Matemáticas II.

Unidad 3. Elementos básicos de geometría plana.

PROPÓSITO DE LA UNIDAD

✍ *Al finalizar, el alumno:*
Comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás.

CONTENIDO

3.1 Bosquejo histórico de la Geometría.

3.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA PLANA: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.

3.3 CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS: Segmentos, ángulos, Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: Que pertenece a ella o fuera de ella, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, recta paralela a otra que pasa por un punto dado.

3.4 ÁNGULOS: Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano), Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice).

PRESENTACIÓN

Como se señala en los Programas de Estudio del CCH, el núcleo central del curso de matemáticas II lo constituye el estudio de la geometría euclidiana, que ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo a sus formas, dimensiones y propiedades. Contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más especializados.

En esta unidad damos inicio a este estudio, por tal motivo debe contemplarse la etapa de exploración, misma que permitirá el avance hacia la deducción y a la aplicación para establecer un equilibrio entre las dos tendencias de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato. Estas tendencias son un formalismo axiomático, mientras que la otra no trasciende la presentación mecanicista de hechos geométricos. Por ello, en esta unidad se pretende que el alumno explore, observe patrones de comportamiento, conjeture y comience a argumentar, para esto, **el desarrollo de cada subtema se basa en la totalidad de aprendizajes estipulados en el Plan de Estudios de Matemáticas II del Colegio de Ciencias y Humanidades**.

Este material pretende apoyar el trabajo de profesores y alumnos, y como tal, ofrece un conjunto de sugerencias de estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, y materiales de apoyo sobre cómo trabajar los contenidos estipulados en nuestro programa de estudios.
Al inicio de la unidad se sugieren varias actividades que permitirán reconstruir algunos conceptos de la geometría y revisar algunas de las propiedades básicas de las figuras geométricas, doblando papel al mismo tiempo que con regla y compás. Esto con el objetivo de que el alumno perciba los conceptos de dos formas diferentes, destacando el doblado de papel como una actividad que le lleve al estudiante a construir un aprendizaje más significativo.

Conceptos clave: Punto, segmento de recta, ángulo, perpendicularidad, triángulo y sus rectas notables, circunferencia.

3.1 BOSQUEJO HISTÓRICO DE LA GEOMETRÍA.

Estamos rodeados de diferentes formas, pequeñas, medianas y grandes, y varias de sus características son muy parecidas. Estás observaciones en la vida diaria pudieron haber conducido a los primeros seres humanos al concepto de curvas, superficies y sólidos. Muchas circunstancias en la vida humana, aún en la edad primitiva, condujeron a numerosos descubrimientos geométricos, pero, sin duda alguna la noción de distancia fue uno de los primeros conceptos geométricos descubiertos.

De esta manera se fue creando, inconscientemente, una geometría utilizada en un principio por el hombre para solucionar problemas geométricos concretos, que bien pudieron presentársele de manera aislada, sin conexión aparente entre unos y otros y, claro, también la pudo utilizar en la fabricación de objetos ornamentales y artísticos, esas manifestaciones artísticas y esos problemas concretos contribuyeron al surgimiento y al posterior desarrollo de la geometría. La geometría empezaba a volverse una ciencia.

Pero, ¿cuándo la inteligencia humana fue capaz de extraer de relaciones geométricas concretas una relación geométrica abstracta y general, que contenga a las primeras como casos particulares?

Realmente, no hay evidencias que permitan estimar el número de siglos que pasaron, antes que el hombre pudiera elevar la geometría al nivel de ciencia, pero todos los escritores e historiadores de la antigüedad que trataron este tema concuerdan unánimemente, con que en el valle del río Nilo, en el antiguo Egipto, fue donde la geometría empírica subconsciente se convirtió, por primera vez, en geometría científica. El famoso historiador griego Heródoto, enunció la tesis de la manera siguiente:

“Dijeron, también, que este rey dividió la tierra entre los egipcios, de modo que a cada uno le correspondiera un terreno rectangular del mismo tamaño, y estableció un impuesto que se exigía anualmente. Pero cuando el río invadía una parte de alguno, éste tenía que ir al rey y manifestar lo sucedido. El rey enviaba, entonces, supervisores quienes debían medir en cuanto se había reducido el terreno, para que el propietario pagara sobre lo que le quedaba en proporción al impuesto total que se había fijado. Ésta es mi opinión, comenta Heródoto, sobre el origen de la geometría que después pasó a Grecia.”

Posiblemente, esta afirmación de Heródoto, no es más que una simple transcripción de lo recogido por él en Egipto. Lo cierto es que los griegos nunca negaron este hecho.

Así pues, la tradición atribuye los principios de la geometría como ciencia, a las prácticas primitivas de la agrimensura en Egipto; la palabra geometría significa “medición de la tierra”. Aunque no se puede afirmar con seguridad, parece bastante acertado suponer que la geometría surgió de necesidades prácticas.

Pero no solo los egipcios contribuyeron al desarrollo de la geometría: los babilonios también trabajaron en la geometría empírica y resolvieron problemas prácticos.

Es interesante observar que, en la matemática egipcia y babilónica, no se encuentra un solo caso de lo que hoy se llama demostración. En lugar de una argumentación general, se encuentra una descripción detallada de un procedimiento aplicado a un caso particular. Unos cuantos siglos antes de Jesucristo, toda la sabiduría empírica acumulada por egipcios y babilonios, en especial las matemáticas, pasa a poder de los griegos; pero éstos, a diferencia de aquellos, pusieron gran empeño en concluir los hechos geométricos, no sólo de manera empírica, sino, primordial y casi exclusivamente, con base en razonamientos deductivos.

Fue Tales de Mileto, uno de los primeros pensadores griegos, que vivió hacia el año 600 A.C., quien llevó la geometría de Egipto a Grecia. Y si bien egipcios y babilonios, elaboraron los primeros conceptos geométricos, los griegos transformaron un considerable número de conocimientos particulares, no sistematizados y aproximados, en una disciplina rigurosa basada en la lógica.

Sea como sea, lo que sabemos hoy en día indica que la matemática mesopotámica estaba más desarrollada que la egipcia, y que su influencia en los primeros siglos de la cultura Helénica fue decisiva. De todas maneras, todas esas culturas tuvieron una gran interacción, y no hay duda de que, igualmente, todas las ideas tuvieron una gran difusión entre los griegos, que posteriormente las divulgaron por muchos países[1].

Es interesante observar que en toda la matemática prehelénica no se encontró un solo caso de lo que en la actualidad llamamos demostración lógica. En lugar de un argumento general hay simplemente descripciones paso a paso de algún proceso aplicado a casos numéricos particulares. Más allá de algunas consideraciones muy simples, las relaciones matemáticas empleadas por los egipcios y babilonios antiguos resultaron esencialmente de métodos de "tanteos", con el resultado de que muchas de sus fórmulas son incorrectas. En otras palabras, la matemática prehelénica fue algo más que un empirismo prácticamente factible, una colección de procedimientos empíricos que dieron resultados de suficiente aceptabilidad para las necesidades simples de aquellas civilizaciones antiguas. La matemática, y la geometría en particular, aparece como un estudio de laboratorio.

[1] Datos extraídos de http://www.euclides.org/menu/articles/article3.htm, donde puedes leer más.

El razonamiento empírico puede describirse como la formulación de las conclusiones que se basan en la experiencia y en la observación; no está contenido ningún entendimiento real, y el elemento lógico no aparece. El razonamiento empírico contiene a menudo manipulaciones pesadas con casos especiales, observación de coincidencias y el empleo frecuente de la analogía, la experiencia a una buena suposición, la experimentación considerable y los destellos de intuición.

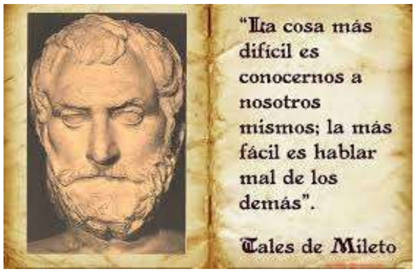
A pesar de la naturaleza empírica de la matemática prehelénica, con su desprecio completo de la demostración y la aparentemente pequeña atención que se pone a la diferencia entre verdad exacta y aproximada, uno, sin embargo, se asombra de la extensión y la diversidad de los problemas que se resolvieron con éxito. Evidentemente, gran parte de la verdad matemática elemental puede descubrirse por métodos empíricos cuando se complementa con experimentación extensa efectuada pacientemente durante largos períodos.

