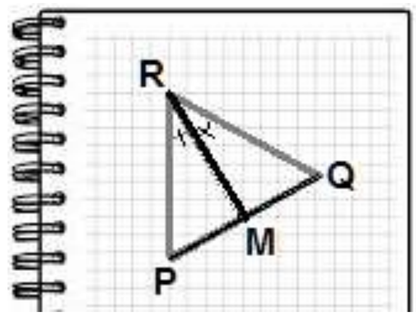
Mediatriz es la línea recta que pasa por el punto medio de un segmento perpendicular a este.
Sea $\overline{PQ}$ un segmento cualquiera dado, hay que dividirlo en dos partes iguales por una recta que sea perpendicular a $\overline{PQ}$.

Construcción.
Una construcción se hizo en la unidad anterior, otra es la siguiente:

		
Segmento dado $\overline{PQ}$.	1º. Constrúyase sobre $\overline{PQ}$ el triángulo equilátero PQR.	2º. Dividir en dos ángulos iguales el $\angle PRQ$, llamar $\overline{RM}$ a dicha bisectriz.

Afirmación: Como M es el **punto medio** de $\overline{PQ}$ y $\overline{RM}$ es **perpendicular** a $\overline{PQ}$, entonces $\overline{RM}$ es la Mediatriz de $\overline{PQ}$.

Justificación.
Se tiene dos triángulos que son ΔPRM y ΔQRM, en los cuales se cumple:
1) PR = QR ya que Δ PQR es ____________.
2) $m\angle$PRM = $m\angle$QRM por construcción.
3) $\overline{RM}$ es lado _______________.



Conclusión: ΔPRM ≅ ΔQRM por criterio ________.
Al ser los dos triángulos congruentes, sus 6 elementos correspondientes serán iguales, en consecuencia, PM = MQ ya que M es ____________________ de $\overline{PQ}$.
$m\angle$PMR = $m\angle$_______. Pero, observamos que, $m\angle$PMR + $m\angle$QMR = ______°, entonces, cada uno mide ________, esto es, $m\angle$PMR = $m\angle$_______ = _______.
Dado este resultado, $\overline{PQ}$ es __________________________ a $\overline{RM}$

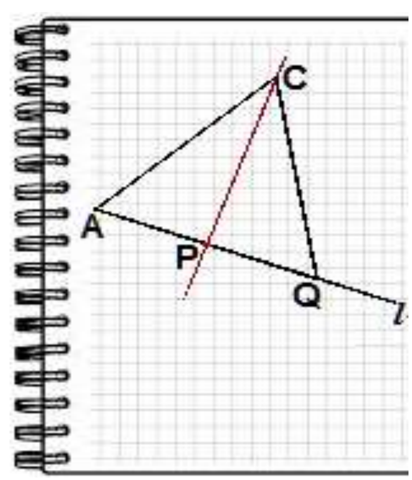
Por lo tanto, $\overline{RM}$ es la Mediatriz de $\overline{PQ}$.

c) Perpendicular a una recta.

Como ya lo vimos en la unidad anterior, hay dos casos.

Caso 1) Dada una recta y un punto sobre esta, trazaremos otra línea recta que pase por el punto dado y que las rectas formen ángulos de 90°.

Construcción.
Sea *l* la recta dada y P un punto sobre ella.
Se toma un punto cualquiera A sobre ella y se marca otro punto Q sobre la recta de tal forma que AP = PQ.
Y se construye un triángulo equilátero sobre el segmento AQ. El triángulo equilátero es AQC, y se traza la recta que pase por C y P.
Afirmación: La línea recta que pasa por C y P forma ángulos rectos con la recta *l* dada, y pasa por el punto P (sobre *l*).



Justificación.
Se tienen dos triángulos que son ΔACP y ΔQCP, en los cuales se cumple:

1) AC = QC ya que ΔACQ es ______________.
2) AP = PQ por construcción.
3) CP lado ___________.

Conclusión: $\Delta ACP \cong \Delta QCP$ por criterio _________.

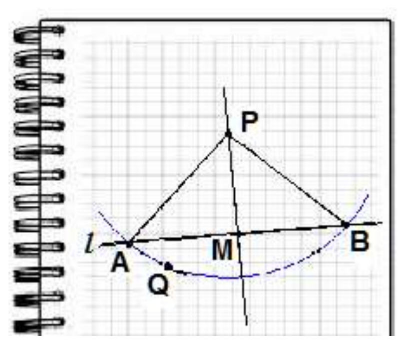
Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes son iguales, es decir, $m\angle APC = m\angle$______. Como $m\angle APC + m\angle QPC$ = ______, entonces,

$$m\angle APC = m\angle QPC = 90°.$$

Así, la recta CP es _______________ a l.

Caso 2) Trazar una línea recta que forme ángulos de 90° con una recta dada desde un punto fuera de ella.

Construcción.
Sea l la recta dada y P un punto fuera de ella.
Se toma un punto cualquiera Q en el otro lado de la recta l (como se ve en la figura). Con centro en P y radio PQ, se traza un arco de circunferencia que corte a l en los puntos A y B.



Se traza el punto medio M de $\overline{AB}$ (de la misma forma que lo hiciste en la unidad anterior).
Afirmación: La línea recta que pasa por P y M forma ángulos rectos con la recta dada l, desde el punto P que no está en ella.

Justificación.
Se tiene dos triángulos que son ΔAPM y ΔBPM, en los cuales se cumple:
1) AP = BP por ser radios de la _______________ con centro en ____ y radio PQ.
2) AM = BM ya que M es ____________ de $\overline{AB}$.
3) $\overline{PM}$ lado común.

Conclusión: $\Delta APM \cong \Delta BPM$ por criterio _________.

Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes son iguales, es decir, $m\angle AMP = m\angle BMP$. Pero $m\angle AMP$ + ________ = 180°, entonces,

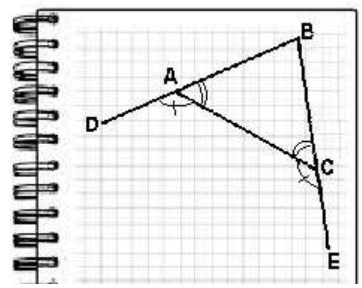
$$m\angle AMP = m\angle BMP = 90°.$$

Así, $\overline{PM}$ es perpendicular a l.

d)Teorema del triángulo isósceles y su recíproco. Justificación.

Teorema: En los triángulos isósceles los ángulos adyacentes a los lados iguales serán iguales entre sí, y al prolongar los dos lados iguales, los ángulos situados bajo el lado desigual también serán iguales entre sí.

Construcción.

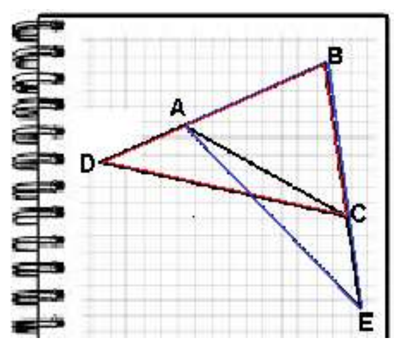


Sea el ΔABC un triángulo isósceles, con AB = BC.

Se prolonga $\overline{BA}$ hasta D y $\overline{BC}$ hasta E de tal forma que BE = BD.
Afirmación: $m\angle DAC = m\angle ECA$ y $m\angle BAC = m\angle BCA$.

Justificación.

- Por un lado:

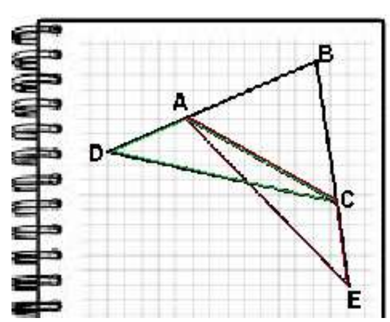


Se une $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$. Se tienen los triángulos ΔABE y ΔCBD en los cuales se cumple:
1) AB = BC por dato o construcción.
2) BE = BD por construcción.
3) $\angle B$ es común a ambos triángulos.

Conclusión: $\Delta ABE \cong \Delta CBD$, por criterio __________.

Al ser los dos triángulos congruentes, sus 6 elementos correspondientes son iguales, y podemos afirmar: $\overline{AE}$ = _____, m $\angle BAE$ = m $\angle$_______ y m $\angle BEA$ = $\angle$_______.

- Por otro lado:



En los triángulos ΔACE y ΔACD se cumple:
1) ______ lado común a ambos triángulos.
2) ______= $\overline{CD}$ por la congruencia anterior.
3) Como $\overline{BE}$=_____ y $\overline{AB}$ = _____, por construcción.
Al hacer la resta: $\overline{BE} - \overline{BC} = \overline{BD} - \overline{AB}$ se tiene:
_____ = _____

Conclusión: $\Delta ACE \cong \Delta ACD$, por el criterio _______.

Al ser los dos triángulos congruentes, sus 6 elementos correspondientes son iguales, así podemos afirmar que: $\boxed{m\angle DAC = m\angle ECA}$ y $m\angle CAE = m\angle ACD$.
Además, ya se mostró que $m\angle BAE = m\angle BCD$, al hacer la resta, se cumple:

$$m\angle BAE - m\angle CAE = m\angle BCD - m\angle ACD$$

$$\boxed{m\angle BAC = m\angle BCA}$$

Así, queda justificada la afirmación.

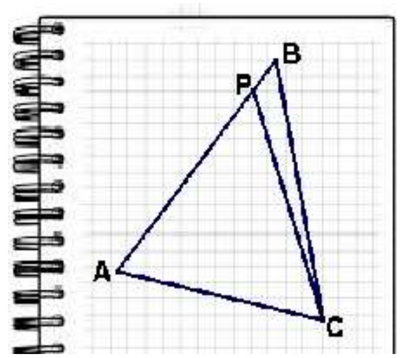
Su recíproco sería:

Si dos ángulos en un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.
Sea el ΔABC en el cual $m\angle BAC = m\angle BCA$. Afirmación: $AB = BC$.

Justificación.

Ya que si $\overline{AB}$ no es igual a $\overline{BC}$, uno de ellos es mayor, supongamos que $\overline{AB}$ es mayor.

Se toma un punto P de $\overline{AB}$ de tal forma que $AP = BC$, entonces en los triángulos ΔAPC y ΔABC se cumple:



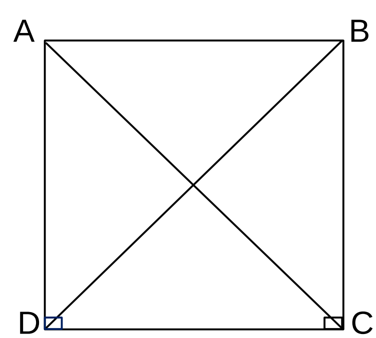
1) $AP = BC$ por construcción.
2) $\angle BAC = \angle BCA$ por dato, pero $\angle PAC = \angle BAC$.
   Entonces $\angle PAC = \angle BCA$.
3) El lado AC es común.

Conclusión: $\Delta APC \cong \Delta ABC$ por criterio LAL.
Lo cual es absurdo, ya que el mayor no puede ser igual al menor.
Por lo tanto $AB = BC$.

4.2.3 Problemas de aplicación.

Problema 1) Mostrar que las diagonales de un cuadrado son iguales.

Construcción.
Trazamos un cuadrado de cualquier tamaño y lo llamamos ABCD, trazamos sus diagonales que son AC y BD, mostraremos la igualdad de estas.



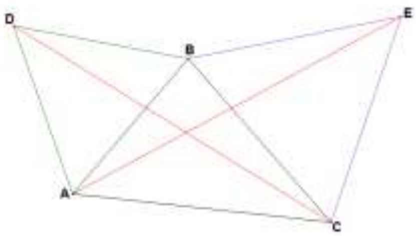
Solución:
Queremos demostrar o justificar que _______________.
Para esto, vamos a mostrar la congruencia de los triángulos ΔADC con _______________.

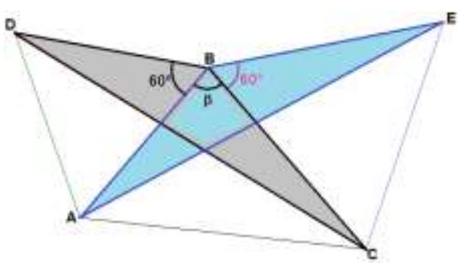
En ΔADC	En _____	Justificación
AD =	BC	Por ser lados del cuadrado
DC =	DC	Por ser _____________________
∠ADC =	______	Ya que _____________________

Entonces ΔADC ≅ ______ por el criterio _______.

Al ser los triángulos congruentes, sus 6 elementos homólogos serán congruentes, en particular AC = BD, es decir, sus diagonales son iguales.

Problema 2) Si tenemos un ΔABC (un triángulo cualquiera), sobre el lado AB se construye el triángulo equilátero ΔABD, sobre el lado BC se construye otro triángulo equilátero ΔBCE, mostrar que los segmentos AE y DC miden lo mismo.





Solución:
Nos fijamos en ΔABE y ΔBDC, mostraremos que son congruentes.
Para esto busquemos tres elementos de uno iguales a los correspondientes en el otro.
Como ΔABD es equilátero, AB = BD y ∠ABD = 60°.
Como ΔBCE es equilátero, BC = BE y ∠EBC = 60°.
Entonces se cumple:

En ΔABE	En _____	Justificación
AB =	BD	Por ser, _______________
BE =	BC	Por ser ________________
∠ABE =	∠_____	Ya que a 60° se le suma el mismo ángulo β.

Entonces ΔABE ≅ ______ por el criterio _______.

Al ser los triángulos congruentes, sus 6 elementos homólogos serán congruentes, en particular $\overline{AE} = \overline{DC}$, así, queda demostrada la afirmación.

Problema 3) Muéstrese que la medida del ancho de un lago se puede encontrar de la siguiente forma:

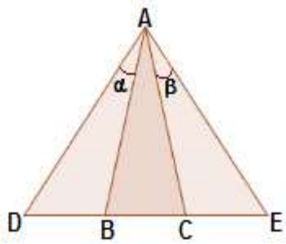
Construcción:
Supongamos que el ancho del lago es AB. Se clava una estaca en un punto accesible P, se mide de A a P y se clava otra estaca en A' de tal forma que A'P = AP como se ve en la figura. Se hace lo mismo de P a B y se clava una tercer estaca en B' de tal forma que B'P = BP. Entonces el ancho del lago es la medida de A'B'. Muéstrese la validez del procedimiento.

Solución:
Se forman dos triángulos, ∆ABP y ∆A’B’P, mostraremos que son congruentes.

En ∆ABP	En _____	Justificación
AP =	A’P	Por _______________
BP =	B’P	Por _______________
∠APB =	______	Por ser _______________

Entonces ∆ABP ≅ ______ por el criterio _______.
Al ser los triángulos congruentes, sus 6 elementos homólogos serán congruentes, en particular $\overline{AB}$ = $\overline{A'B'}$, así, queda demostrada la validez del procedimiento.

Problema 4) En el triángulo ADE se cumple $\overline{AB} = \overline{AC}$; ∠A está trisecado (dividido en tres partes iguales). Mostrar que ∆ADE es isósceles.



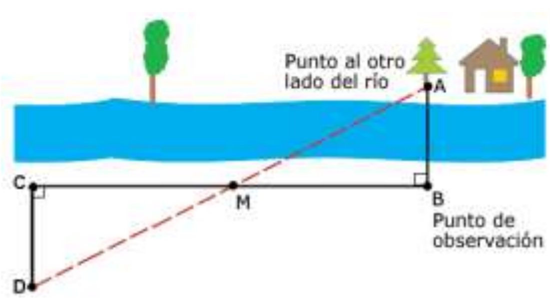
Mostrando que $\overline{AD} = \overline{AE}$ probaremos que el ∆ADE es isósceles.
Solución:
Recuerda que si $\overline{AB} = \overline{AC}$ entonces ∠ABC = ∠ACB, y en consecuencia ∠ABD = ∠ACE por ser sus suplementos.
Mostraremos que ∆ADB ≅ ∆AEC.