Los cambios económicos y políticos de los últimos siglos del segundo milenio a. de C. provocaron que el poder de Egipto y de Babilonia decayera, nuevas personas se pusieron al frente y sucedió que el desarrollo posterior de la geometría pasó a los griegos. El grado o la extensión de las aportaciones de la geometría griega a la geometría oriental antigua es difícil de estimar, y la trayectoria de transmisión de una a otra no ha sido descubierta hasta ahora satisfactoriamente. Los griegos transformaron la materia en algo bastante diferente del conjunto de conclusiones empíricas desarrolladas por sus predecesores, insistieron en que los hechos geométricos deben establecerse, no por procedimientos empíricos, sino por razonamiento deductivo; debe llegarse a conclusiones geométricas por demostraciones lógicas más bien que por experimentación de tanteos. La verdad geométrica debe obtenerse en el cuarto de estudio más bien que en el laboratorio. En breve, los griegos transformaron la geometría empírica o científica de los antiguos egipcios y babilonios en lo que ahora podría llamarse *geometría sistemática o matemática.* Es decepcionante que, a diferencia del estudio de la geometría antigua egipcia y babilónica, no existan virtualmente fuentes primarias para el estudio de la geometría

griega antigua. Estamos obligados a basarnos en los manuscritos y en los hechos que

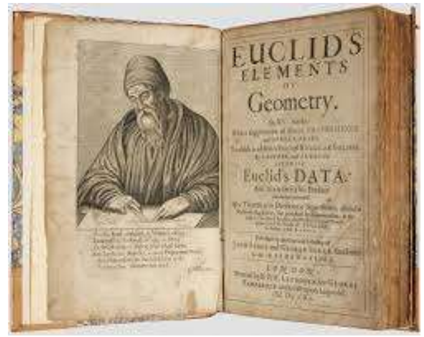
se tomaron en cuenta de varios cientos de años después de que se habían escrito los tratamientos originales. Nuestra fuente principal de información relacionada con la geometría griega muy antigua es la llamada *Sumario de Eudemo,* de Proclo. Este resumen contiene unas cuantas páginas del *libro I, Comentarios sobre Euclides* de Proclo, y es un esbozo muy breve del desarrollo de la geometría griega desde los tiempos primitivos hasta Euclides. Aunque Proclo vivió en el siglo V d.

de C., bastantes miles de años después del principio de la geometría griega, tenía aún acceso a varios trabajos históricos y críticos que ahora se nos han perdido excepto los fragmentos y alusiones conservados por él y otros. Entre estos trabajos perdidos se encuentra lo que evidentemente fue una historia completa de la geometría griega, que cubre el período anterior a 335 a. de C, escrito por Eudemo, alumno de Aristóteles. El *Sumario de Eudemo* también tiene ese nombre debido a que se admite que se basa en dicho trabajo primitivo. Según el *Sumario de Eudemo,* la geometría griega parece haber principiado en una forma esencial con el trabajo de Tales de Mileto en la primera mitad del siglo VI a. de C. Este genio de amplios conocimientos, declarado uno de los "siete hombres sabios" de la antigüedad, fue un fundador valioso de la geometría sistemática, y el primer individuo conocido a quien se le asocia la utilización de los métodos deductivos en la geometría.



El siguiente matemático griego sobresaliente mencionado en el *Sumario de Eudemo* es Pitágoras, a quien se le atribuye haber continuado con la sistematización de la geometría que empezó unos cincuenta años antes por Tales. Pitágoras nació en 572 a. de C. aproximadamente, en la isla de Samos, una de las islas del mar Egeo cerca de la ciudad de Mileto, donde nació Tales, y es bastante posible que haya sido su alumno, fundador de la celebrada escuela pitagórica, una fraternidad unida a ritos secretos y cabalísticos y costumbres, y se dedicó al estudio de la filosofía, matemática y ciencia natural. El aspecto deductivo de la matemática se piensa que ha sido considerablemente aprovechado y avanzado en los trabajos de los pitagóricos.

Empezaron a emerger cadenas de proposiciones en las que proposiciones sucesivas se dedujeron de las anteriores de la cadena. A medida que las cadenas aumentaron, y algunas se unieron a otras, se sugirió la idea global del desarrollo de toda la geometría en una sola cadena larga. Se sostiene en el *Sumario de Eudemo* que un pitagórico, Hipócrates de Chíos, fue el primero en intentar, al menos con éxito parcial, una presentación lógica de la geometría en la forma de una sola cadena de proposiciones basadas en unas cuantas definiciones y suposiciones iniciales. Hicieron mejores intentos León, Teudio y otros. Y luego, aproximadamente 300 a. de C. Euclides produjo el esfuerzo de su época, los *Elementos,* una sola cadena deductiva de 465 proposiciones claras y elegantes que comprende la geometría plana y del espacio, teoría de los números y álgebra geométrica griega. Desde su primera aparición este trabajo tuvo el máximo respeto, y sobrepasó tan rápida y completamente todos los esfuerzos anteriores. El efecto de este trabajo sobre el desarrollo posterior



de la geometría ha sido inmenso y difícil de superar, aunque, entre Tales en 600 a. de C. y Euclides en 300 a. de C. se desarrolló la noción de un discurso lógico como una sucesión de principios obtenidos por razonamiento deductivo de un conjunto de principios iniciales supuestos al principio del discurso. Efectivamente, si se va a presentar un argumento por procedimientos deductivos, cualquier principio del argumento tendrá que deducirse de principios previos o de principios del argumento, y dicho principio previo debe él mismo deducirse aun de principios o postulados más anteriores. Y para evitar un retroceso infinito, se fija, al principio de un argumento, una colección de principios primarios cuyas verdades sean aceptables al lector, y luego proseguir, puramente por razonamiento deductivo, a deducir todos los otros principios del discurso. Ahora bien, tanto los primarios como los principios deducidos del discurso son principios que se refieren a la materia técnica de dicho discurso, y por tanto contienen términos especiales o técnicos. Estos términos necesitan definirse. Como los términos técnicos deben definirse por medio de otros términos técnicos, y estos otros términos por medio aún de otros, uno se enfrenta con una dificultad semejante a la hallada con los principios del discurso.

Un argumento que se lleva a cabo según el plan anterior se dice actualmente que se desarrolla por *axiomática material.* En efecto, la contribución más sobresaliente de los antiguos griegos a las matemáticas fue la formulación del patrón de axiomática material y la insistencia de que las matemáticas deberían sistematizarse según este patrón. Los *Elementos* de Euclides es el ejemplo del desarrollo primitivo extenso del uso del patrón que se nos ha dado. En épocas más recientes, el patrón de la axiomática material ha sido generalizado muy significativamente para proporcionar una forma más abstracta del argumento conocido como *axiomática formal.* La axiomatización de la geometría culmino con la obra de D. Hilbert titulada “Grundlagen der Geometrie” publicada en 1899.

Videos complementarios: https://www.youtube.com/watch?v=GUSHCLgal10
https://www.youtube.com/watch?v=zdn8r-tPoCY
https://www.youtube.com/watch?v=a9U5-uu6_OI

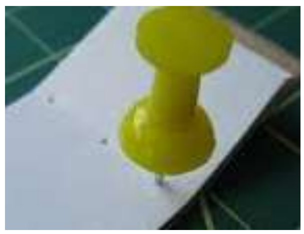
En este curso veremos los elementos básicos de la geometría, combinando las conceptualizaciones de Euclides y las actuales.

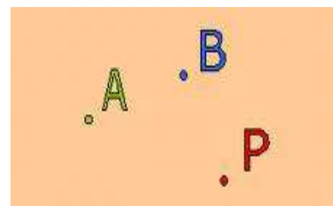
Ejercicios 3.1

Hacer un sumario sobre los orígenes de la Geometría Euclidiana con lo que has leído y consultando algunas otras páginas Web.

3.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA PLANA: PUNTO, LÍNEA RECTA, SEGMENTO, SEMIRRECTA, ÁNGULO, PUNTO DE INTERSECCIÓN, ETCÉTERA.

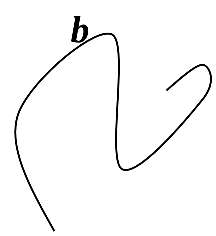
En los Elementos de Euclides los conceptos punto y línea recta se consideran conceptos “no definidos”, pero podemos dar una idea de lo que son, utilizando nuestro propio entorno donde se pueden hacer representaciones básicas de ellos. Por ejemplo: **Punto** es aquello que no tiene partes[1]. Se puede asociar con la punta de un alfiler o con el orificio que deja en una hoja de papel o con un granito de arena, recalcar que no tiene grosor. Notación: Los puntos se nombran con cualquier letra mayúscula.