En ∆ADB	En ∆______	Justificación
AB =	AC	Por _______________
∠α =	______	Ya que, _________________
∠ABD =	______	Por ser __________________

Entonces ∆ADB ≅ ______ por el criterio _______.

Al ser los triángulos congruentes, sus 6 elementos homólogos serán congruentes, en particular $\overline{AD}$ = $\overline{AE}$, es decir, el ∆ADE es isósceles.

Problema 5) Muéstrese la validez del siguiente procedimiento para medir el ancho de un río.
Construcción:



Se elige un punto de observación y lo llamaremos B, después se elige un árbol o piedra u otra marca del lado inaccesible del río, lo llamaremos A. Se clava una estaca en el punto M de tal forma que $\overline{BM}$ sea perpendicular a $\overline{AB}$. Se clava una segunda estaca en el punto C de tal forma que $\overline{CM}$ = $\overline{BM}$, y luego una tercer estaca en D haciendo que $\overline{CD}$ sea perpendicular a $\overline{CM}$ y que queden alineados A, M y D como se muestra en la figura, entonces el ancho del río será la medida del segmento CD.

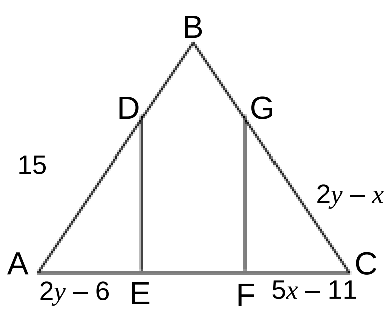
Solución:
Mostraremos que el ΔABM es congruente con el ΔDCM.

En ΔDCM	En Δ______	Justificación
CM =	______	Por _______________
$\angle MCD$ =	______	Ya que, __________________
$\angle CMD$ =	______	Por ser ___________________

Entonces $\Delta DCM \cong$ ______ por el criterio _______.

Al ser los triángulos congruentes, sus 6 elementos homólogos serán congruentes, en particular $\overline{CD} = \overline{AB}$, es decir, el ancho del río es la medida de $\overline{CD}$, la cual se puede medir.

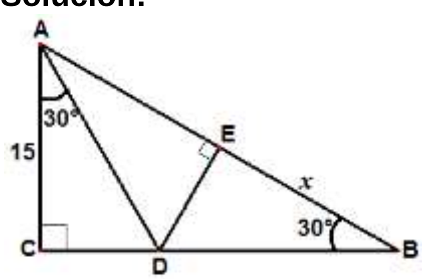
Problema 6) En el siguiente triángulo, encuentra los valores de x y de y. Si nos dicen que $\Delta ADE \cong \Delta CGE$.



Solución:
Al ser los triángulos congruentes, sus 6 elementos homólogos serán congruentes, en particular $\overline{AD} = \overline{CG}$ y $\overline{AE} = \overline{FC}$, es decir, se cumplen las siguientes igualdades:
$15 = 2y - x$ y $2y - 6 = 5x - 11$
Ordenando cada ecuación, tenemos el sistema de ecuaciones: $x - 2y = -15$
$$-5x + 2y = -5$$

Que al resolverlo en tu cuaderno obtendrás: $x =$ _____ $y =$ _______

Problema 7) El ΔABC es un triángulo rectángulo, AC = 15 cm, AD es bisectriz del $\angle BAC$ y $DE \perp AB$, encuentra el valor de x.
Solución:

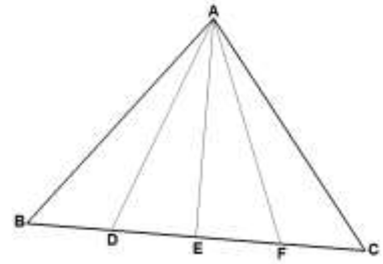


$\Delta ACD \cong \Delta ADE$ ya que 1) AD es lado común.
2) Como AD es bisectriz del $\angle A$, $\angle CAD = \angle EAD$.
3) $\angle ADC = \angle ADE = 60°$
Son congruentes por el criterio ALA.
Por tal razón AE = 15 cm.

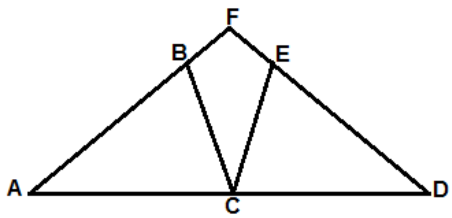
$\Delta ADE \cong \Delta BDE$ ya que 1) DE es un lado común, 2) $\angle AED = \angle BED = 90°$ y 3) $\angle ADE = \angle BDE = 60°$, por el criterio ALA. Así que sus lados homólogos son iguales, en particular BE = AE = 15 cm = x.

Ejercicios 4.2.3

1) El ΔABC es isósceles y BC está dividido en cuatro partes iguales, ¿Cuáles de los siguientes triángulos son congruentes?, justifica tu respuesta.

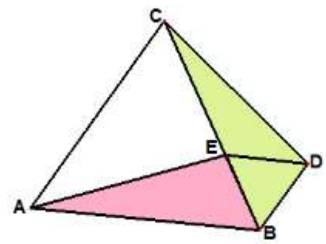


2) Demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta CDE$, si C es punto medio de AD y ΔAFD es isósceles.

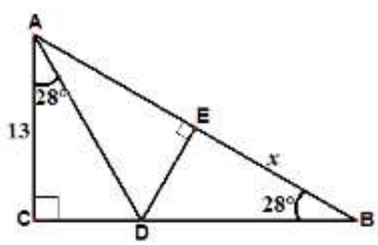


3) En la siguiente figura ΔABC y ΔBDE son equiláteros, mostrar que:

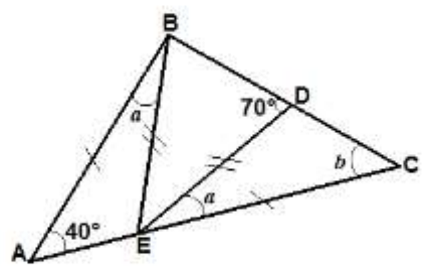
$$\Delta ABE \cong \Delta BDC$$



4) El ΔABC es un triángulo rectángulo, $AC = 15$ cm, AD es bisectriz del $\angle BAC$ y $DE \perp AB$, encuentra el valor de x.

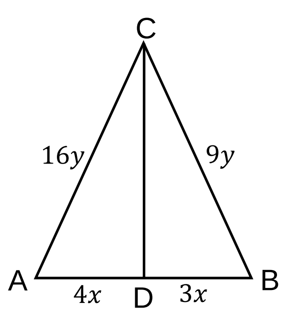


5) El ΔBDE es isósceles, $AB = CE$, $\angle ABE = \angle CED$, encuentra el valor de a y de b.



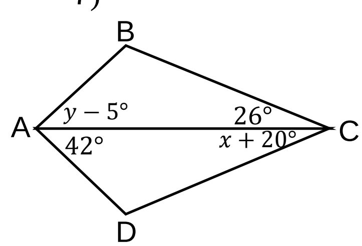
En cada una de las siguientes figuras los triángulos indicados son congruentes, encuentra el valor de x y el de y.

6)



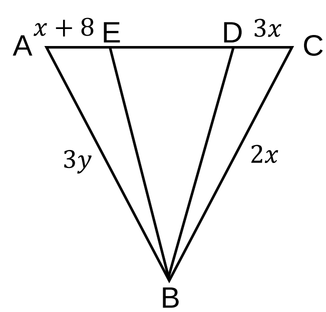
$\Delta ACD \cong \Delta BCD$

7)



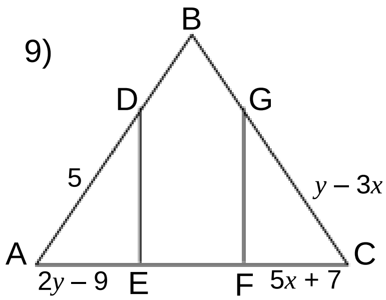
$\Delta ABC \cong \Delta ACD$

8)



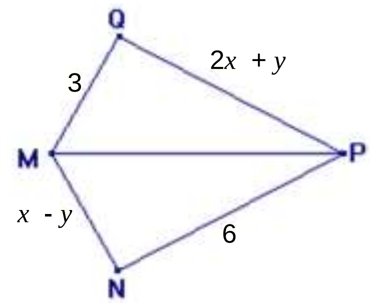
$\Delta AEB \cong \Delta CDB$

9)



$\triangle ADE \cong \triangle CGE$

10)



$\triangle MQP \cong \triangle MNP$

4.3 SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS.

El concepto de semejanza en matemáticas va ligado al concepto de proporcionalidad, por lo que dos figuras son distintas por su tamaño, aunque tengan la misma forma, sus ángulos correspondientes u homólogos deben ser congruentes, mientras que sus lados deben seguir la misma proporción.

El tener ángulos homólogos congruentes significa que su medida es ____________

¿Qué significa que sus lados homólogos sigan la misma proporción?

____

4.3.1 Notación

Al comparar dos figuras semejantes no podemos decir que son totalmente diferentes, debido a que tienen la misma forma, pero distinto tamaño. Ahora el símbolo que usaremos para denotar "es semejante a" será "$\sim$".

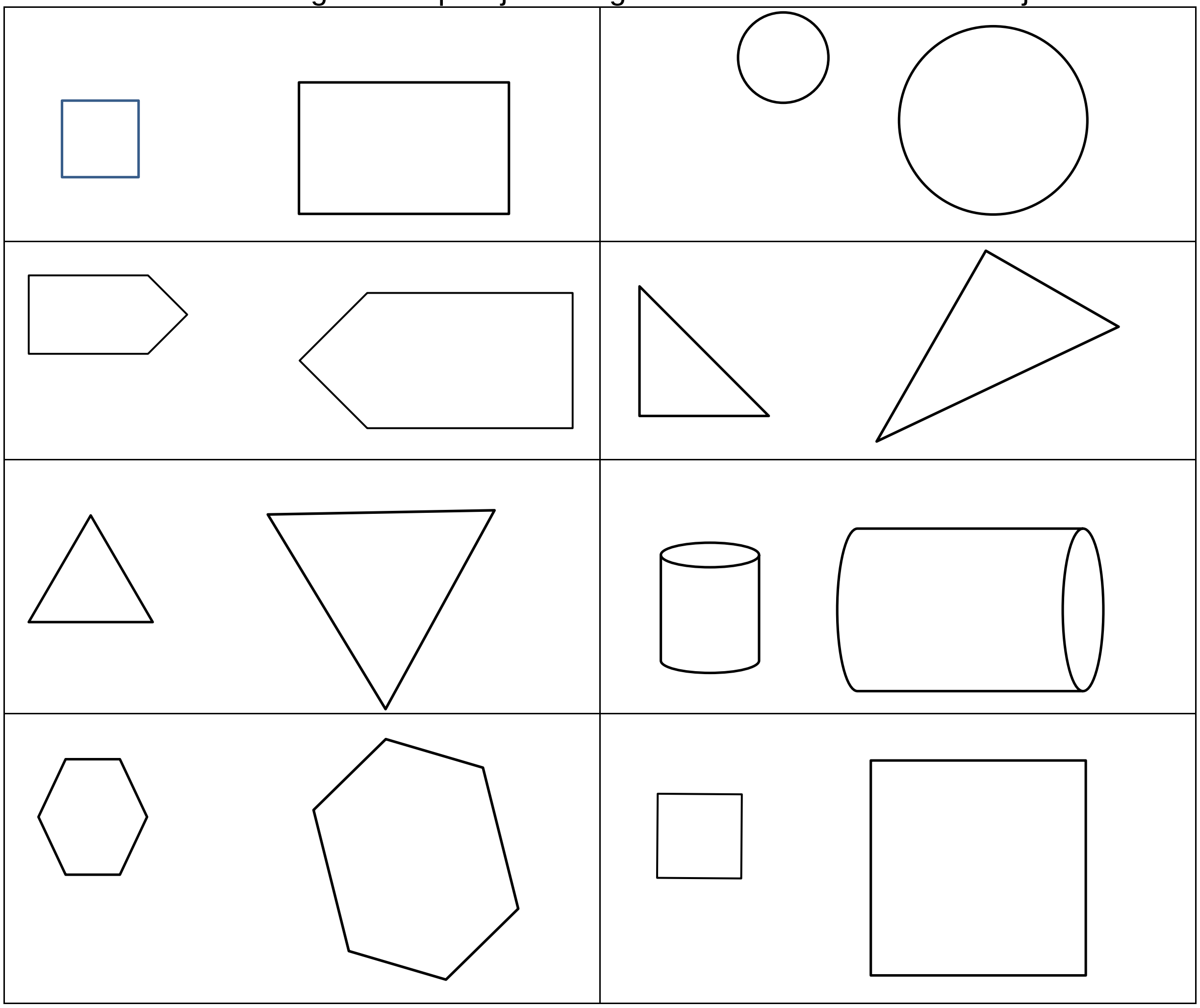
4.3.2 Semejanza

Definición en general

Dos figuras geométricas son semejantes, si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. En cuanto a la misma forma, quiere decir que la medida de los ángulos correspondientes u homólogos son iguales y al comparar la medida de sus lados homólogos estos son proporcionales.

Dos figuras son semejantes, si una de ellas es un modelo a escala de la otra.

Actividad 1: De las siguientes parejas de figuras indica cuales son semejantes.



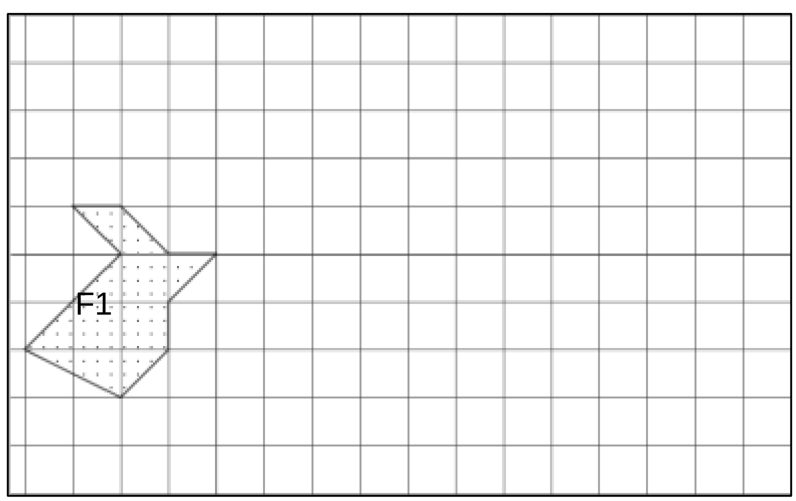
Actividad 2: Traza una figura semejante a la siguiente:

a) Calcula el área de ambas figuras.

b) Compara sus lados.

c) Compara sus perímetros.

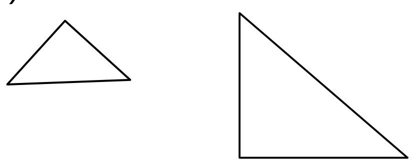
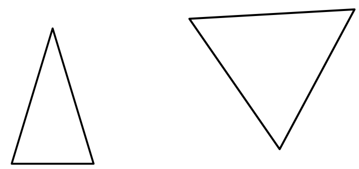
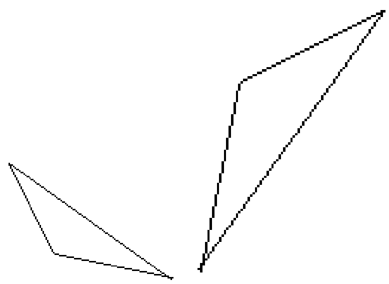
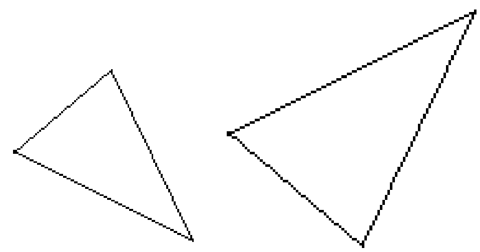
d) Compara sus áreas.