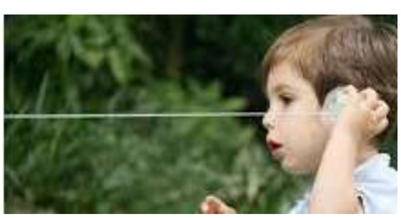


Línea es una longitud sin anchura[2]. Se puede representar como la marca que deja un lápiz en un papel, un hilo en cualquier posición, una cuerda de saltar, etc. Con la observación de que, como concepto matemático, no tiene principio ni fin.



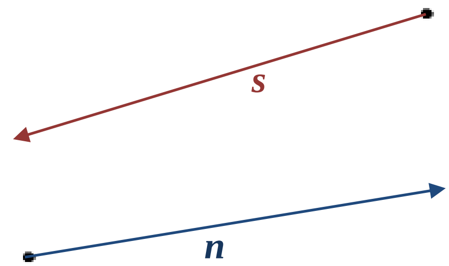



Línea Recta en los Elementos de Euclides “es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella”, es decir, es un conjunto de puntos colocados en una misma dirección. Se puede asociar con un hilo tenso, un rayo de luz, el dobles en una hoja de papel, etc. Notación: Toda línea se nombra con alguna letra minúscula.

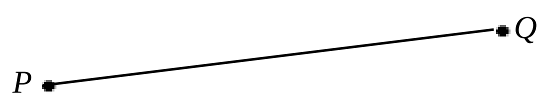



[2] Definición de los Elementos de Euclides, L-I

Semirrecta es cada una de las partes cuando una línea recta es dividida en dos. Es decir, toda semirrecta tiene un origen o inicio, pero no tiene fin. Se puede asociar con un rayo de luz, un rayo láser, etc. Notación: También se les nombra con alguna letra minúscula.

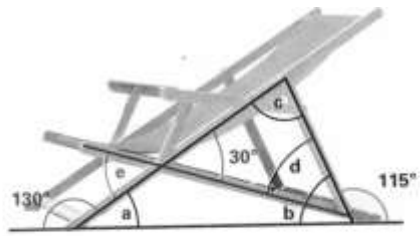


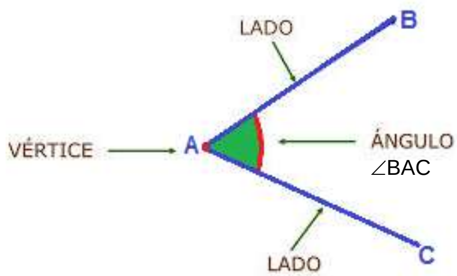
Segmento de línea recta es una porción de una línea recta limitada por dos puntos diferentes llamados extremos, es decir, tiene principio y fin. Se puede asociar con el filo de una mesa, el extremo de una puerta, etc. Notación: Se representa con las letras de sus puntos extremos. Así, dados dos puntos P y Q, la menor distancia posible entre esos dos puntos es el segmento de recta $\overline{PQ}$.

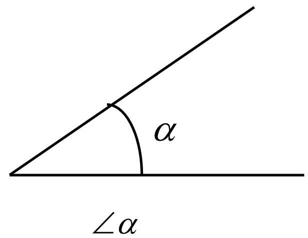


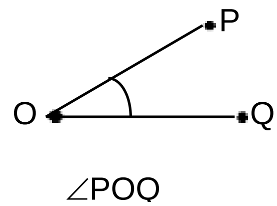
Ángulo es la figura formada por dos semirrectas que parten del mismo punto inicial. A las dos rectas se les denomina lados del ángulo y al punto inicial se le llama vértice del ángulo. Se puede asociar con la abertura que se forma entre dos piezas rectas como en el sillón o en una escalera. Notación: El símbolo del ángulo es $\angle$, y se nombra con alguna letra minúscula, con alguna letra griega o con sus tres letras mayúsculas donde la que se ubica al centro corresponde al vértice. Su medida es en grados.

NOTA: En esta etapa de estudio no le daremos mucha importancia a la dirección del ángulo.

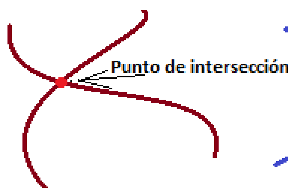


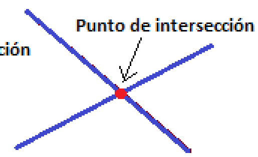






El **punto de intersección** es el lugar exacto donde se cortan por lo menos dos líneas, es decir, el punto de intersección se forma cuando se cortan por lo menos dos líneas.





Otros conceptos los iremos definiendo según los vayamos utilizando.

Puedes complementar con los videos:
http://es.slideshare.net/llunafran/geometra-a-nuestro-alrededor
https://www.youtube.com/watch?v=HhhF3BORh1E

Ejercicios 3.2

Escribe tres ejemplos de tu entorno para representar cada uno de los conceptos:

a) Punto b) Línea c) Línea Recta d) Segmento de recta e) Ángulo

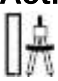
3.3 CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS: Segmentos, ángulos, perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: que pertenece a ella o fuera de ella, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, recta paralela a otra que pasa por un punto dado.

Este subtema lo trabajaremos en forma de taller, donde se desarrollaran varias actividades que permiten construir algunos conceptos de la geometría, y revisar algunas de las propiedades básicas de las figuras geométricas utilizando la regla y el compás, y al mismo tiempo doblando papel.

Materiales que necesitarás: Regla sin graduar, compás, una hoja de papel y lápiz.

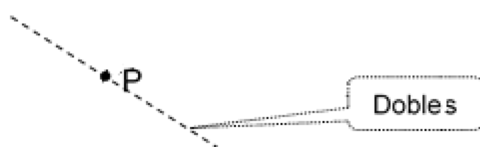
NOTA: En las actividades marcadas con  se realizan con regla y compás, y las marcadas con  se realizan doblando una hoja de papel.

Actividad 1: Línea Recta que pasa por un punto dado.

 En tu cuaderno marca un punto, y llámalo P. Con tu regla, traza una recta que pase por él.

¿Cuántas líneas rectas se pueden trazar por este punto? ________________________

 En la hoja de papel marca un punto en cualquier lugar, y llámalo P. Luego, marca un dobles recto que pase por el punto indicado.



¿Cuantos dobleces se pueden hacer? ____

Conclusión:
Por un punto pasan ______________________ de rectas.

Actividad 2: Línea Recta que pasa por dos puntos.

 En tu cuaderno marca un nuevo punto diferente a P, llámalo Q. Con tu regla traza una recta que pase por los dos puntos P y Q.

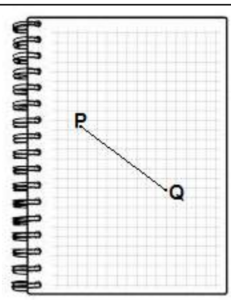
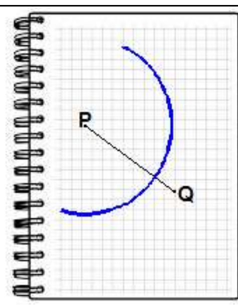
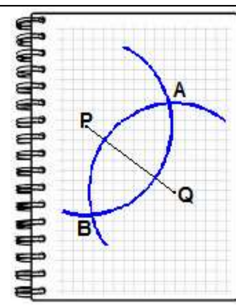
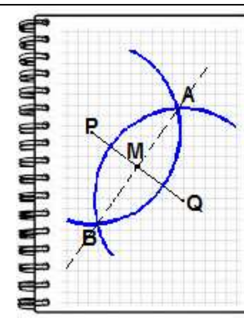
¿Podrías trazar otra recta diferente que pase por P y Q? ¿por qué? _______________
____

En la hoja de papel marca un nuevo punto diferente a P, llámalo Q. Luego, marca un dobles recto que pase por los dos puntos P y Q.
¿Podrías marcar otros dobleces rectos diferentes que pasen por P y Q? ¿por qué? __
____

Conclusión:
Por dos puntos diferentes pasa ____________________________ recta.

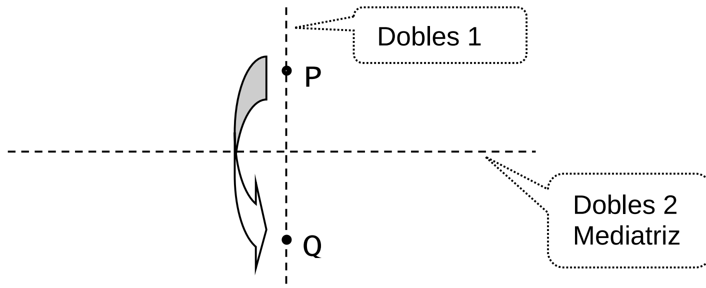
Actividad 3: Punto medio y mediatriz de un segmento de recta dado.

Punto medio de un segmento es el punto que lo divide en dos partes iguales.
Mediatriz es la línea recta que pasa por el punto medio de un segmento perpendicular a este.
Perpendicular es la recta que corta a otra formando un ángulo de 90°.
En tu cuaderno remarca el segmento $\overline{PQ}$, con tu regla y compás trazaras el punto medio de $\overline{PQ}$. Efectúa los siguientes procedimientos paso por paso.
Solución:

			
Segmento dado $\overline{PQ}$.	1º. Utilizando el compás, con centro en P lo abres una longitud *r* mayor que la mitad de $\overline{PQ}$ y traza un arco de circunferencia.	2º. Con el compás, ahora con centro en Q y con la misma abertura *r* traza otro arco de circunferencia que corte al arco anterior en dos puntos A y B.	3º. Traza la recta que pase por A y B, y el punto de intersección de ésta recta con $\overline{PQ}$ que es M, será el **punto medio** de $\overline{PQ}$. La recta que pasa por A y B se le llama **mediatriz** de $\overline{PQ}$.

En tu hoja de papel marca un dobles y sobre él marca los puntos P y Q. Ahora, con solo doblar el papel encuentra el punto medio entre P y Q.

Solución:
Se marca un segundo dobles haciendo coincidir los extremos P y Q, donde se intersecan ambos dobleces será el punto medio. El segundo dobles será la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, ya que es perpendicular y pasa por el punto medio de $\overline{PQ}$.

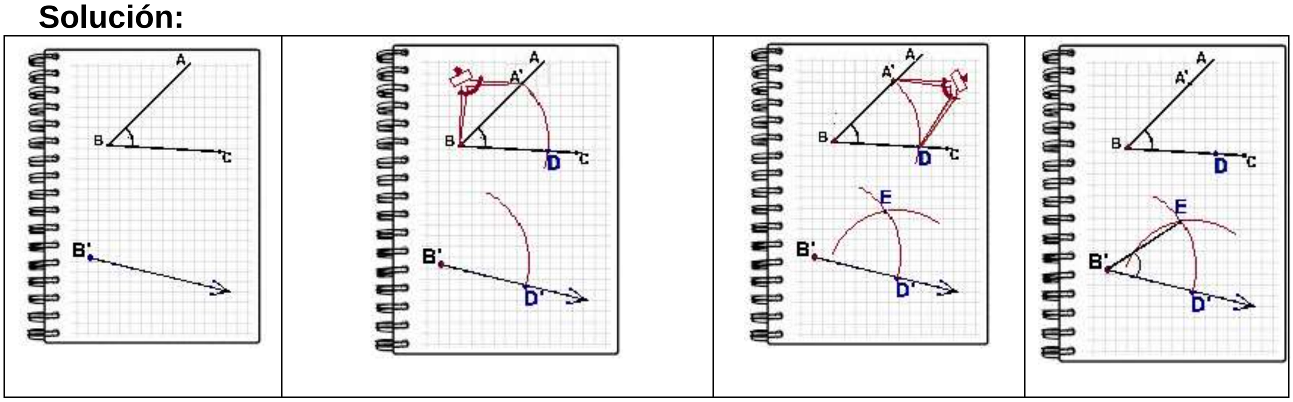


¿Por qué son perpendiculares los dobleces? ________________________________
____

Actividad 4: Ángulos de la misma medida.

En tu cuaderno dibuja un ángulo ∠ABC, traza con regla y compás otro ángulo que sea de la misma medida. Para hacerlo, efectúa los siguientes procedimientos paso por paso.

Solución:



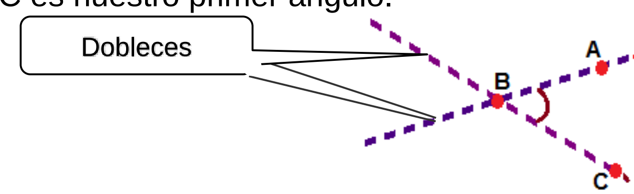
1º. Ya que trazaste un ángulo ∠ABC de cualquier medida, en otro lado de tu cuaderno traza una semirrecta con origen B**'**.	2º. Con centro en B abre un poco el compás y traza un arco de tal forma que corte a los dos lados del ángulo. Llama a los cortes A**'** y D. Con la misma abertura y centro en B**'** traza un nuevo arco de circunferencia que corte a la semirrecta en D**'**.	3º. Abre el compás desde A**'** hasta D. Con esa abertura y centro en D**'**, traza un segundo arco de circunferencia que corte al ya trazado. Asigna la letra E a esta intersección.	4º. Traza el segmento recto de B**'** a E. Entonces, m∠ABC = m∠EB**'**D**'** Donde m∠ significa medida del ángulo.

¿Cómo comprobarías que son congruentes, es decir, que tienen la misma medida? __
____

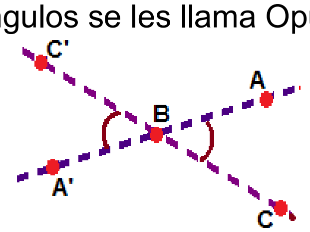
 En la hoja de papel marca con dobleces un ángulo ABC, y con sólo doblar la misma hoja, marca un ángulo que sea congruente al ∠ABC.

Antes de leer la solución, explica brevemente la forma en que lo harías. ___________
____
____
____

Solución: Un ángulo se forma haciendo dos dobleces que se crucen. Al punto donde se cruzan llámalo B, y elige un punto en cada dobles, llamarlos A y C, respectivamente. Así, ABC es nuestro primer ángulo.



El ángulo congruente más sencillo es usando los dobleces ya hechos y el mismo vértice B pero del lado opuesto, esto es, reflejando A y C con respecto a B y marca los puntos A**'**, C**'**, respectivamente, de tal forma que $\overline{AB} = \overline{BA'}$ y $\overline{BC} = \overline{BC'}$, entonces m∠ABC = m∠A'BC'. A estos ángulos se les llama Opuestos por el Vértice.



En la siguiente sección recordaremos la clasificación de ángulos.

Actividad 5: Bisectriz de un ángulo.

Bisectriz es la semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

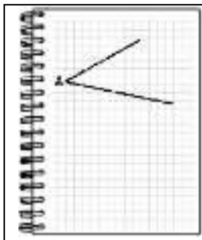
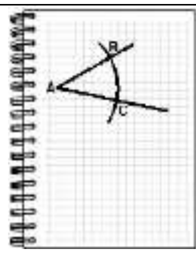
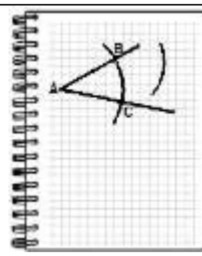
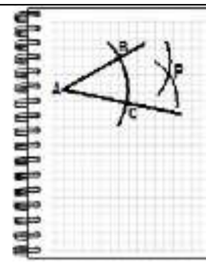
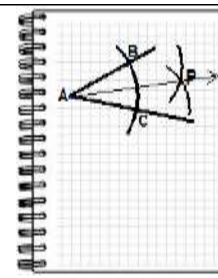
 Con regla y compás traza la bisectriz de un ángulo dado.
Antes de leer la solución, escribe los procedimientos para trazarla.

____

____

____

Solución:

				
En tu cuaderno traza un ángulo cualquiera, y asigna la letra A a su vértice.	1º. Con centro en A traza un arco de que corte a los dos lados del ángulo, llámalos B y C.	2º. Con centro en B, abre el compás una longitud cualquiera y traza un arco de circunferencia lo suficiente grande dentro del ángulo.	3° Con la misma abertura del compás y ahora con centro en C, traza otro arco de circunferencia que corte al arco anterior. Asigna la letra P al punto de intersección.	4º. Traza la semirrecta desde A y que pase por P, entonces $m\angle BAP = m\angle PAC$

 En la hoja de papel hacer un dobles que divida el ángulo ABC (antes formado en la actividad 4), en dos ángulos de igual medida.

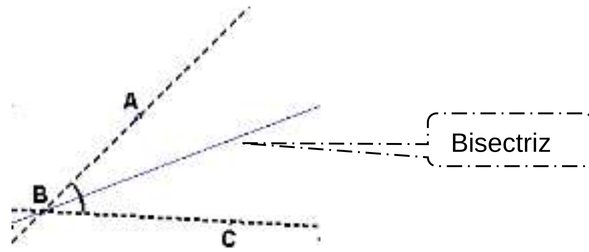
Antes de leer la solución, explica brevemente la forma en que lo harías. _____________

____

____

____

Solución:
Se hace un dobles de tal forma que haga coincidir al dobles que pasa por AB con el dobles que pasa por BC. A este nuevo dobles se le llama bisectriz del $\angle ABC$.



Actividad 6: Perpendicular a una recta dada que pase por un punto sobre ella.