4.3.3 Criterios de semejanza de triángulos.

Concepto formal: Dos triángulos son semejantes si sus 3 ángulos correspondientes u homólogos son iguales y sus 3 lados correspondientes u homólogos son proporcionales.

Actividad: Identifica cuál de las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

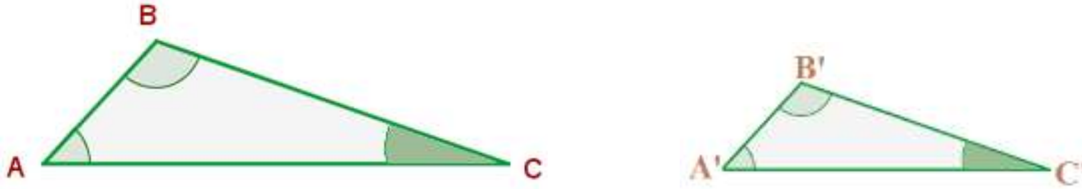
1) 	2) 
 3)	4) 

Al igual que en CONGRUENCIA, para mostrar que dos o más triángulos son SEMEJANTES no necesariamente tenemos que comprobar que sus seis elementos cumplen lo anterior, basta con analizar y justificar que se cumpla alguno de los siguientes criterios.

Criterios de semejanza de triángulos.

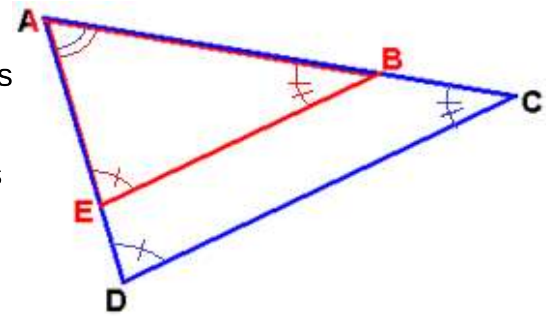
a) Primer criterio: ángulo, ángulo, ángulo (*aaa*)

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos correspondientes iguales. (Esta condición se reduce a encontrar dos ángulos homólogos iguales ya que el tercero en consecuencia será igual, ¿por qué?)



Es decir, si $m\angle A = m\angle A'$, $m\angle B = m\angle B'$ y $m\angle C = m\angle C'$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
(Criterio *aaa*)

EJEMPLO. En la siguiente figura BE || DC, mostrar que $\triangle AEB \sim \triangle ADC$.



Solución:

m $\measuredangle$ABE = m $\measuredangle$ACD por ser correspondientes entre las paralelas BE y DC.

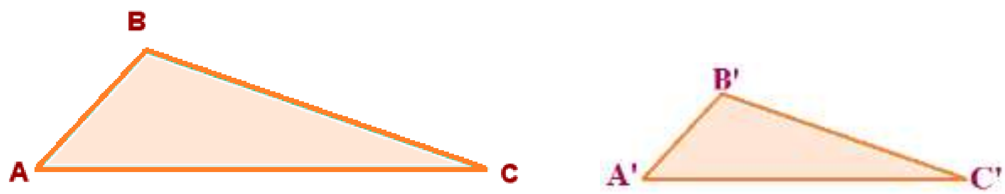
m $\measuredangle$AEB = m $\measuredangle$ADC por ser correspondientes entre las paralelas BE y DC.

el $\measuredangle$DAC es común en los dos triángulos.

Entonces, $\Delta AEB \sim \Delta ADC$ ya que sus tres ángulos homólogos (correspondientes) son iguales.

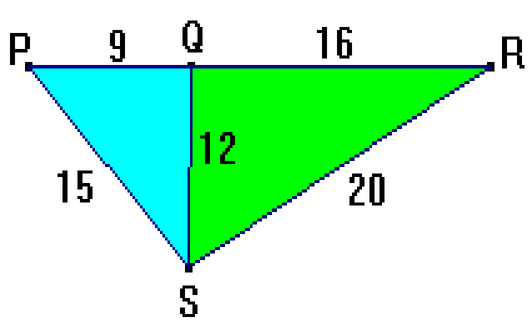
b) Segundo criterio: lado, lado, lado (*lll*)

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados homólogos proporcionales.



Es decir, se cumple que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ (Criterio *lll*)

EJEMPLO. En la siguiente figura, mostrar que $\Delta PQS \sim \Delta QRS$.



Solución:

Observando los dos triángulos, sus lados homólogos son:

PS con SR hacemos $\frac{PS}{SR} = \frac{15}{20}$

PQ con SQ hacemos $\frac{PQ}{SQ} = \frac{9}{12}$

y QS con QR hacemos $\frac{QS}{QR} = \frac{12}{16}$

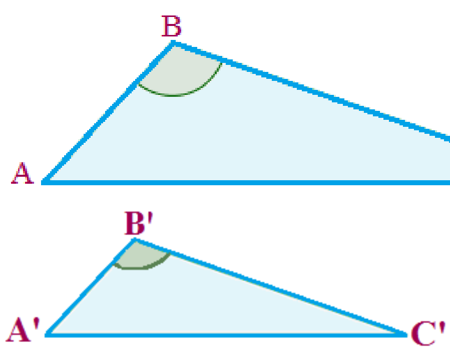
$$\frac{15}{20} \qquad \frac{9}{12} \qquad \frac{12}{16}$$

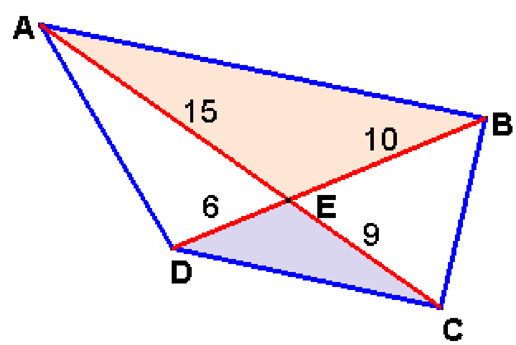
Se simplifica cada fracción y se tiene: $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Al obtener la misma razón de semejanza $\left(\frac{3}{4}\right)$*, podemos decir que sus tres lados son proporcionales, por lo que* $\triangle PQS \sim \triangle QRS$.

c) Tercer criterio: lado, ángulo, lado (*lal*)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.





$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ y $\measuredangle B = \measuredangle B'$ (Criterio *lal*)

EJEMPLO. En la siguiente figura muestra que $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

Solución:

$\measuredangle AEB = \measuredangle DEC$ por ser opuestos por el vértice.

Ahora, analicemos si los lados que se encuentran entre los ángulos mencionados en cada triángulo, son proporcionales. Es decir, debemos ver que

$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$. Para esto, sustituimos sus valores correspondientes:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad y \quad \frac{BE}{ED} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

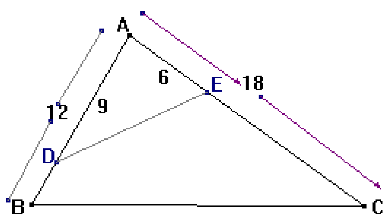
Como las fracciones son iguales, entonces se cumple que $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$.

Este resultado nos dice que si dos de sus lados homólogos son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, podemos afirmar que $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

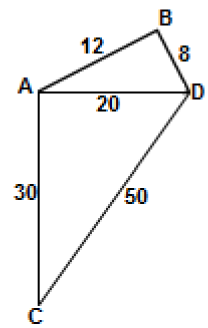
Ejercicios 4.3.3

Utilizando los datos que se dan en cada ejercicio, demuestra la semejanza de los triángulos indicados mencionando el criterio que utilizas para afirmarlo.

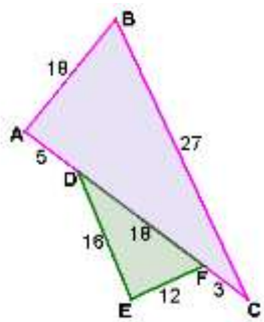
1) Mostrar que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$



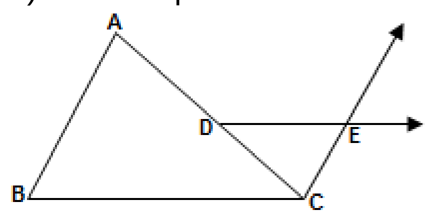
2) Mostrar que $\Delta ABD \sim \Delta ACD$



3) Mostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

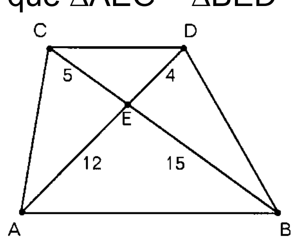


4) Mostrar que $\Delta ABC \sim \Delta CDE$

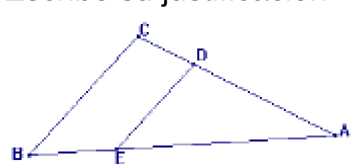


Datos: AB || CE y BC || DE

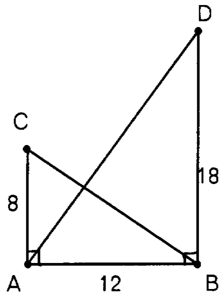
5) Mostrar que: $\Delta CDE \sim \Delta ABE$
y que $\Delta AEC \sim \Delta BED$



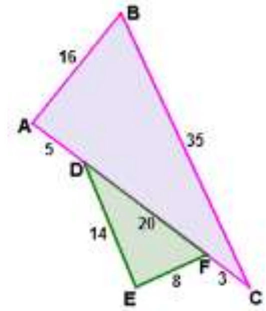
6) ¿Es semejante el ΔADE al ΔABC?
Datos: AE = 27, BE = 12, AD = 18, DC = 8. Escribe su justificación.



7) Mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle ABD$



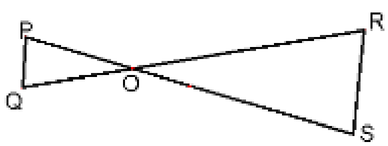
8) Mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



9) En la siguiente figura mostrar que

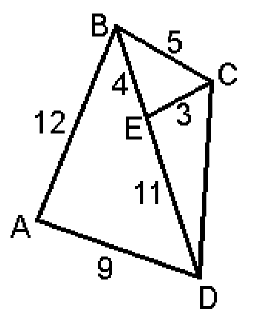
$\triangle OPQ \sim \triangle OSR$

Dato: $\triangle OPQ$ y $\triangle OSR$ son isósceles

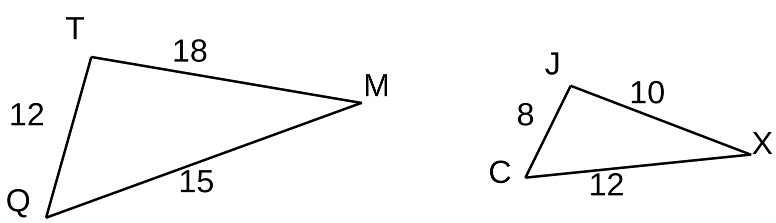


10) En la siguiente figura, mostrar que

$\triangle ABD \sim \triangle BCE$



11) ¿Son semejantes los triángulos $\triangle TMQ$ y $\triangle CJX$?



12) Los lados de un triángulo miden 24 m, 18 m y 36 m, respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12 m, 16 m y 24 m, respectivamente. Determina si son o no semejantes, justifica tu respuesta.

13) Los lados de un triángulo miden 36 m, 42 m y 54 m, respectivamente. Si en un triángulo semejante a éste, el lado homólogo del primero mide 24 m, hallar los otros dos lados de este triángulo.

14) La razón de semejanza del triángulo ABC con el triángulo A'B'C' es 3:4. Si los lados del primero son 18, 21 y 30, determina los lados del segundo.

4.3.4 Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes.

Como ya viste anteriormente, dos o más triángulos son semejantes si sus tres lados homólogos son proporcionales, es decir, tienen la misma razón de semejanza.

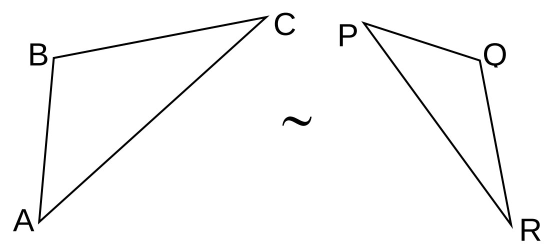
Realiza la siguiente actividad, completando la siguiente tabla

Triángulo 1 (lados)	Triángulo 2 (lados)	Razón de semejanza	Razón de perímetros
4, 8 y 10	____ , ____ y _____	1/2	$\frac{4+8+10}{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$
6, 7 y 11	4.5, 5.25 y 8.25		$\frac{6+7+11}{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$
20, 32 y 26		5/2	
10, 16 y 20		2/3	
24, 39 y 51	8, 13 y 17		
9, 15, 18		3	

Conclusión: La razón de los perímetros de los triángulos semejantes es igual a ____

Suponiendo que los triángulos ΔABC y ΔPQR son semejantes y la razón de semejanza es r, entonces:

$$r = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = \frac{AB+BC+CA}{PQ+QR+RP} = \frac{Perímetro\,\Delta ABC}{Perímetro\,\Delta PQR}$$



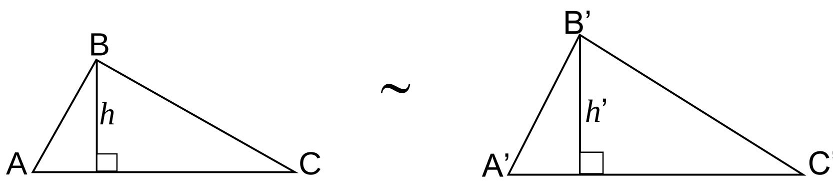
EJEMPLO. Los perímetros de dos triángulos semejantes son 40 y 104 cm ¿cuál es la razón de un par de lados homólogos?

Solución:
La razón de un par de lados homólogos = razón entre sus perímetros.

Entonces, $\frac{40}{104} = \frac{5}{13}$

Respuesta: La razón de un par de lados homólogos es $\frac{5}{13}$.

Cuando dos triángulos son semejantes la razón de sus alturas es igual a la razón de semejanza r, es decir, en la siguiente figura: $\frac{h}{h'} = r$



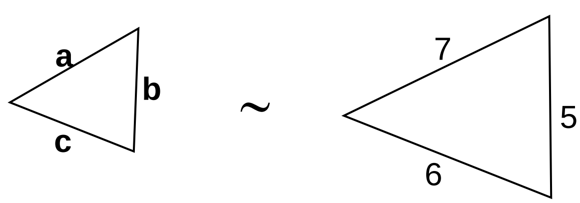
Área de ΔABC = $\frac{\overline{AC}\,h}{2}$ y Área de ΔA'B'C' = $\frac{\overline{A'C'}\,h'}{2}$

Haciendo el cociente: $\dfrac{\frac{\overline{AC}\,h}{2}}{\frac{\overline{A'C'}\,h'}{2}} = \dfrac{2\,\overline{AC}\,h}{2\,\overline{A'C'}\,h'} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \cdot \dfrac{h}{h'} = r \bullet r = r^2$

Conclusión: La razón de las áreas de los triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

En esta parte, se puede sugerir el siguiente video para reforzar estas propiedades: https://www.youtube.com/watch?v=mFFnbaJt2B0

EJEMPLO. Dos triángulos son semejantes, y la razón entre sus áreas es 4/7. Hallar la medida de cada lado del primer triángulo.



Solución:

La razón de un par de lados homólogos = $\sqrt{razón\ entre\ sus\ áreas} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

Entonces: $\frac{a}{7} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, despejando **a** = $\frac{14}{\sqrt{7}}$ ≈ 5.2915

$\frac{b}{5} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, despejando **b** = $\frac{10}{\sqrt{7}}$ ≈ 3.7796

$\frac{c}{6} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, despejando **c** = $\frac{12}{\sqrt{7}}$ ≈ 4.5355

Respuesta: **a** = 5.2915, **b** = 3.7796 y **c** = 4.5355.