 En tu cuaderno traza una línea recta cualquiera, y marca un punto P sobre ella. Con regla y compás traza una línea recta perpendicular a la recta antes trazada y que pase por el punto P.

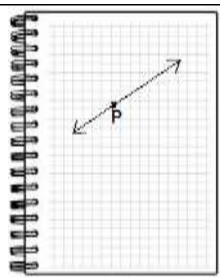
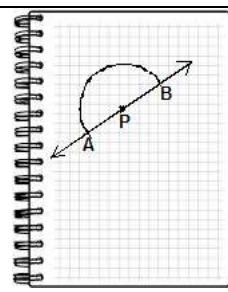
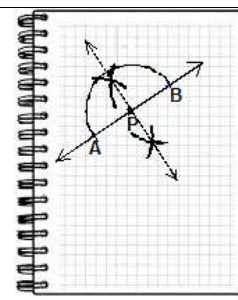
Antes de leer la solución, escribe los procedimientos para trazarla.

____

____

____

Solución:

		
Una recta y un punto P sobre ella.	1º. Se traza un arco de circunferencia con centro en P y que corte a la recta dada en A y B. PARA REFLEXIONAR: P es su punto medio, ¿por qué?	2º. Se traza la mediatriz del segmento AB siguiendo los pasos de la actividad 3. Al ser mediatriz, es perpendicular a la recta dada y pasa por P.

 En la hoja de papel hacer un nuevo dobles y elige un punto sobre este. Después, marca otro dobles que sea perpendicular al primero y que pase por el punto elegido.

Antes de leer la solución, explica brevemente la forma en que lo harías. ____________

____

____

____

Solución:
Se hace un dobles que represente una línea recta, marcamos un punto sobre este y lo llamamos P. A partir de P, se hace un segundo dobles de tal forma que el primer dobles coincida con si mismo.

PARA REFLEXIONAR:
a) ¿Cómo trazas una perpendicular a un segmento dado, que pase por el punto extremo del segmento? ________________________________

____

b) ¿Cómo trazas una perpendicular a un segmento dado, que pase por el punto medio del segmento? ________________________________

____

OBSERVACIÓN: La superposición de cuatro ángulos (al doblar una hoja dos veces), se observa que al desdoblar se forma un ángulo de 360º, hecho que confirma la perpendicularidad.

Actividad 7: Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto fuera de ella.

En tu cuaderno traza una recta cualquiera y marca un punto P fuera de ella. Con regla y compás trazar una perpendicular a la recta que pase por el punto P. Repite el proceso en este espacio y escribe los procedimientos para trazarla.

____
____
____
____
____
____
____
____

En una hoja de papel marca un nuevo dobles y elige un punto fuera de este. Después, marca otro dobles que sea perpendicular al primero y que pase por el punto elegido.

Explica brevemente la forma en que lo harías. ______________________

____
____
____

Actividad 8: Paralela a una recta dada que pase por un punto fuera de ella.

En este espacio o en tu cuaderno traza una recta cualquiera y marca un punto P fuera de ella. Con regla y compás traza una recta paralela a la recta que pase por el punto P. Escribe los procedimientos para trazarla.

Rectas paralelas son aquellas rectas en el mismo plano que por más que las prolongues en ambas direcciones, nunca se cortan.
Escribe los procedimientos para trazarla.

____
____
____
____
____
____
____
____

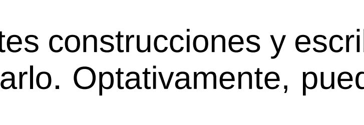
En una hoja de papel hacer un dobles y marca un punto fuera de este, llámalo P. Hacer otro dobles que sea paralelo al primero y que pase por el punto P.

Explica brevemente la forma en que lo harías ____________________________________
____
____
____
____

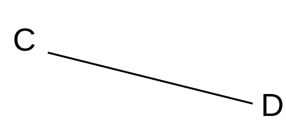
Ejercicios 3.3

I. Con regla y compás realiza las siguientes construcciones y escribe en cada caso los procedimientos que seguiste para realizarlo. Optativamente, puedes realizar algunos doblando papel.

1) Traza el punto medio del segmento AB.

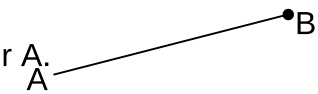


2) Traza la mediatriz del segmento CD.

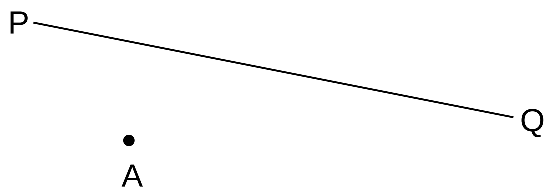


3) Traza la bisectriz del siguiente ángulo.

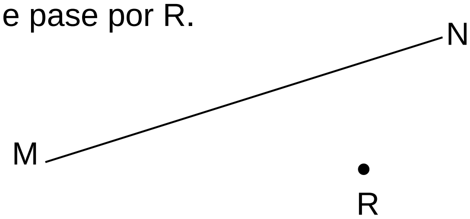
4) Traza una perpendicular al segmento AB que pase por B.



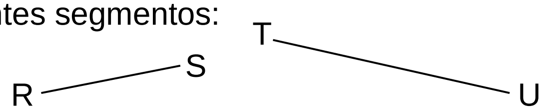
5) Traza una recta perpendicular al segmento PQ que pase por A.



6) Traza una recta paralela al segmento MN y que pase por R.



Dados los siguientes segmentos:



7) Construye un segmento de longitud $3\overline{RS}$.

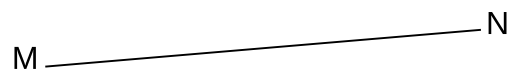
8) Construye un segmento de longitud $\frac{1}{2}\overline{TU}$.

9) Construye un segmento de longitud $\frac{3}{4}\overline{TU}$.

10) Construye un segmento de longitud $3\overline{RS} + \overline{TU}$.

11) Construye un segmento de longitud $2\overline{TU} - 2\overline{RS}$.

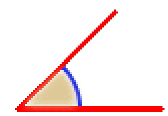
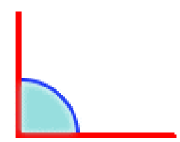
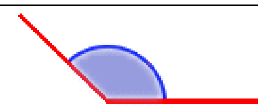
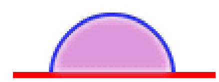
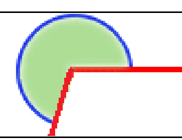
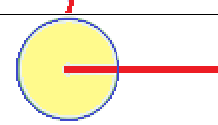
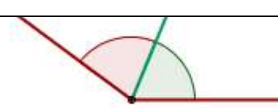
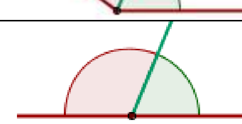
12) Trazar el punto que divide el segmento MN es ¾ partes.

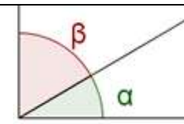
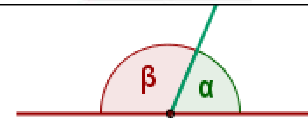
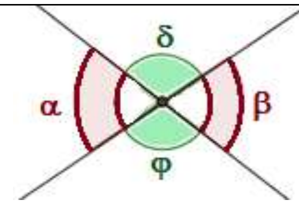


3.4 ÁNGULOS: Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano), clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice).

Recordemos la clasificación de los ángulos agrupados en la siguiente tabla.

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

SEGÚN SU MEDIDA	FIGURA GEOMÉTRICA
Agudo: Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 0° y menor que 90°.	
Recto: Es aquel cuya medida es 90°, se representa con la marca ∟.	
Obtuso: Es todo ángulo cuya medida es mayor de 90°, pero menor que 180°.	
Llano o Colineal: Es aquel cuya medida es 180°, es decir, dos ángulos rectos dan lugar a un Ángulo Colineal o Llano.	
Cóncavo o Entrante: Es todo ángulo cuya medida es mayor que 180°, pero menor que 360°.	
Perígonal o Completo: Es aquel cuya medida es de 360°.	
SEGÚN SU RELACIÓN CON OTROS ÁNGULOS	
Consecutivos: Son aquellos que tienen el vértice y un lado en común.	
Adyacentes: Son aquellos que tienen el vértice y un lado en común, y los otros lados situados uno en prolongación del otro. Forman un ángulo llano.	

Complementarios: Son dos ángulos cuya suma es de 90°. Es decir, $\alpha + \beta = 90^{\circ}$. No necesariamente son consecutivos.	
Suplementarios: Son dos ángulos cuya suma es de 180°. Es decir, $\alpha + \beta = 180^{\circ}$. No necesariamente son adyacentes.	
opuestos por el vértice: son los ángulos opuestos cuando se cortan dos líneas rectas, o también cuando los lados de uno de ellos, son prolongaciones de los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí, es decir, $\alpha = \beta$ y $\delta = \varphi$.	