Ejercicios 4.3.4

1) Los perímetros de dos triángulos semejantes son 28 y 105 cm ¿cuál es la razón de un par de lados homólogos?

2) Los lados de un triángulo miden 8,12 y 16 cm. Calcula los lados de otro triángulo semejante al dado sabiendo que su perímetro es de 108 cm.

3) Los lados de un triángulo tienen longitudes de 18, 21 y 31 cm. Un triángulo semejante tiene un perímetro de 48 cm ¿cuáles son las longitudes de los lados de este triángulo?

4) Un lado de un triángulo tiene 4 veces el largo del lado correspondiente de uno semejante. El perímetro del triángulo menor es 18 m. ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo mayor?

5) Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 4,5 cm. El perímetro de otro triángulo semejante es 23. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto miden los lados del segundo triángulo?

6) El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo mayor y el menor?

7) La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm^2, ¿cuál es el área del menor?

8) Dos triángulos semejantes tienen una superficie de 25 cm^2 y 35 cm^2, respectivamente. Determina la razón de semejanza de los dos triángulos.

9) Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2, ¿cuál es el área del segundo?

10) El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m. Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

11) Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m^2 y 108 m^2. Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?

12) Sean T1 y T2 dos triángulos semejantes tal que la razón de semejanza de T1 y T2 es 2:3.
   a) Si el perímetro de T1 es 18 cm, hallar el perímetro de T2.
   b) Si el área de T2 es 48 cm^2, hallar el área de T1.

13) Las áreas de dos triángulos semejantes tienen como medida 196 cm^2 y 36 cm^2.

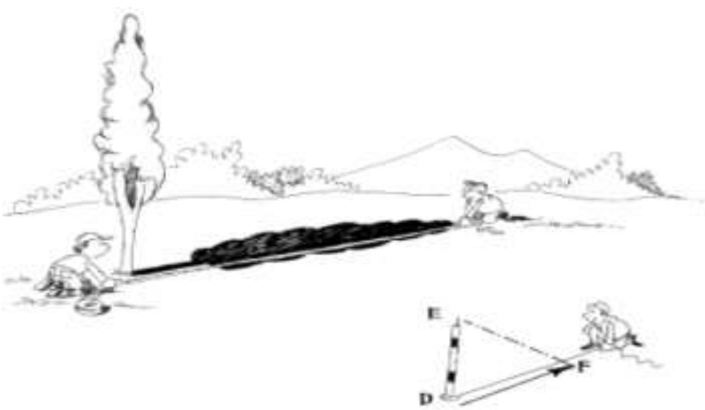
Determina la altura del triángulo de menor área cuando la altura correspondiente del triángulo de área mayor es de 14 cm.

14) Si el área de dos triángulos equiláteros es 5 cm^2 y 25 cm^2, respectivamente. ¿Son semejantes? ¿Por qué? En caso afirmativo calcula la razón de semejanza.

4.3.5 Problemas de aplicación.

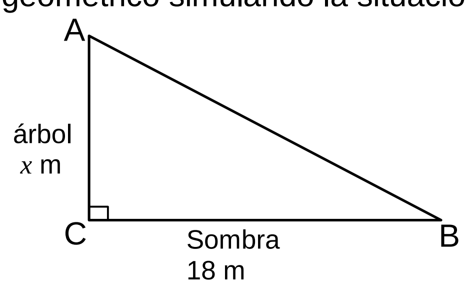
Aplicaremos los criterios de semejanza en la resolución de algunos problemas.

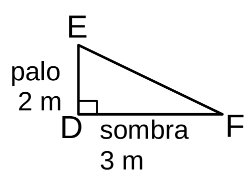
EJEMPLO 1) Cuenta la historia que el gran matemático griego Tales de Mileto midió la altura de las pirámides de Egipto usando un método muy simple: comparó la sombra de su bastón con la sombra de la pirámide. Los hombres del dibujo intentan usar el mismo método para medir la altura del árbol. Si el palo $\overline{ED}$ mide 2 m y su sombra $\overline{DF}$ mide 3 m, ¿cuál será la altura del árbol si al medir su sombra obtenemos 18 m?



Solución:

Como el árbol y el palo están verticalmente al suelo, podemos hacer un trazo geométrico simulando la situación de la siguiente forma:





Es claro y fácil, deducir que los triángulos son semejantes:

1) Al estar tanto el árbol y el palo verticalmente al suelo, forman un ángulo de _____.

2) Como la comparación se hacen al mismo tiempo y los rayos solares son paralelos, $\angle B = \angle F$ por ser ______________________________.

3) El tercer ángulo homólogo será igual, ya que ______________________________.

Conclusión, $\Delta ABC \sim \Delta EFD$ por el criterio *aaa*.

Al ser semejantes sus lados homólogos son proporcionales, es decir, $\frac{AC}{ED} = \frac{CB}{DF}$.

Sustituyendo los valores y despejando a "x": $\frac{x}{2} = \frac{18}{3}$, $x = 12$.

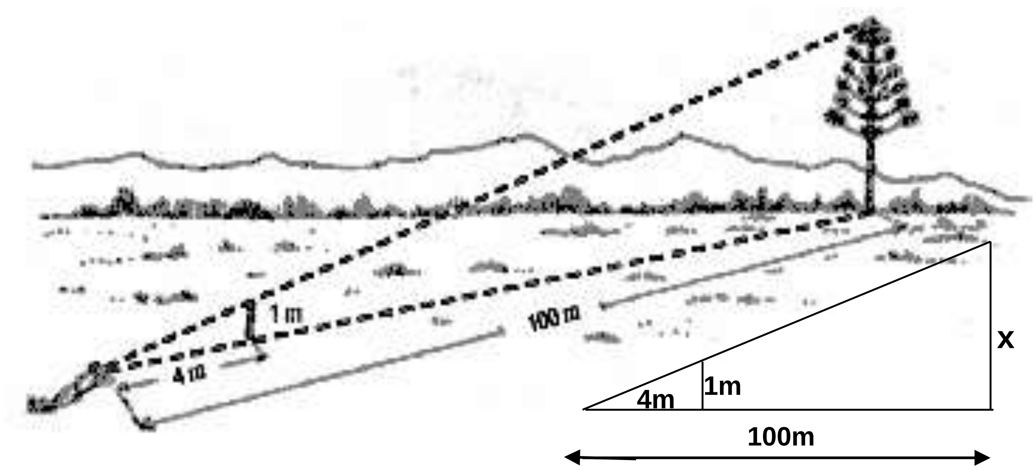
La altura del árbol es de 12 metros.

EJEMPLO 2) ¿Cómo medirías la altura de una gran araucaria?

Veamos otra forma diferente a la anterior para hacerlo.

Solución:

Primero podrías medir la distancia que te separa de la araucaria, por ejemplo 100 metros. Enseguida, podrías tomar una vara de un metro de largo y ponerla entre ti y la araucaria, de modo que la oculte exactamente. Si mides a que distancia de ti debe estar esa vara, puedes ya hacer un dibujo de la situación como en la figura.



También es fácil demostrar que tenemos dos triángulos semejantes (demuéstralo) y por tal razón se cumple:

$\frac{1}{X} = \frac{4}{100}$ despejando a "X" tenemos $100(1) = 4X$, es decir, $X = \frac{100}{4} = 25$

Por lo tanto, la altura de la araucaria es de 25 metros.

EJEMPLO 3) En una fotografía de Juan y Pedro ambos aparecen de pie. Juan mide 1.5 m y en la foto aparece de 10 cm. ¿Cuánto mide Pedro si la foto lo muestra de 11 cm?

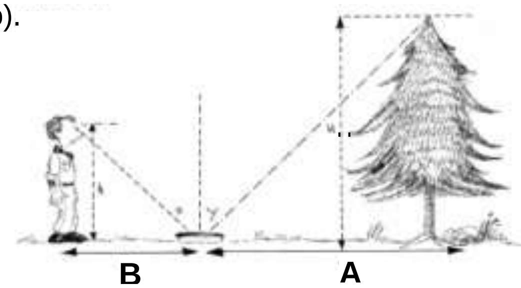
Solución:

Como en una fotografía las medidas de las imágenes están en la misma proporción, así que podemos afirmar que $\frac{\text{estatura de Pedro}}{11} = \frac{\text{estatura de Juan}}{10}$, es decir, $\frac{P}{11} = \frac{1.5}{10}$

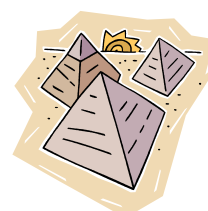
Despejando a "P": $P = \frac{11(1.5)}{10} = 1.65$ Pedro mide 1.65 m.

Ejercicios 4.3.5

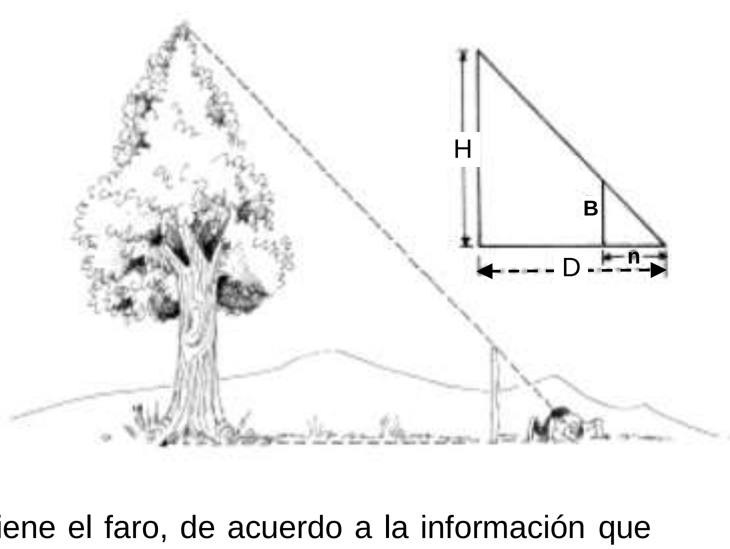
1) Explica detalladamente cómo es posible determinar la altura H de este árbol usando la información del esquema (en el suelo hay un espejo y el observador ve la parte más alta del árbol a través del espejo).



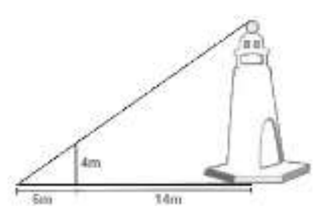
2) Cuenta la historia que el gran matemático griego Tales de Mileto midió la altura de las pirámides de Egipto usando un método muy simple: comparó la sombra de su bastón con la sombra de la pirámide. Si su bastón medía 1 metro y proyectaba una sombra de 50 cm. ¿cuál es la altura de una pirámide cuya sombra mide 45 metros? Explica tus cálculos usando un diagrama.



3) Explica detalladamente cómo es posible determinar la altura H de este árbol usando la información del esquema.



4) ¿Qué altura tiene el faro, de acuerdo a la información que observas en la figura?

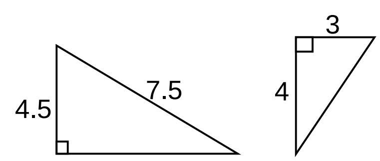


5) Un árbol de 3 metros de alto a una cierta hora genera una sombra de 1,8 metros de largo. ¿Cuánto medirá la sombra de una persona de 2 metros de alto a la misma hora?

6) La sombra de un rascacielos en un determinado momento del día mide 19.2 m. Si en el mismo instante y lugar la sombra de un semáforo de 2.5 m de altura, mide 1.5 m ¿Cuál es la altura del rascacielos? Suponer que ambos son perpendiculares al suelo.

7) Considerando los siguientes triángulos.

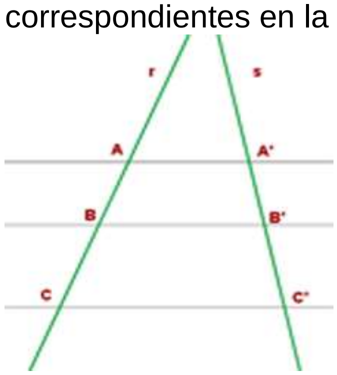
a) Determinar si los triángulos son semejantes.
b) En caso de ser semejantes, hallar la razón de semejanza del primero respecto del segundo; y la razón entre sus áreas.
c) Sea T un tercer triángulo semejante a los dos triángulos dados, tal que la razón entre las áreas del primero respecto del tercero es 4/9. Hallar la medida de cada lado del tercer triángulo.



8) Un rectángulo tiene una diagonal de 75 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 m y 48 m.

4.3.6 Teorema de Thales y su recíproco.

El Teorema de Thales dice:
Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos determinados en una de las transversales son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra. Es decir:

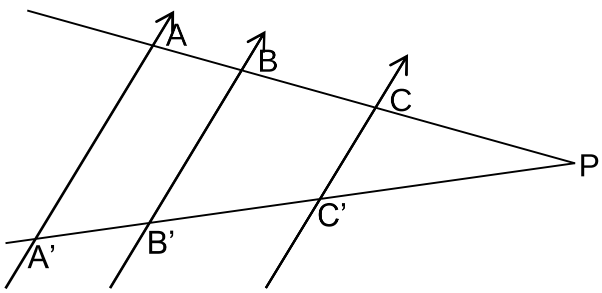


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Este Teorema se puede demostrar usando la semejanza de triángulos.

SUGERENCIA: ver video en https://www.youtube.com/watch?v=ujd6ylE4h88

En la siguiente figura, es fácil mostrarlo. Si las rectas que pasan por AA’, BB’, CC’ son paralelas, entonces se cumple que ∆APA’ ~ ∆BPB’ ~ ∆CPC’.



Al ser semejantes, sus lados homólogos serán proporcionales. Así, en los triángulos ∆APA’ ~ ∆BPB’; se tiene: $\frac{AP}{BP}=\frac{A'P}{B'P}$, que se puede escribir como: $\frac{AB+BP}{BP}=\frac{A'B'+B'P}{B'P}$,

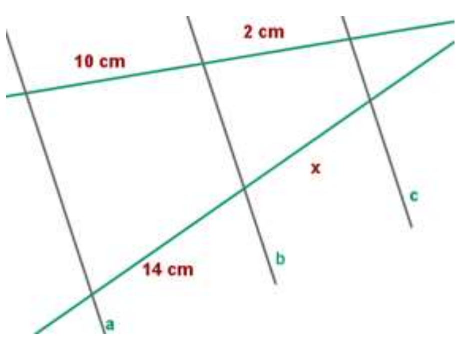
separando los términos: $\frac{AB}{BP}+\frac{BP}{BP}=\frac{A'B'}{B'P}+\frac{B'P}{B'P}$ esto es, $\frac{AB}{BP}=\frac{A'B'}{B'P}$.

Es decir, $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BP}{B'P}$.

De forma similar se procede con los triángulos ∆BPB’ ~ ∆CPC’.

Veamos algunos ejemplos donde se aplica el Teorema de Thales:

EJEMPLO 1. Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud del segmento x.



Solución:

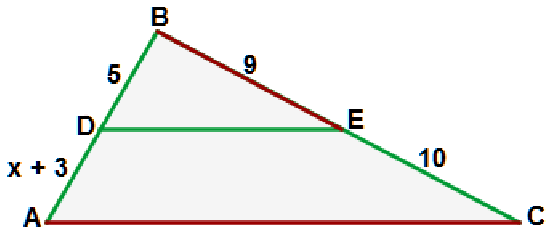
$\frac{14}{10}=\frac{x}{2}$, despejando a x se tiene:

$x = \frac{14(2)}{10} = 2.8$ cm

EJEMPLO 2. Hallar las medidas del segmento AB, si AC ‖ DE.

Solución:

Por el teorema de Thales se cumple: $\frac{x+3}{10}=\frac{5}{9}$



Despejando a "x": $x + 3 = \frac{5(10)}{9} = 5.\overline{5}$

entonces, $x + 3 = 5.\overline{5}$, $x = 2.\overline{5}$
$AB = x + 3 + 5 = 2.\overline{5} + 8 = 10.\overline{5}$ u.