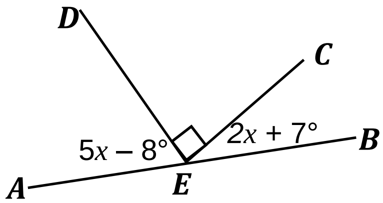
Ejemplos:
1) ¿Cuál es el complemento de un ángulo de 32º?
Solución:
Es 58º ya que 58º + 32º = 90º

2) Calcula la medida del $\angle A$ sí se sabe que mide 20° más que su suplemento.
Solución:
El suplemento del $\angle A$ es $(180^{\circ} - \angle A)$, como $\angle A$ es mayor que $(180^{\circ} - \angle A)$ en 20º, entonces se cumple $\angle A = (180^{\circ} - \angle A) + 20^{\circ}$.
Resolviendo, $2\angle A = 200^{\circ}$, es decir, $\angle A = 100^{\circ}$.

3) La medida de un $\angle B$ es 16° menos que la medida de su complemento. Encuentra la medida de $\angle B$.
Solución:
El complemento del $\angle B$ es $(90^{\circ} - \angle B)$, como $\angle B$ es menor que $(90^{\circ} - \angle B)$ en 16º, entonces se cumple $\angle B = (90^{\circ} - \angle B) - 16^{\circ}$, resolviendo, $2\angle B = 74^{\circ}$, es decir, $\angle B = 37^{\circ}$.

4) Si se sabe que $\angle M$ y $\angle N$ son suplementarios, encuentra el valor de x y el de los ángulos $\angle M$ y $\angle N$ si $\angle M = 7x - 12^{\circ}$ y $\angle N = 3x + 7^{\circ}$. Los ángulos están dados en grados.
Solución:
Como $\angle M + \angle N = 180^{\circ}$, entonces, $7x - 12^{\circ} + 3x + 7^{\circ} = 180^{\circ}$, resolviendo, $10x - 5^{\circ} = 180^{\circ}$.
Es decir, $x = 18.5^{\circ}$. Sustituyendo este valor en cada ángulo, $\angle M = 7(18.5^{\circ}) - 12^{\circ} = 117.5^{\circ}$ y $\angle N = 3x + 7^{\circ} = 3(18.5^{\circ}) + 7^{\circ} = 62.5^{\circ}$

5) Utilizando las propiedades de los ángulos, hallar el valor de x mostrada en la figura.



Solución:

$5x - 8^{o} + 90^{o} + 2x + 7^{o} = 180^{o}$, es decir:

$5x - 8^{o} + 2x + 7^{o} = 90^{o}$

Resolviendo: $7x - 1^{o} = 90^{o}$

$7x = 91^{o}$,

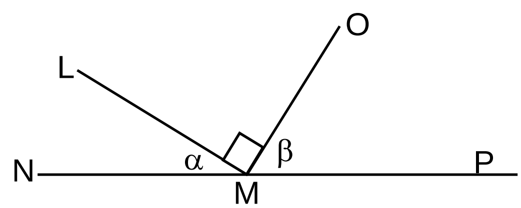
$x = 13^{o}$.

Ejercicios 3.4

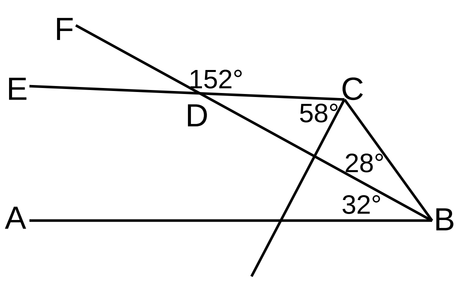
1) Con regla y compás trazar un ángulo de 45°.

2) Con regla y compás trazar un ángulo de 135°.

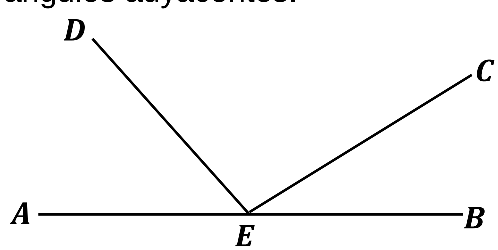
3) En la siguiente figura, ¿por qué los ángulos $\propto$ y β son complementarios?



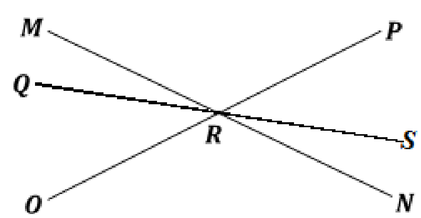
4) En la siguiente figura, indica un par de ángulos suplementarios y otro par de ángulos complementarios.



5) En la siguiente figura, indica dos pares de ángulos adyacentes.

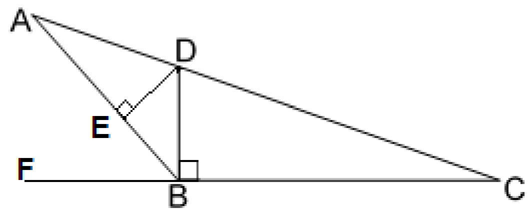


6) En la siguiente figura, indica sólo dos pares de ángulos opuestos por el vértice.



7) En la siguiente figura, localiza los siguientes ángulos:

a) Dos ángulos obtusos.
b) Un ángulo recto.
c) Un ángulo llano.
d) Un ángulo agudo en D.
e) Un ángulo agudo en B.



8) a) Hallar el complemento de 35°. b) Hallar el suplemento de 19°.

9) a) ¿Qué ángulo es igual a su complemento?
b) ¿Qué ángulo es el doble de su complemento?
c) El suplemento del ∠A es ocho veces el ∠A, ¿Cuánto mide el ∠A?
d) El suplemento de un ángulo x, es 5x, ¿cuál es el valor del ángulo?

10) Calcula la medida del ∠C sí se sabe que mide 50° más que su suplemento.

11) Si se sabe que ∠P y ∠Q son suplementarios, encuentra el valor de x y el de los ángulos P y Q si ∠P = 5x – 8° y ∠Q = 4x + 17°. Los ángulos están dados en grados.

12) La medida de un ángulo M es 36° más que la medida de su complemento. Encuentra la medida de $\angle M$.

13) ¿Cuál es la medida de dos ángulos complementarios si su diferencia es 16°?

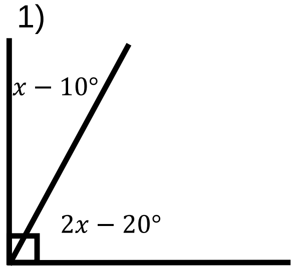
14) Si se sabe qué ∠L y ∠M son complementarios, encuentra el valor de x y el de los ángulos L y M si ∠L =10x + 7 y ∠M = 3x + 5. Los ángulos están dados en grados.

15) Si se sabe qué ∠A y ∠B son suplementarios, encuentra el valor de x y el de los ángulos A y B si ∠A = x^2 + 90° y ∠B = 6x + 35°. Los ángulos están dados en grados.

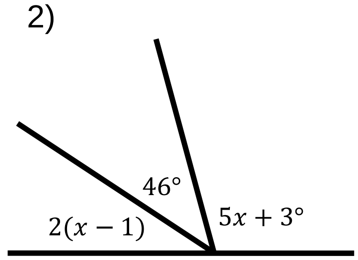
16) Si se sabe qué ∠C y ∠D son complementarios, y además ∠C = 2x – 9° y ∠D = 3x + 14°. Determina el valor de x y el de los ángulos C y D, recuerda que la medida de los ángulos es en grados.