El recíproco del Teorema de Thales dice:

Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas de tal forma que los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra, entonces las rectas serán paralelas.

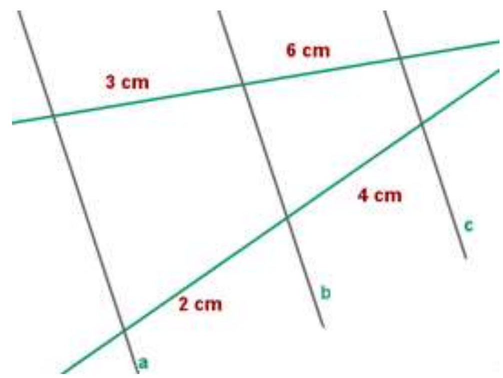
EJEMPLO. En la siguiente figura, las rectas a y b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?

Solución:

Sí, porque se cumple el **Teorema de Thales**. Ya que se cumple la proporción de los segmentos correspondientes:

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, es decir, $3(4) = 6(2)$

$12 = 12$, lo cual es verdadero.



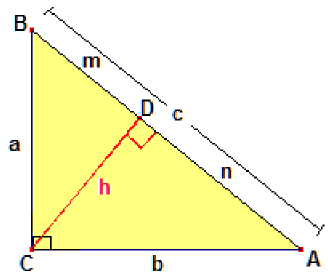
En esta parte de estudio es pertinente conocer y justificar el teorema de la altura, que sólo se cumple en triángulos rectángulos.

Teorema de la altura de un triángulo rectángulo. Justificación.

OBSERVACIÓN: De las tres alturas que tiene un triángulo rectángulo, dos de ellas son los catetos, la tercer altura es sobre la hipotenusa.

El teorema de la altura nos da la relación entre la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo y los segmentos que determina sobre la misma o proyecciones de los catetos. Este dice así:

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



En el triángulo se cumple:

$h^2 = m \bullet n$

Justificación:
Traza los tres triángulos rectángulos que se forman en la figura anterior y marca los ángulos congruentes y los lados proporcionales.

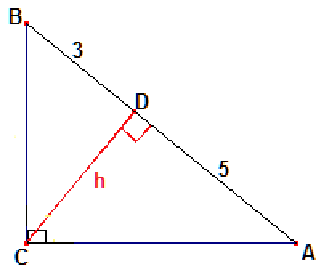
ΔACB	ΔADC	ΔCDB

Los triángulos ΔADC y ΔCDB son semejantes, ya que:
1º) ΔADC ~ ΔACB (Tienen dos ángulos iguales, el tercero será igual, criterio *aaa*)
2º) ΔCDB ~ ΔACB (Tienen dos ángulos iguales, el tercero será igual, criterio *aaa*)
Por transitividad ΔADC ~ ΔCDB.
Al ser semejantes, sus lados homólogos son proporcionales, en particular:
$\frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD}$, es decir, $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$ que es lo mismo que $h^2 = m \bullet n$.

Otra forma de enunciar este teorema es:

"En todo triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que dividen a ésta".

EJEMPLO. En el siguiente triángulo rectángulo, encontrar el valor de su altura h si se sabe que BD = 3 y DA = 5.También calcular la medida de los catetos BC y AC.



Solución:

Por el teorema de la altura, $h^2 = 3(5) = 15$

$h = \sqrt{15} \approx 3.872$

Como $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ se cumple: $\frac{AC}{AB} = \frac{DA}{AC}$, es decir $\frac{AC}{8} = \frac{5}{AC}$.

Entonces, $(AC)^2 = 40$, $AC = \sqrt{40} \approx 6.324$

De forma similar, como $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ se cumple: $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, es decir $\frac{BC}{8} = \frac{3}{BC}$.

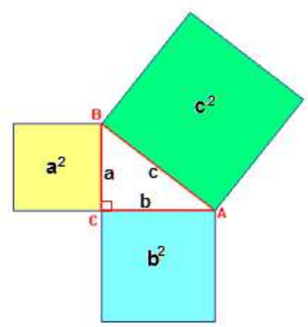
Entonces, $(BC)^2 = 24$, $BC = \sqrt{24} \approx 4.898$

Respuesta: $h = \sqrt{15}$, $AC = \sqrt{40}$ y $BC = \sqrt{24}$

Otra forma de hacerlo es usando el Teorema de Pitágoras que recordaremos a continuación.

4.3.7 Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, en la siguiente figura se cumple:



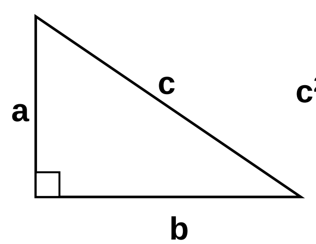
El Teorema de Pitágoras en un inicio, fue aplicado para el cálculo de áreas, en este sentido, se puede interpretar como sigue:

Área del cuadrado de lado **c** = ________

Área del cuadrado de lado **a** = ________

Área del cuadrado de lado **b** = ________

Es decir, $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$



$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

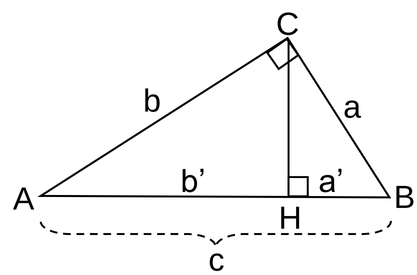
Hay muchas demostraciones del Teorema de Pitágoras, el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro The Pythagorean Proposition de 1927. Se supone que Pitágoras lo demostró por semejanza de triángulos de la siguiente forma.

Justificación: Suponiendo que ΔABC es triángulo rectángulo en C. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, en la que determina los segmentos *a'* y *b'*, proyecciones en ella de los catetos *a* y *b*, respectivamente.

De acuerdo a la figura de abajo dibuja estos tres triángulos y marca los ángulos congruentes y sus lados proporcionales

ΔABC	ΔACH	ΔBCH

Ya se vió anteriormente y de acuerdo a los triángulos que dibujaste, que estos son semejantes, $\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CHB$, por lo que:



1º) De la semejanza entre ΔABC y ΔACH:

$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b}$ que es lo mismo que $b^2 = c \bullet b'$

2º) De la semejanza de ΔABC y ΔBCH:

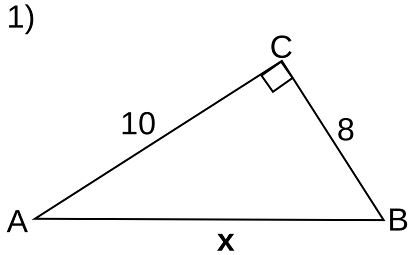
$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a}$ que es lo mismo que $a^2 = c \bullet a'$

Entonces $a^2 + b^2 = c \bullet a' + c \bullet b' = c(a' + b') = c(c) = c^2$, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$

El Teorema de Pitágoras sólo se aplica en triángulos rectángulos, y por lo general se usa para encontrar la magnitud de uno de los lados del triángulo conociendo las medidas de los otros dos.

EJEMPLOS. En las siguientes figuras, encuentra el valor de **x**.

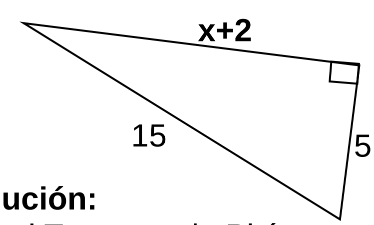
1)



Solución:
Por el Teorema de Pitágoras,
$x^2 = 8^2 + 10^2 = 64 + 100 = 164$

$x = \sqrt{164} \approx 12.806$

2)

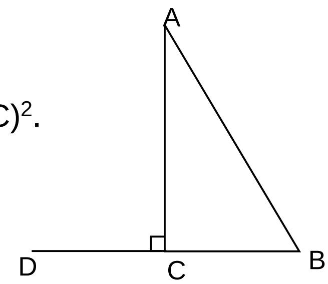


Solución:
Por el Teorema de Pitágoras: $15^2 = 5^2 + (x+2)^2$
Despejando: $225 - 25 = (x+2)^2$; $200 = (x+2)^2$
$x+2 = +\sqrt{200} \approx 14.142$, entonces $x = 12.142$

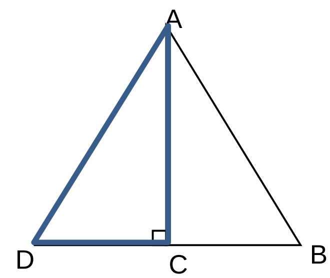
Observación: Para magnitudes la raíz cuadrada debe ser positiva.

Recíproco del Teorema de Pitágoras:

Si en un triángulo se cumple que el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.



Justificación:
Supongamos que en el ΔABC, se cumple que $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$.
Desde el punto C se traza CD perpendicular a AC, con DC = BC.



Se une A con D, y se forma el ΔADC, que es un triángulo _______________ ya que tiene un ángulo de ________

Como BC = DC por construcción, entonces $(BC)^2 = (DC)^2$.
Sumando AC^2 en ambos lados se tiene:

$$BC^2 + AC^2 = DC^2 + AC^2 = AD^2$$

Como el ΔADC es triángulo rectángulo por construcción, entonces se cumple el Teorema de Pitágoras.
Es decir, $BC^2 + AC^2 = AD^2$, como $BC^2 + AC^2 = AB^2$, entonces, $AD^2 = AB^2$.
Si $AD^2 = AB^2$ entonces, AD = _______.

Así, se puede afirmar que $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ por el criterio LLL, ya que:
1) BC = DC por construcción.
2) AC lado común.
3) AB = AD por la deducción anterior.
Entonces, como ΔADC es triángulo rectángulo implica que ΔABC también es un triángulo rectángulo, y se cumple el Recíproco del Teorema de Pitágoras.

EJEMPLO. Las medidas de los lados de un triángulo son 13, 12 y 5. ¿Será un triángulo rectángulo?

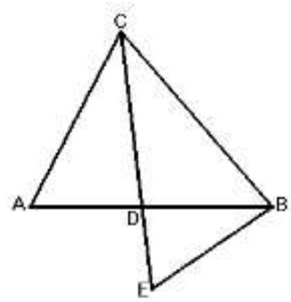
Solución:

Por el Recíproco del Teorema de Pitágoras, si se cumple que $13^2 = 12^2 + 5^2$ se puede afirmar que el triángulo de lados 13, 12 y 5 es un triángulo rectángulo.
Calculando los cuadrados, $13^2 = 169$, $12^2 = 144$, $5^2 = 25$, en efecto, se cumple que $169 = 144 + 25$.

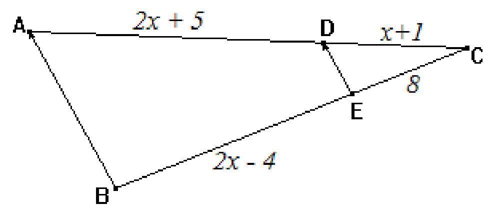
Observación: Tres medidas que cumplen el Teorema de Pitágoras se les llama Ternas Pitagóricas.

Ejercicios 4.3.7

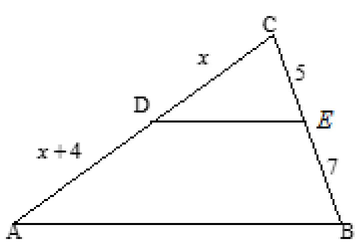
1) Si en el ΔABC, CE es la bisectriz del $\angle ACB$ y $\angle ABE = \angle ACD$, mostrar que $\Delta ACD \sim \Delta DBE$ y que $\Delta ADC \sim \Delta CEB$.



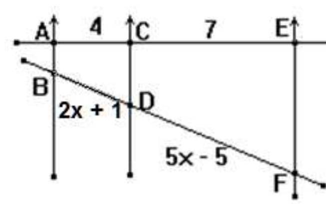
2) En la siguiente figura AB $\parallel$ DE. Encuentra el valor de x y la magnitud de AC y de BC.



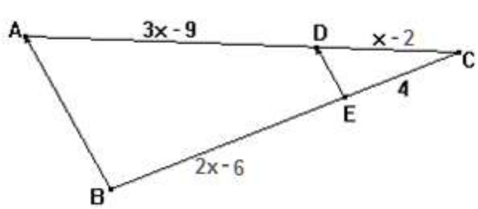
3) En la siguiente figura DE $\parallel$ AB. Encuentra el valor de x y la magnitud de AC.



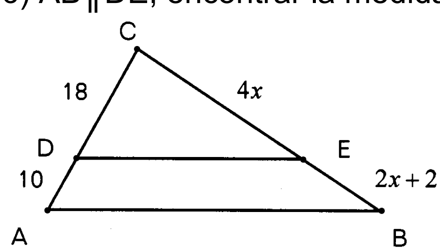
4) Encuentra el valor de x y el de BF, si las rectas AB, CD y EF son paralelas.

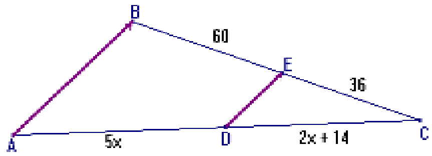
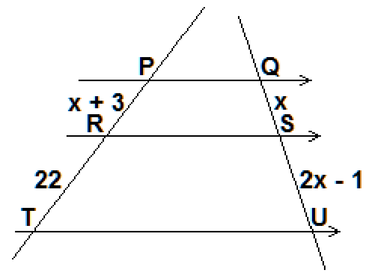


5) AB $\parallel$ DE , encuentra el valor de x y el de AC.

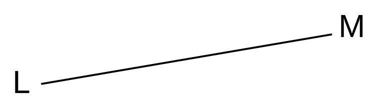


6) AB $\parallel$ DE, encontrar la medida de BC.

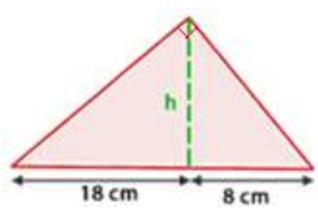


7) Encuentra el valor de x y el de AC, si las rectas AB y DE son paralelas 	8) Encuentra el valor de x y el de QU, si las rectas PQ, RS y TU son paralelas. 

9) Con regla y compás dividir el segmento $\overline{LM}$ en 5 partes iguales, explica tus trazos.



10) Calcula la altura de un triángulo rectángulo con los datos que se muestran en la figura:

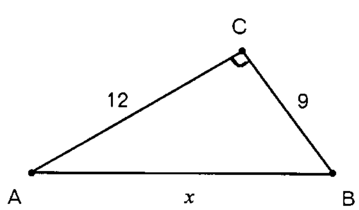


11) Los lados de un triángulo rectángulo miden 6 m, 8 m y 10 m, respectivamente. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero si su hipotenusa mide 15 m?

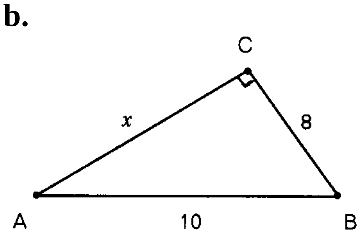
12) En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa mide 16 cm y la proyección ortogonal de uno de sus catetos mide 32 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa de dicho triángulo?

13) Usando el Teorema de Pitágoras, encuentra el valor de x en cada caso.

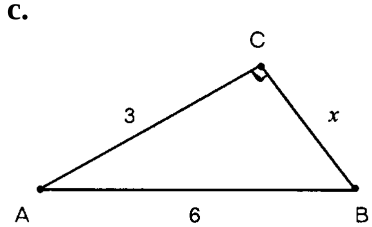
a.



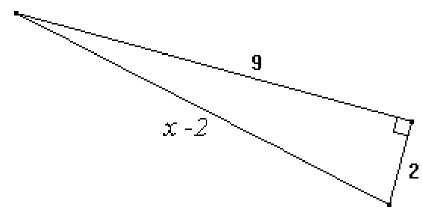
b.



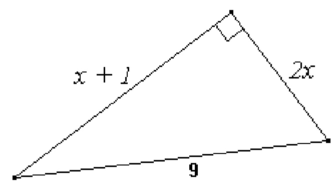
c.