III. Utilizando las propiedades de los ángulos, hallar el valor de x mostrado en cada figura.

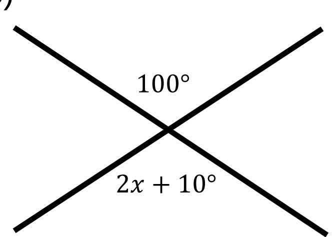
1)



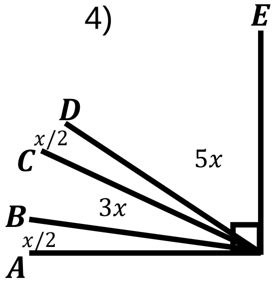
2)



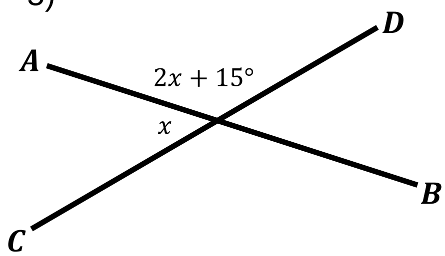
3)



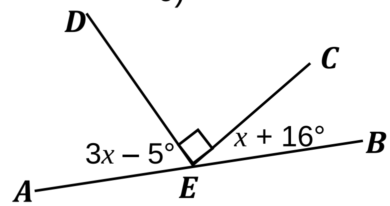
4)



5)



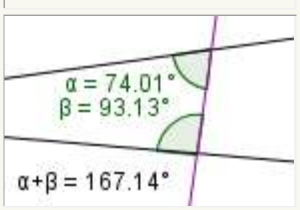
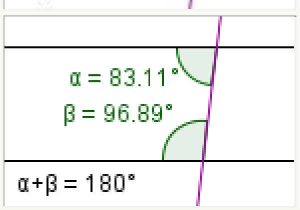
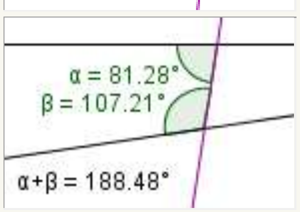
6)



3.4.1 Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes. Postulado de las rectas paralelas y su inverso.

El postulado de las paralelas es la denominación del quinto postulado de Euclides, que es la proposición geométrica indemostrable que afirma que, "*Dadas dos rectas y una transversal a ellas en un plano, si los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos rectos, entonces, al prolongar estas rectas ellas deberán intersecarse del lado de estos ángulos*".

En un lenguaje más simple: Dadas dos rectas cortadas por una transversal, si la suma de los ángulos interiores del mismo lado de la transversal suma menos que 180°, las dos rectas se encuentran o intersecan de ese lado. Pero, si la suma de los ángulos es igual a 180°, las dos rectas no se intersecan, es decir, son paralelas. Y si la suma de los ángulos es mayor que 180°, las dos rectas se intersecan en el lado opuesto de la transversal.

Casos del postulado paralelo		
Diagrama	**Suma de ángulos interiores**	**Comportamiento de las líneas…**
	$\alpha+\beta < 180°$	Las rectas se intersecan en el mismo lado que los ángulos interiores.
	$\alpha+\beta = 180°$	Las rectas no se intersecan. Las rectas son paralelas.
	$\alpha+\beta > 180°$	Las rectas se intersecan en el lado opuesto de la transversal.

Puedes usar un software dinámico para comprobar estas afirmaciones.

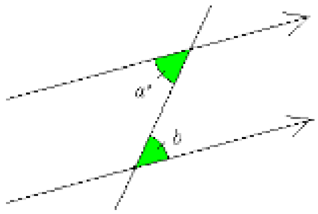
El quinto postulado de Euclides fue bastante polémico porque no parecía una proposición evidente. Muchos matemáticos lo consideraron un teorema e intentaron infructuosamente demostrarlo a partir de los otros cuatro. Desde el punto de vista de la historia de la matemática, el problema de la independencia del quinto postulado fue importante puesto que su supresión y sustitución por su negación dio lugar a las llamadas geometrías no Euclidianas.
Si la paralela por el punto exterior de una recta es única, se tiene la geometría Euclidiana; si no es única, entonces aparece la geometría de Lovachesky; y si no pasa ninguna, se origina la geometría Rimaniana. Las paralelas cortadas por transversales permiten determinar las medidas de los ángulos formados y las de los polígonos, al aplicar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Hay un gran número de propiedades geométricas que son equivalencias del quinto postulado, ya que dos propiedades son equivalentes si una implica la otra.
Algunas de las equivalencias del postulado de las rectas paralelas son:
- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos.
- Por un punto exterior a una recta dada sólo cabe trazar una paralela.
- Las rectas paralelas son equidistantes.
- Las rectas no equidistantes convergen en una dirección y divergen en la opuesta.
- Sobre una recta finita siempre se puede construir un triángulo semejante a un triángulo dado.
- Existe un par de triángulos no congruentes, pero semejantes.
- En todo cuadrilátero que contenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto.
- Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada.
- Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir un círculo que pase por todos ellos.
- No hay patrón métrico absoluto de longitud.

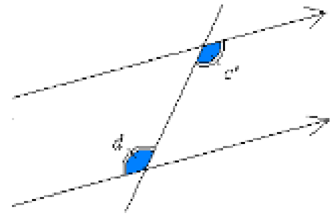
Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes.

La relación de rectas paralelas cortadas por una transversal o secante es muy importante en la Geometría ya que permite analizar una infinidad de problemas prácticos, así como definir algunos conceptos de interés en cuanto a congruencia y la igualdad entre ángulos. Esta relación es la siguiente.

➢ Los ángulos **ALTERNOS INTERNOS** entre paralelas son congruentes o iguales (en medida):

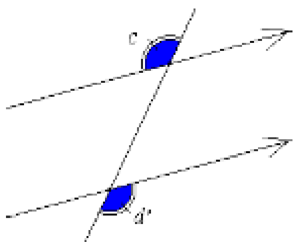


$\angle a' = \angle b$

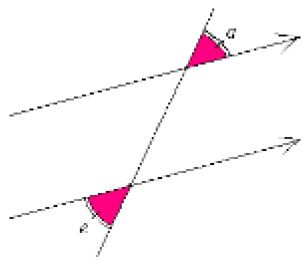


$\angle d = \angle c'$

- Los ángulos **ALTERNOS EXTERNOS** entre paralelas son congruentes o iguales (en medida):

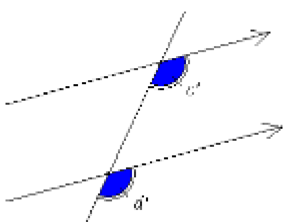


$\angle c = \angle d'$

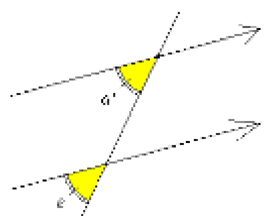


$\angle a = \angle e$

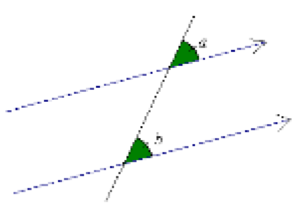
- Los ángulos **CORRESPONDIENTES** entre paralelas son congruentes o iguales (en medida):



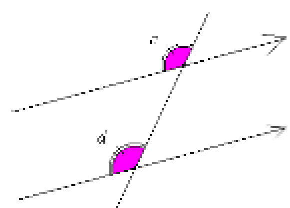
$\angle c' = \angle d'$



$\angle a' = \angle e$



$\angle a = \angle b$

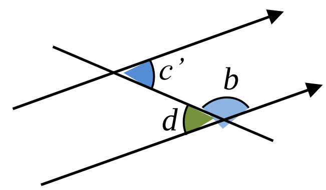


$\angle c = \angle d$

Puedes usar un *software dinámico* para verificarlo, puedes mover una recta para que NO sean paralelas, ¿Cómo son los ángulos alternos internos?, ¿Cómo son los ángulos alternos externos? ¿y los correspondientes?
Con esta actividad estarás trabajando con el **Inverso del postulado de las rectas paralelas.**

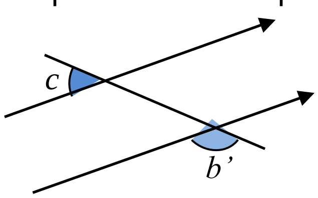
Otra afirmación importante de ángulos entre paralelas lo puedes abordar de la siguiente forma:

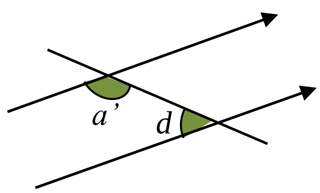
Actividad: Traza dos segmentos paralelos cortados por una transversal y asignar los nombres como se muestra en la figura.

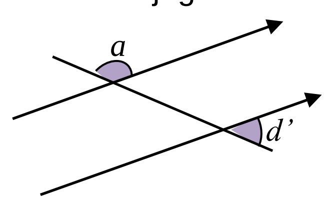


Contestar lo que se pide.
1) ¿Cómo son los ángulos c' y d? ________________.
2) ¿Por qué? __________________________________.
3) $\angle d + \angle b =$ ____________.
4) Por el paso 1, $\angle d =$ _____, sustituyendo en la afirmación del paso 3 se obtiene:
_____ $+ \angle b =$ ________
5) Se puede afirmar que los ángulos c' y b suman: ________________________

Los ángulos c' y b son llamados Ángulos Conjugados entre paralelas. De forma similar se puede mostrar que los siguientes pares de ángulos también son Conjugados:







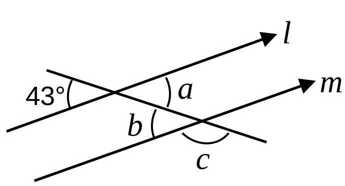
Conclusión:

Los ángulos Conjugados entre paralelas suman 180° (son suplementarios).