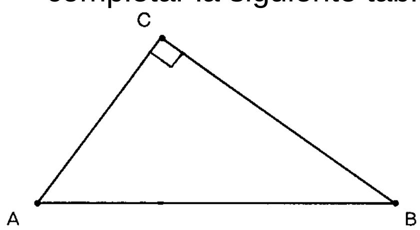
d.



e.



14) Usando la siguiente figura y el Teorema de Pitágoras, completar la siguiente tabla:



a.	AB	AC	BC
b.		6	8
c.		3	3
d.	12	8	
e.	1		½
f.	6	$\sqrt{3}$	
g.	$\sqrt{5}$		$\sqrt{3}$
h.		$\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$
i.	12		4
j.	1	½	
k.	1		¼

15) Primero traza la figura para contestar los siguientes ejercicios:

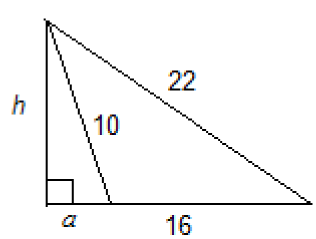
a) Encontrar la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 5.

b) Las diagonales de un rombo miden 12 y 8, ¿cuál es la medida del lado del rombo?

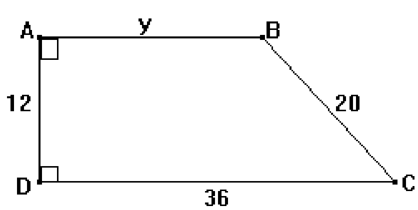
c) ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 unidades.

16) ¿Cuánto mide la altura del triángulo isósceles ABC cuyos lados iguales miden 9 cm y el tercer lado mide 6 cm?

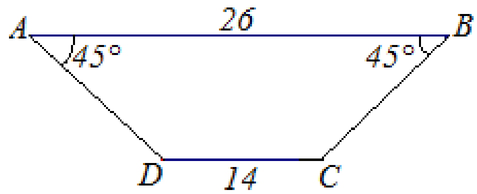
17) En la siguiente figura encuentra el valor de *h* y de a.



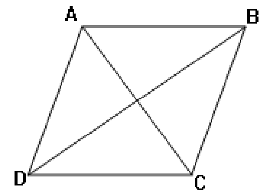
18) ABCD es un trapecio, encuentra el valor de "y".



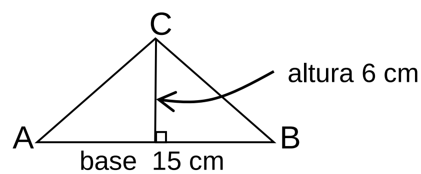
19) ABCD es un trapecio, encuentra el valor de AD.



20) ABCD es un rombo de lado 12 u y una de sus diagonales mide 16 u, ¿cuánto mide la otra diagonal?



21) Suponiendo que el ΔABC es isósceles, calcular la medida de su altura como se muestra en la figura.



22) La medida de los lados de un triángulo equilátero es de $2\sqrt{3}$ unidades, determine la medida de la altura.

23) Dadas las siguientes medidas, ¿cuáles corresponden a los lados de un triángulo rectángulo?

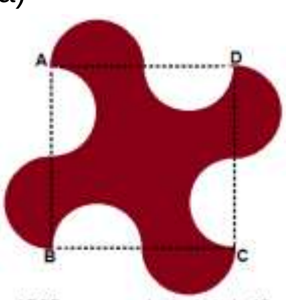
a) 10, 24, 26 b) 20, 21, 29 c) 8, 15, 17 d) 5, 13, $\sqrt{195}$

24) Dadas las siguientes ternas de números, ¿cuáles serán ternas pitagóricas?

a) 7, 24, 25 b) 20, 20, $20\sqrt{2}$ c) 13, 15, 17 d) 2, 3, 6

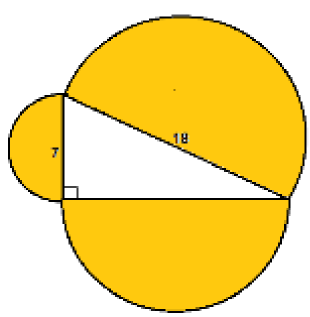
25) Calcular el área sombreada de cada una de las siguientes figuras:

a)

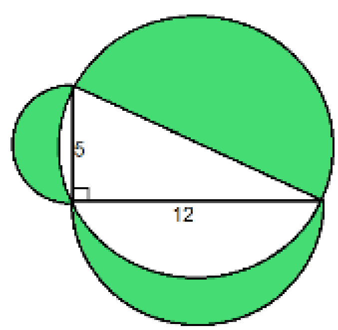


ABCD es un cuadrado de lado 18 cm y las ocho semicircunferencias son congruentes.

b)

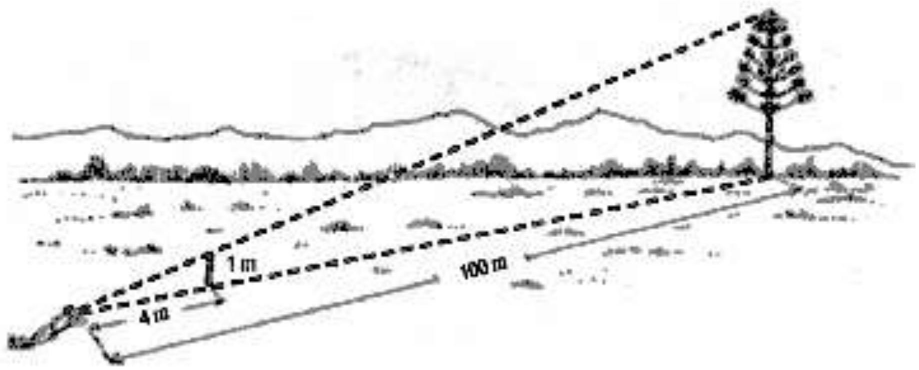


c)

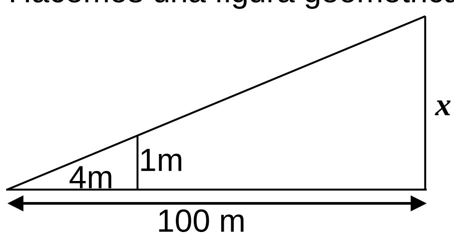


4.3.8 Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia, y Teorema de Pitágoras.

PROBLEMA 1. Calcular la altura del árbol con los datos de la figura, suponiendo que la vara de 1 m es paralela al árbol.



Solución:
Hacemos una figura geométrica de la situación:

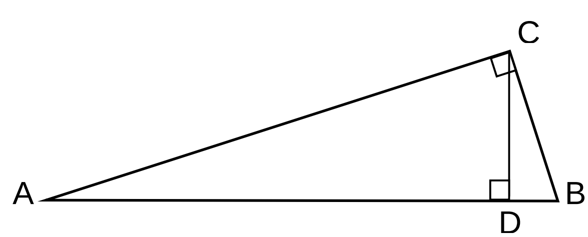


Como la vara de 1 m es paralela al árbol, en la figura tenemos dos triángulos semejantes. Entonces, sus lados homólogos son proporcionales y se cumple:

$\frac{x}{1} = \frac{100}{4}$, es decir, x = ______ = ________

Respuesta: La altura del árbol es de 25 metros.

PROBLEMA 2. El triángulo rectángulo ABC, como se muestra en la siguiente figura, está dividido en dos triángulos rectángulos de áreas 90 y 10 cm^2, respectivamente, ¿cuáles son las medidas del triángulo ABC?



Solución:
Al ser triángulos rectángulos y CD altura, $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$

Entonces, se cumple que $\frac{\text{Área } \Delta ACD}{\text{Área } \Delta CBD} = \frac{90}{\quad} =$ ________ $= r^2$

De esto, la razón de semejanza entre los lados de los triángulos es $r = \sqrt{9} = 3$

Usando esta razón, como $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ sus hipotenusas son ________________, es decir, se cumple que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 3$. De esto se deduce que $\overline{AC} = 3\overline{BC}$

Por otro lado: $\text{Área } \Delta ABC = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} =$ _________ cm^2, entonces $\overline{AC} \times \overline{BC} = 200$

Sustituyendo el valor de $\overline{AC}$ tenemos $3\overline{BC} \times \overline{BC} = 200$, así, $(\overline{BC})^2 =$ ________

De esto, $\overline{BC} = \sqrt{\frac{200}{3}} = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$, al sustituir este valor en $\overline{AC}$, $\overline{AC} = 3\overline{BC} = 30\sqrt{\frac{2}{3}}$

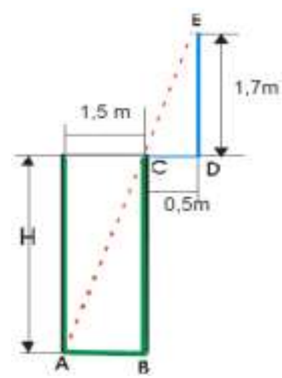
Aplicando el Teorema de Pitágoras en el ΔABC:

$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 =$ ______________________ $=$ ______________________ $= \frac{2000}{3}$

Finalmente, $\overline{AB} = \sqrt{\frac{2000}{3}} = \frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{\frac{5}{3}} \approx$ ____________

Respuesta: $\overline{BC} = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm ≈ ___________, $\overline{AC} = 30\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm ≈ ____________ y

$\overline{AB} = 20\sqrt{\frac{5}{3}}$ cm. ≈ _____________



PROBLEMA 3. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su diámetro es de 1.5 m y alejándonos 0.5 m del borde, desde una altura de 1.7 m, vemos que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

Solución:

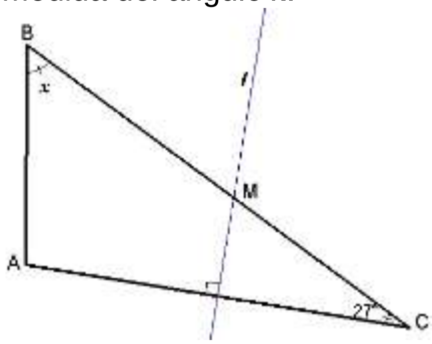
Los triángulos ABC y CDE son semejantes ya que los segmentos BC y DE son paralelos por ser perpendiculares al suelo (marca en la figura los ángulos congruentes), por lo tanto los lados tienen que ser proporcionales.

Es decir: $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$. Al sustituir los datos se tiene: $\frac{\overline{BC}}{1.7} = \frac{1.5}{0.5}$, despejando $\overline{BC} =$

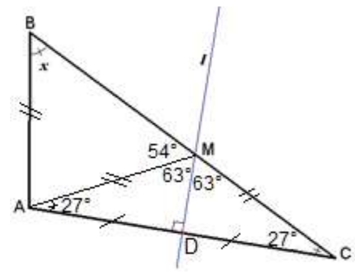
____________ $= 5.1$

Respuesta: La profundidad del pozo es de 5.1 metros.

PROBLEMA 4. En el triángulo ABC, l es mediatriz del lado AC, AB = MC, encontrar la medida del ángulo x.



Solución: Trazamos el segmento AM y se obtienen dos triángulos congruentes ∆AMD y ∆MDC. (¿Porqué?)



Entonces, se cumple que: AM = MC, AD = DC

∠MAD = 27° y ∠AMD = 63° ya que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es de 180°.

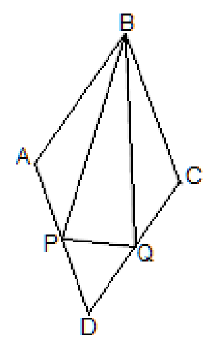
Además, ∠AMB + ∠AMD + ∠DMC = 180°, entonces ∠AMB = 54°.

Por hipótesis AB = MC, pero MC = AM, entonces AB = AM.

Es decir, el ∆ABM es isósceles con ∠AMB = ∠x, entonces ∠x = 54°.

Respuesta: ∠x = 54°.

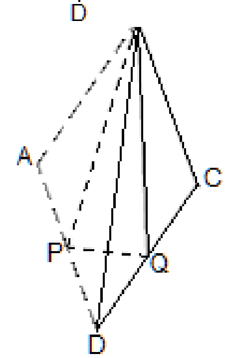
PROBLEMA 5. Calcular el área del ∆BPQ en la siguiente figura. Si ABCD es un rombo de área 8 cm^2. Con P y Q puntos medios de los lados AD y DC, respectivamente.



Solución:

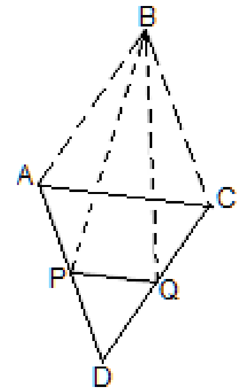
Recuerda las propiedades de un rombo, sus cuatro lados son iguales y sus ángulos opuestos también son iguales.

Es fácil mostrar que ∆ABP es congruente al ∆CBQ, entonces sus áreas son iguales.



Por un lado: Al ser Q punto medio de DC, QC = $\frac{DC}{2}$

Como ∆BCD y ∆BCQ tienen la misma altura, entonces el área del ∆BCD = 2(área ∆BCQ). (Puedes prolongar DC y traza sus alturas con respecto a B)



Pero al ser BD diagonal del rombo, área ΔBCD = $\frac{\text{área ABCD}}{2} = \frac{8}{2}$ = 4 cm^2. De esto, el área del ΔBCQ = 2 cm^2

Entonces 2(área ΔBCQ) = 4, pero, como ΔABP es congruente al ΔCBQ, podemos afirmar que: área ΔABP + área ΔCBQ = 4.

De tal forma que área ΔBPQ + área ΔPQD = 8 – 4 = 4 m^2.

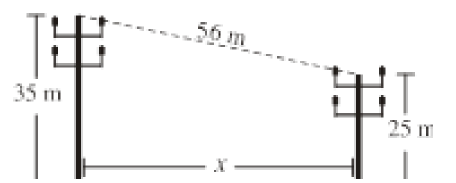
Por otro lado: Al trazar la diagonal AC, el ΔPQD es semejante al ΔACD y su razón de semejanza es _______, ¿porqué?

Entonces, $\frac{\text{área } \Delta PQD}{\text{área } \Delta ACD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, de esto se deduce que el área del ΔPQD = $\frac{\text{área } \Delta ACD}{4}$ y como AC es diagonal del rombo, el área del ΔACD = $\frac{\text{área ABCD}}{2}$ = _________ m^2.

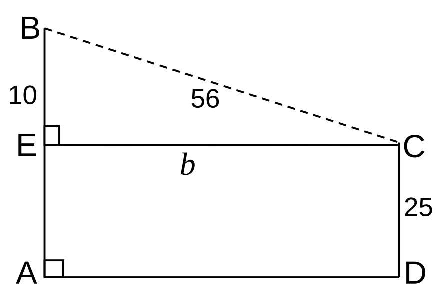
Por lo que el área ΔPQD = $\frac{\quad}{4}$ = _____ m^2, entonces área ΔBPQ = 4 m^2 – 1 m^2

Respuesta: área ΔBPQ = _________ m^2

PROBLEMA 6. Se ha tendido un cable de 56 m de longitud uniendo los extremos de dos torres metálicas cuyas alturas son 25 m y 35 m, respectivamente. ¿Qué distancia separa los pies de ambas torres?



Solución:



Trazamos una figura geométrica que represente los postes, el suelo y los cables con las medidas dadas, le asignamos nombres a los vértices del trapecio resultante ya que se supone que los postes son perpendiculares al suelo.

Trazamos un segmento paralelo a AD que pase por C, se llamará CE.

Y se forma el triángulo rectángulo BCE, con las medidas de la figura. Aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene: 56^2 = _____________, b^2 = _____________

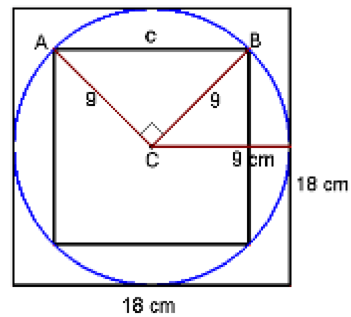
Donde b = $\sqrt{56^2 - 10^2}$ =___________= 55.099.

Respuesta: La distancia que separa los pies de ambas torres es de 55.099 metros.

PROBLEMA 7. En un cuadrado de 18 cm de lado se inscribe un círculo y en este círculo un cuadrado y en este segundo cuadrado otro círculo. Hallar el área comprendida entre el último cuadrado y el último círculo.

Solución:

Trazando un dibujo siguiendo el enunciado del problema, podemos deducir que el radio del primer círculo es 9 cm, ya que es la mitad del lado del primer cuadrado.



La medida del lado del segundo cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles que se forma al trazar los radios AC y BC.

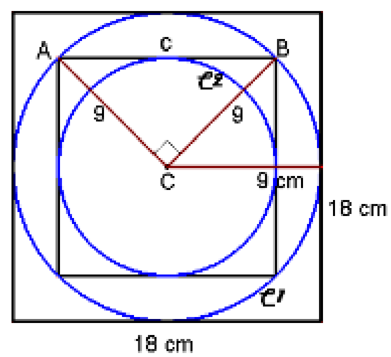
Aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos:

$$c^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 162$$

$$c = \sqrt{162}$$

Entonces, el área del segundo cuadrado es $(\text{lado})^2 = (\sqrt{162})^2 = 162\ \text{cm}^2$.

Por otro lado, el radio del segundo círculo, será la mitad del lado de esté 2º cuadrado, es decir, su radio es: __________.



De tal forma que el área del segundo círculo es: ____________

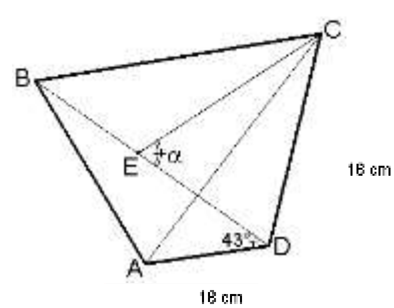
$$\pi\left(\frac{\sqrt{162}}{2}\right)^2 = \frac{162\pi}{4}\ \text{cm}^2$$

Finalmente, el área comprendida entre el 2º cuadrado y el 2º círculo es:

$$162 - \frac{162\pi}{4} = \frac{648 - 162\pi}{4} = 34.765\ \text{cm}^2$$

Respuesta: El área comprendida entre el cuadrado y el círculo es 34.765 cm^2

PROBLEMA 8. En la siguiente figura $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, $\overline{EC} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BE} \cong \overline{AD}$ y $\angle ADB = 43°$, encontrar el valor del $\angle\alpha$.



Solución: Marca en la figura los datos.

- Por un lado, el ΔECD es isósceles ya que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$, entonces $\angle CDE$ = ______ .

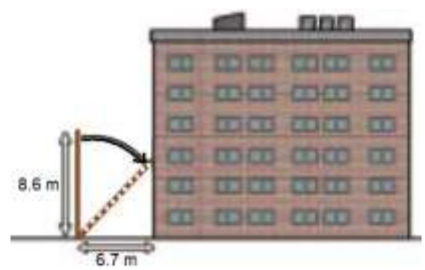
- Por otro lado, nos fijamos en los triángulos ΔBCE y ΔACD, puedes mostrar que son congruentes por el criterio ________. Al ser congruentes, sus ángulos homólogos son iguales, es decir, $\angle ADC = \angle$_______.
Pero $\angle ADC = 43° + \angle\alpha$, entonces $\angle BEC = 43° + \angle\alpha$.
Cómo $\angle BEC + \angle\alpha$ = _______, sustituyendo la medida de $\angle BEC$ se tiene, $43° + \angle\alpha + \angle\alpha = 180°$, despejamos $\angle\alpha$ y obtienes $\angle\alpha$ = ________

Respuesta: $m\angle\alpha$ = _________

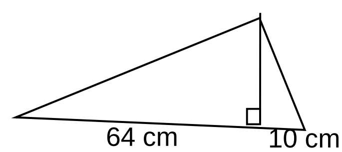
Ejercicios 4.3.8

1) Determinar el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de 12 cm de lado. ¿Serán iguales sus áreas?

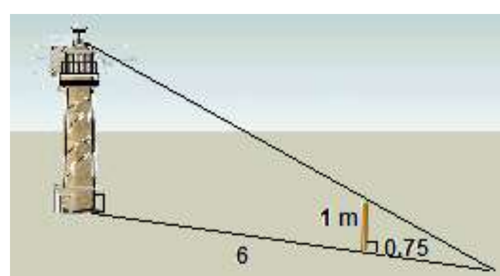
2) Se cae un poste de 8.6 metros de altura sobre un edificio que se encuentra a 6.7 metros de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?



3) Calcular el área de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 64 y 10 cm.



4) Para calcular la altura de un faro, ponemos un palo vertical cerca y medimos la sombra del palo y del faro. Hemos obtenido 0.75 y 6 m, respectivamente. Si el palo mide 1 m. ¿Cuánto mide el faro?



5) La sombra de un rascacielos en un determinado momento del día mide 19.2 m. Si en el mismo instante y lugar, la sombra de un semáforo de 2.5 m de altura mide 1.5 m ¿Cuál es la altura del rascacielos? Suponer que ambos son perpendiculares al suelo.

6) Una hectárea es el área de un cuadrado de 100 m de lado, y se denota 1 ha. Si un campo rectangular de 250 ha está atravesado diagonalmente por un río. De un lado del río, se siembra 2/5 del terreno con maíz. Del otro margen del río, se siembra una tercera parte del terreno con girasol. El resto se destina al pastoreo.

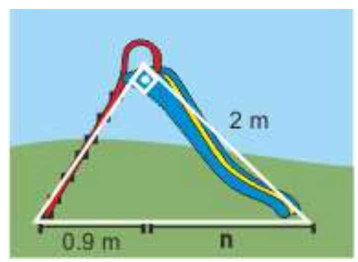
a) ¿Cuantas hectáreas se destinan al pastoreo?

b) Si se cosechan 335040 kg de maíz, ¿cuál es el rendimiento promedio por hectárea?

7) En un incendio de un hospital acudió una unidad de bomberos con una escalera de 32 m de longitud, que consta de 80 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo.

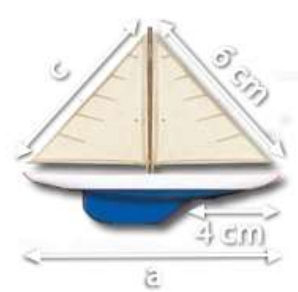
a) ¿Qué altura del edificio alcanzará la escalera?
b) Si el fuego se encuentra en el 5º piso, y cada piso tiene 4.5 m de altura, ¿podrán ser rescatados los enfermos que allí se encuentren?
c) Puesto que las llamas ascienden, ¿es posible con dicha escalera evacuar los 7 pisos de que consta el hospital?

8) Observa el tobogán en el que juegan Lucía y Marcos.



a) Calcula la medida del lado n.
b) ¿Cuál es la altura del tobogán?

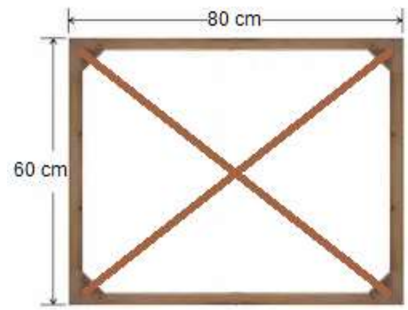
9) Una maqueta de barco usa dos cablecitos para tensar el mástil mayor, debiendo quedar como muestra la figura.



a) Calcular la distancia a la que debemos colocar el cable c.
b) ¿Cuál debe ser la longitud de dicho cable?
c) ¿Cuál es la altura del mástil?

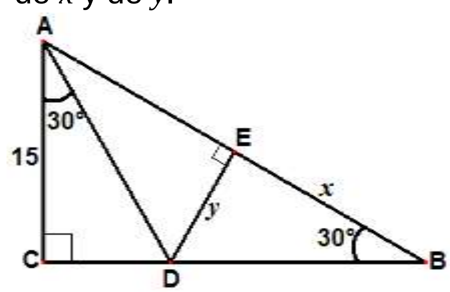
10) Un ciclista recorre en línea recta 6 km hacia el Este, 2 km hacia el Norte, 3 km hacia el Este y 5 km hacia el Norte, finalizando ahí su recorrido. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

11) Una industria construye bastidores para colocar telas para pintura de 80 por 60 cm. Para reforzarlos se utilizan dos varillas de pino que se colocan en las diagonales. Las varillas se obtienen cortando tirantes de pino que miden 10m de largo. ¿De cada tirante pueden obtenerse refuerzos para cuántos bastidores?



12) En un cuadrado se traza una perpendicular a uno de los lados que pase por el punto de intersección de las diagonales. La longitud del segmento que va desde este punto al pie de la perpendicular trazada es de 7cm. Determinar el área del cuadrado.

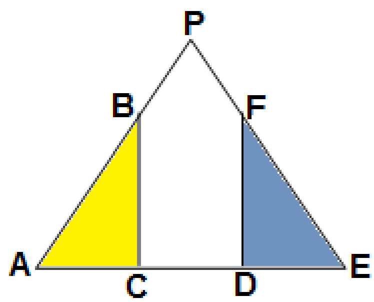
13) El $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, AC = 15 cm, AD es bisectriz del $\angle BAC$ y $DE \perp AB$, encuentra el valor de x y de y.



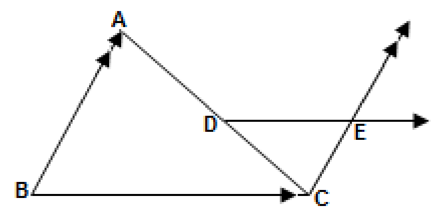
A U T O E V A L U A C I Ó N

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.
Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1 hora como máximo.
EN CADA EJERCICIO ESCRIBE TUS RAZONES O JUSTIFICACIONES.

1) Demuestra que Δ**ABC** $\cong$ Δ**EFD**, AE está trisecado, ΔAPE es isósceles y BP = FP.

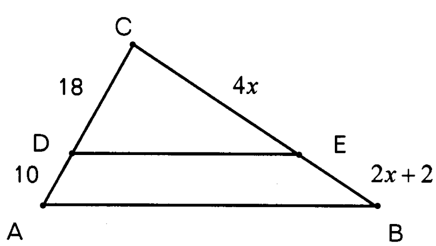


2) Demostrar que ΔABC ~ ΔCDE, si por construcción AB || CE y BC || DE.

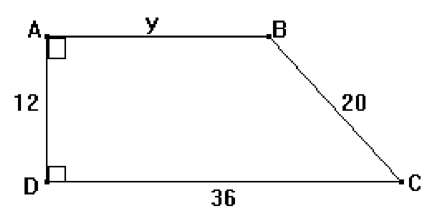


3) En la siguiente figura, AB$\|$DE,

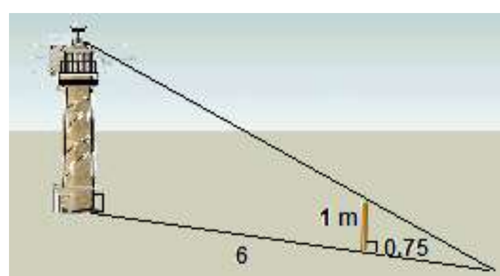
encontrar la medida de BC.



4) ABCD es un trapecio, encuentra el valor de "y".



5) Para calcular la altura de un faro, ponemos un palo vertical cerca y medimos la sombra del palo y del faro. Hemos obtenido 0.75 y 6 m, respectivamente. Si el palo mide 1 m. ¿Cuánto mide el faro?



ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios.
Si resuelves bien 1 o 2 ejercicios, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, y hacer todos los ejercicios propuestos.
Si contestas bien 3 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 4 o 5 vas avanzando bien en tu estudio.

Bibliografía

Barnett, Rich. *Geometría* Plana con Coordenadas. Serie Schaum-s, Editorial macgraw hill, México, 1982.

Clemens, Stanley *et al*, *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*, Addison Wesley, México, 1989.

Euclides, Elementos de Geometría I - II, versión de Juan D. García Bacca, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 1992.

Garcia, Jesús y Bertrán, Celesti. *Geometría y Experiencias*, *Recursos Didácticos,* Alhambra, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

Miller, Charles et al. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999

Wentworth, J.; Smith, D. Geometría plana y del espacio. Ed. Porrúa. 24a. Ed. 1997.

Páginas Web, vistas el 28 de septiembre de 2014:

https://www.youtube.com/watch?v=aBA8RKDN_B8 (Concepto congruen + criterios)

https://www.youtube.com/watch?v=wBwhHf7oV7c (Congruencia + criterios)

https://www.youtube.com/watch?v=FBeTFJUPxEA (Ejerc congruencia)

https://www.youtube.com/watch?v=YSFqfBKyN8c (Concepto semejanza)

https://www.youtube.com/watch?v=UfnLCGGufsA (Ejerc Semejanza)

https://www.youtube.com/watch?v=9JFngPZcH7c (Semejanza y congruencia)

https://www.youtube.com/watch?v=ifjbo-RyfNE (Teorema de Thales)

https://www.youtube.com/watch?v=Q8F538tA-jI

https://www.youtube.com/watch?v=EwMp3NB_8gU (Teorema de Pitágoras)

https://www.youtube.com/watch?v=6-VV3USF-AU (Ejerc Teor Pitágoras)

ANEXO: BINGO DE CONGRUENCIA

Este juego permite consolidar conceptos ya trabajados sobre los criterios de congruencia.

Objetivo: Está pensado para que nuestros estudiantes practiquen y adquieran cierta agilidad en el manejo de los criterios de congruencia y al mismo tiempo practicarán la estructura de una deducción.

Materiales: Son un total de 22 papeletas donde en cada una hay un ejercicio de demostración de la congruencia de dos triángulos. Y 39 cartas donde en cada una se hace una afirmación verdadera.

Participantes: Recomendado para alumnos de segundo semestre del ciclo escolar del CCH (al terminar la unidad 4). El profesor debe de coordinar el juego, debe barajear y correr las cartas.

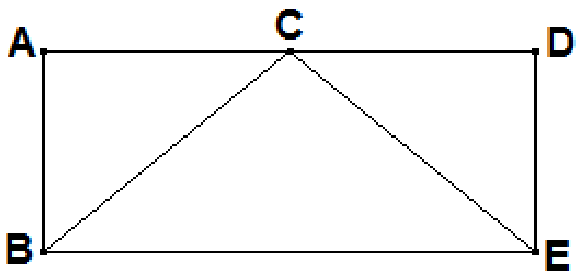
Desarrollo: A cada alumno se le da una papeleta y se les indica que escriban su nombre en ella, se les da 10 minutos para que el alumno lea y entienda el ejercicio, y se les pide que escriban una posible solución del ejercicio que les tocó.

El profesor va leyendo una por una la afirmación de cada carta como se hace en el juego de la lotería, y va anotando el número de la carta enunciada en el orden en que van saliendo para que de una forma práctica se dé cuenta de las afirmaciones que ya mencionó y pueda decidir si una papeleta es ganadora o no. La lectura de las cartas debe ser pausadamente para que los alumnos la analicen y decidan si su ejercicio tiene o no dicha afirmación, en caso de que si la tenga, la señalará con una palomita (✓). El o los alumnos que primero completen su demostración que consta de tres afirmaciones, debe de gritar ¡**lotería**!, y le entregan al profesor su papeleta para que la revise y ratifique si efectivamente completó correctamente el ejercicio,

Se sugiere que a los primeros 5 lugares se les obsequie un chocolate o un dulce para motivar más a los alumnos. El profesor continúa leyendo las cartas hasta terminarlas para que los alumnos logren completar su ejercicio. y al final del juego todos los alumnos deben entregar su papeleta al profesor para que la evalúe.

Las papeletas y cartas son las siguientes:

1) Demostración de que **∆ABC ≅ ∆CDE**, si C es punto medio de AD y ADEB es un rectángulo.



1) ______________________________

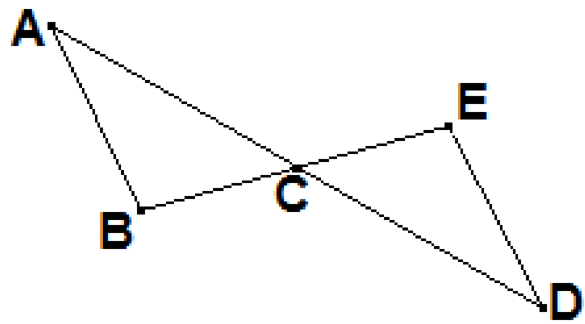
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

2) Demostración de que **∆ABC ≅ ∆CDE**, si C es punto medio de AD y de BE.



1) ______________________________

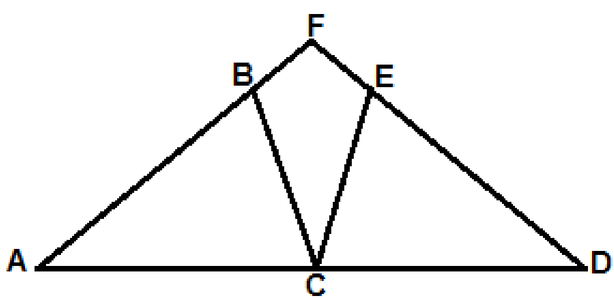
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

3) Demostración de que **∆ABC ≅ ∆CDE**, si C es punto medio de AD, ∆AFD es isósceles y ∠BCA = ∠ECD.



1) ______________________________

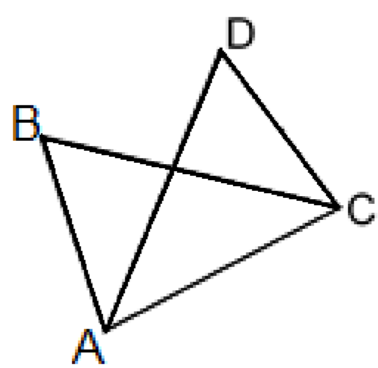
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

4) Demostración de que **∆ABC ≅ ∆ACD**, si BC = AD y AB = DC



1) ______________________________

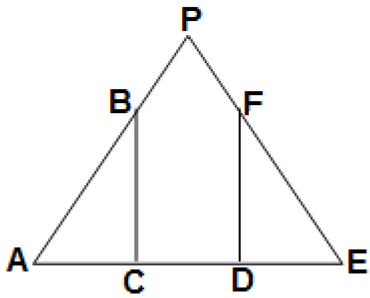
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

5) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔEFD**, AE está trisecado, ΔAPE es isósceles y BP = FP.



1) ______________________________

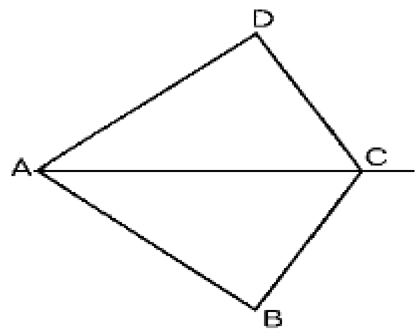
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

6) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔACD**, si AD = AB y AC es bisectriz del ∠DAB.



1) ______________________________

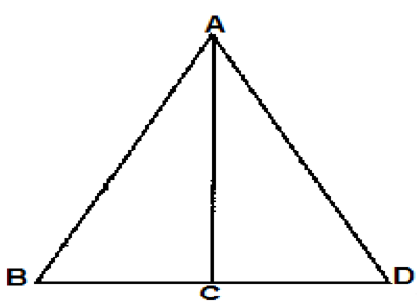
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

7) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔACD**, si ΔABD es isósceles y AC es bisectriz del ∠BAD.



1) ______________________________

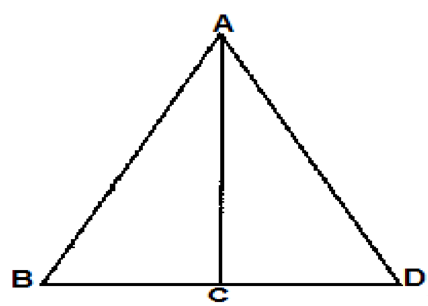
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

8) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔACD**, si AC es altura y AC es bisectriz del ∠BAD.



1) ______________________________

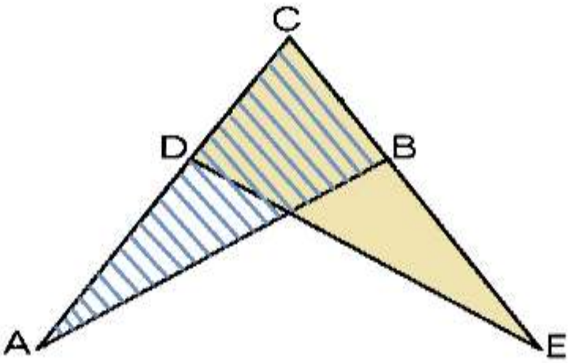
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

9) Demostración de que $\mathbf{\Delta ABC} \cong \mathbf{\Delta CDE}$, si $AC = CE$ y $BC = DC$.



1) ______________________________

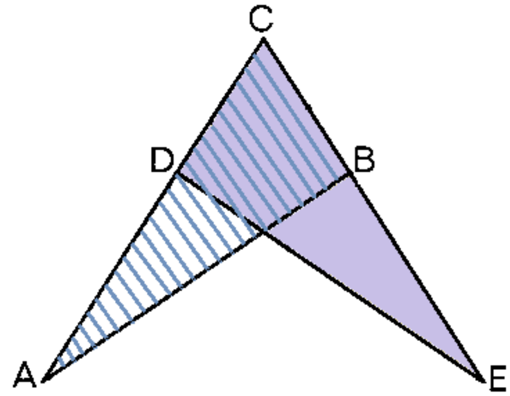
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

10) Demostración de que $\mathbf{\Delta ABC} \cong \mathbf{\Delta CDE}$, si $DC = BC$, $AC \perp DE$ y $AB \perp CE$.



1) ______________________________

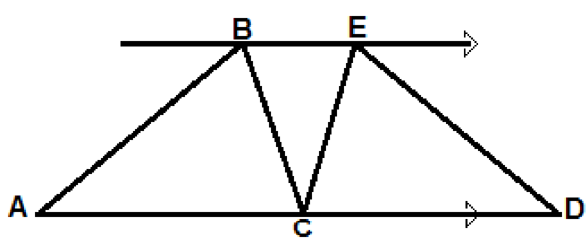
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

11) Demostración de que $\mathbf{\Delta ABC} \cong \mathbf{\Delta CDE}$, si ΔCBE es isósceles, $BE \parallel AD$ y C es punto medio de AD.



1) ______________________________

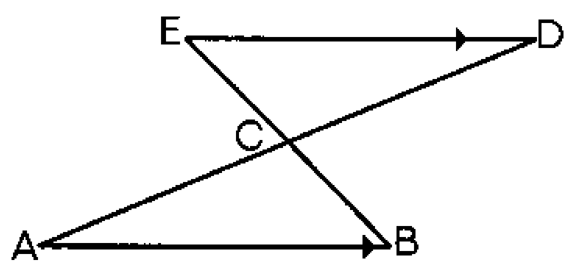
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

12) Demostración de que $\mathbf{\Delta ABC} \cong \mathbf{\Delta CDE}$, si $DE \parallel AB$ y C es punto medio de AD.



1) ______________________________

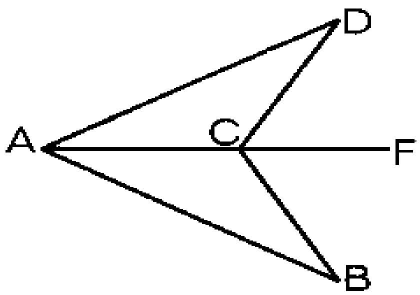
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

13) Demostración de que **ΔABC** ≅ **ΔADC**, si AF es bisectriz del ∠DAB y del ∠DCB.



1) ______________________________

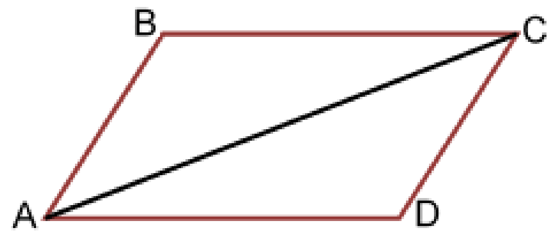
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

14) Demostración de que **ΔABC** ≅ **ΔACD**, si ABCD es un paralelogramo.



1) ______________________________

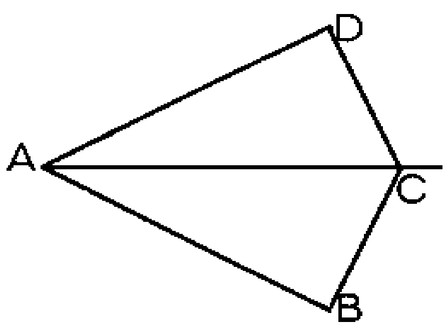
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

15) Demostración de que **ΔABC** ≅ **ΔADC**, si AC es bisectriz del ∠DAB y del ∠DCB .



1) ______________________________

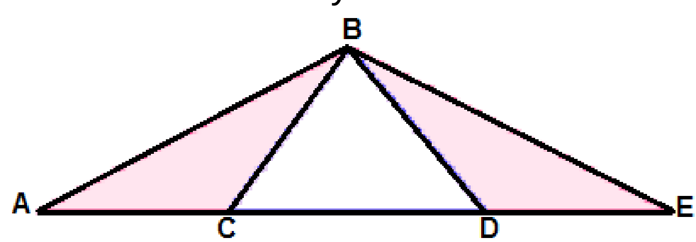
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

16) Demostración de que **ΔABC** ≅ **ΔBDE**, si AE está trisecado y ΔABE es isósceles.



1) ______________________________

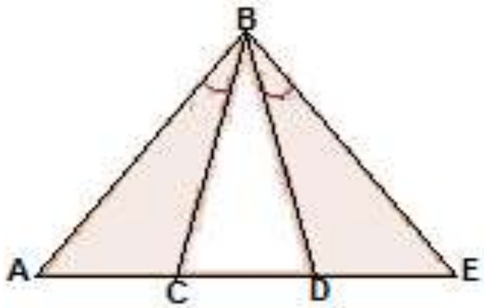
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

17) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔEBD**, si ∠ABE está trisecado y ΔABE es isósceles.



1) ______________________________

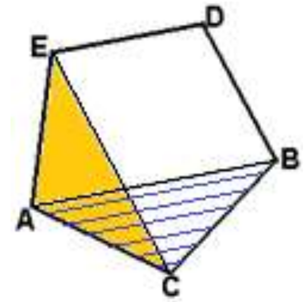
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

18) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔCEA**, si ACBDE es un pentágono regular.



1) ______________________________

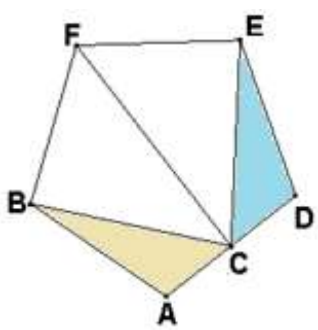
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

19) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔCDE**, si BADEF es un pentágono regular y C es punto medio de AD.



1) ______________________________

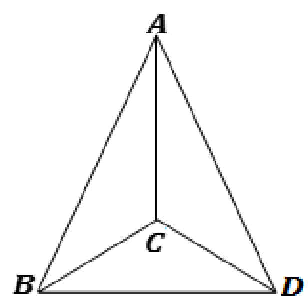
2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

20) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔADC**, si ΔABD y ΔBCD son isósceles.



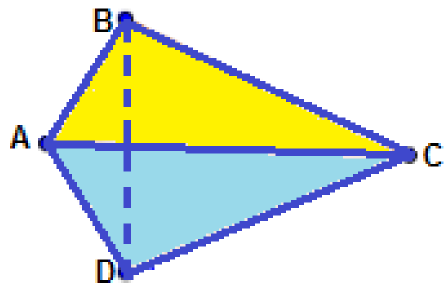
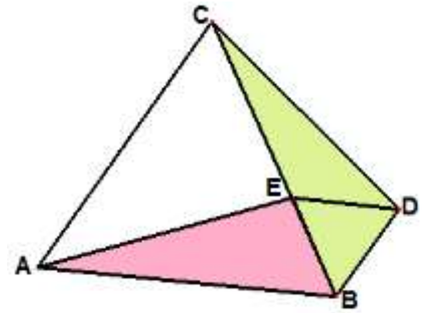
1) ______________________________

2) ______________________________

3) ______________________________

CONCLUSIÓN:

Criterio:

21) Demostración de que **ΔABC ≅ ΔADC**, si ΔABD y ΔBCD son isósceles.  1) ____________________________________ 2) ____________________________________ 3) ____________________________________ CONCLUSIÓN: Criterio:	22) Demostración de que **ΔABE ≅ ΔBCD**, si ΔABC y ΔBDE son equiláteros.  1) ____________________________________ 2) ____________________________________ 3) ____________________________________ CONCLUSIÓN: Criterio:

AC = CD Por ser **C** punto medio de AD. 1	**∠ACB = ∠DCE** Por ser opuestos por el vértice. 2
∠CAB = ∠CDE = 90° Ya que ABED es un rectángulo. 3	**BC = CE** Por ser **C** punto medio de **BE**. 4
∠BAC = ∠EDC Ya que ∆AFD es un triángulo isósceles. 5	**∠BCA = ∠ECD** Por ser un dato. 6
AC Es un lado común a los dos triángulos. 7	**AB = DE** Por ser lados opuestos de un rectángulo. 8

AB = DC

Por ser un dato.

9

BC = AD

Por ser un dato.

10

AC = DE

Porque **AE** está trisecado.

11

AD = AB

Por ser un dato.

12

∠BAC = ∠FED

Porque el ΔAPE es isósceles.

13

∠DAC = ∠BAC

Ya que **AC** es bisectriz del ∠DAB.

14

AB = EF

Ya que **AP = EP** el ΔAPE es isósceles y a iguales le restamos iguales.

15

∠ABC = ∠ADC

Porque el ΔABD es isósceles.

16

AB = AD

Porque el ΔABD es isósceles.

17

$\angle ACB = \angle ACD = 90°$

Ya que **AC** es una altura desde A.

18

AC = CE

Por ser un dato.

19

BC = DC

Por ser un dato.

20

$\angle CDE = \angle CBA = 90°$

Ya que **$AC \perp DE$** y **$AB \perp CE$**.

21

$\angle CAB = \angle DEC$

Ya que $DE \parallel AB$.

22

$\angle ACE$

Es común a los dos triángulos.

23

BC = EC

Ya que ΔCBE es isósceles.

24

∠ACB = ∠DCE

Porque tenemos un Δ isósceles y ángulos alternos internos entre paralelas.

25

∠ACD = ∠ACB

Ya que **AC** es bisectriz del ∠DCB.

26

BC = AD

Por ser lados opuestos de un paralelogramo.

27

AB = DC

Por ser lados opuestos de un paralelogramo.

28

∠BAC = ∠BED

Porque el ΔABE es isósceles.

29

AB = BE

Porque el ΔABE es isósceles.

30

∠ABC = ∠EBD

Porque el ∠ABE está trisecado.

31

∠EAC = ∠ACB

Por ser ángulos de un pentágono regular.

32

$\angle$EA = BC Por ser lados de un pentágono regular. 33	**$\angle BAC = \angle EDC$** Por ser ángulos de un pentágono regular. 34
DC = BC Porque el ΔBCD es isósceles. 35	**AB = DE** Por ser lados de un pentágono regular. 36
AB = BC Porque el ΔABC es equilátero. 37	**BE = BD** Porque el ΔBDE es equilátero. 38
$\angle ABE = \angle CBD = 60°$ Por ser ángulos de triángulos equiláteros. 39	