3.4.2 Problemas de aplicación.

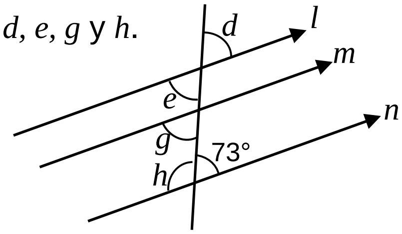
Con los siguientes problemas veremos cómo se usa lo antes aprendido.

Problema 1: Encuentra el valor de a, b y c. Si se sabe que las rectas l y m son paralelas.



Solución:
Paso 1. $\angle a = 43°$ por ser opuestos por el vértice.
Paso 2. $\angle b = \angle a = 43°$ por ser alternos internos entre paralelas.
Paso 3. Es claro que $\angle b + \angle c = 180°$.
Paso 4. Como $\angle b = 43°$, entonces $\angle c = 137°$.

Problema 2: En la siguiente figura, encuentra el valor de d, e, g y h.
Si se sabe que las rectas l, m y n son paralelas.

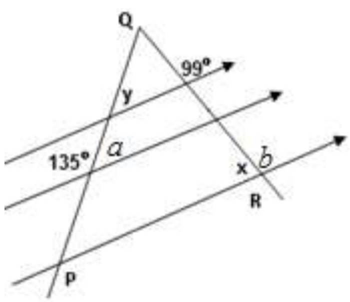


Solución:
Paso 1. $\angle h$+73°=180° por ser suplementarios, entonces $\angle h$ = 107°.
Paso 2. $\angle g$ = 73° por ser alternos internos entre paralelas.
Paso 3. $\angle g = \angle e$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle e$ = 73°.
Paso 4. $\angle d = \angle e$ por ser opuestos por el vértice, entonces $\angle d$ = 73°.

De forma similar, trabajemos los siguientes problemas, completa las afirmaciones.

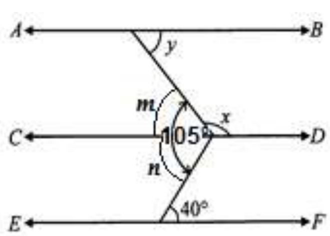
En cada ejercicio encuentra el valor de x y el de y, recuerda que las flechas en la misma dirección, indican que las rectas son paralelas.

Problema 3:



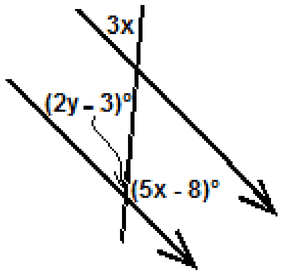
Solución:
Nos auxiliaremos con los ángulos $\angle a$ y $\angle b$.
Paso 1. $\angle a$ = ____° por ser suplementario de 135º.
Paso 2. y = $\angle a$ = ____° por ser ___________ entre paralelas.
Paso 3. $\angle b$ = 99º por ser _____________ entre paralelas.
Paso 4. x =____º por ser ______________ del $\angle b$.
Así, la medida de x = ____º y la de y = ____º.

Problema 4:



Solución:
Nos auxiliaremos con los ángulos $\angle m$ y $\angle n$.
Paso 1. $\angle m + \angle n$ = ____° por dato.
Paso 2. $\angle n$ = ____° por ser alterno interno entre paralelas.
Paso 3. Entonces, $\angle m$ = ____º por el paso 1.
Paso 4. x =____º por ser ________________ del $\angle m$.
Paso 5. y = _____ º por ser _______________ entre paralelas.
Así, la medida de x = ____º y la de y = ____º.

Problema 5:



Solución:

Paso 1. ∠(2y-3)°= ∠3x por ser correspondientes entre paralelas.

Paso 2. ∠(2y-3)° + ∠(5x-8)° = ____° por ser _______________.

Paso 3. Sustituyendo el valor del ∠(2y-3)° del paso 1 en la ecuación del paso 2, tenemos ∠_____ + ∠(5x-8)° = ______°.

Paso 4. Resolviendo la ecuación, resulta x =____º

Para complementar esta parte, puedes ver los videos en las siguientes páginas web:

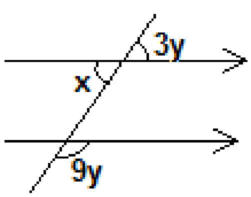
https://www.youtube.com/watch?v=fQUyVl_A-wc (8:27)

https://www.youtube.com/watch?v=f7yGqMXkmzY (5:17)

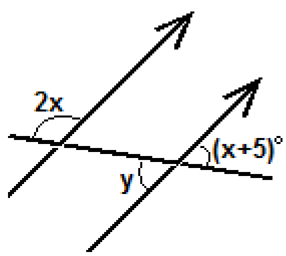
Ejercicios 3.4.2

En cada ejercicio encuentra el valor de *x* y el de *y*, recuerda que las flechas en la misma dirección, indican que las rectas son paralelas.

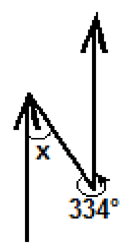
1)



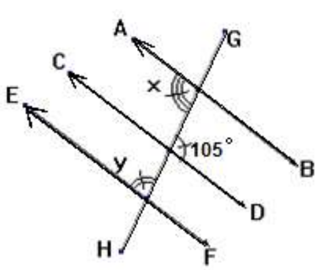
2)



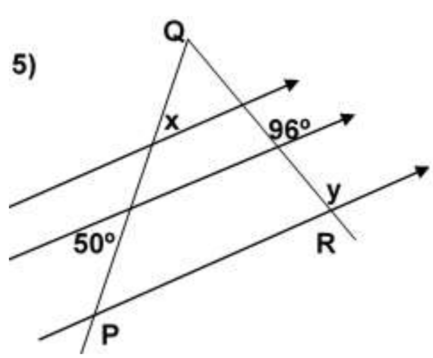
3)



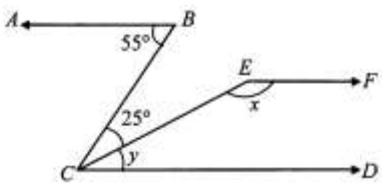
4)



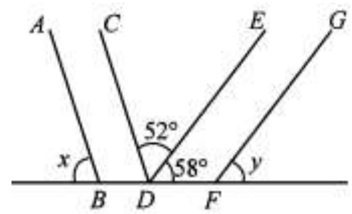
5)



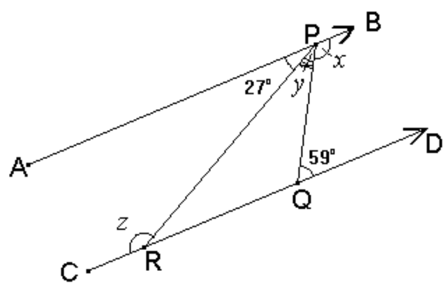
6)



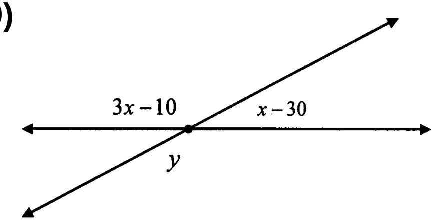
7)



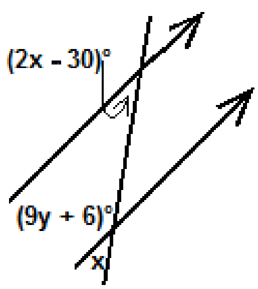
8)



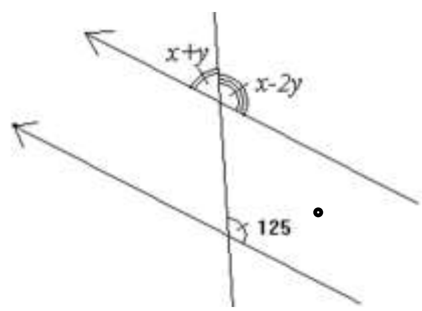
9)



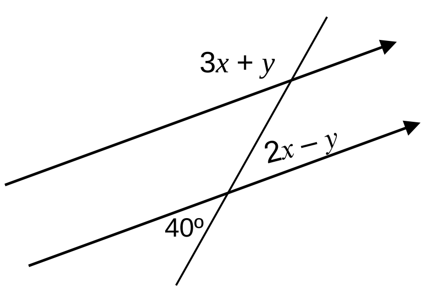
10)



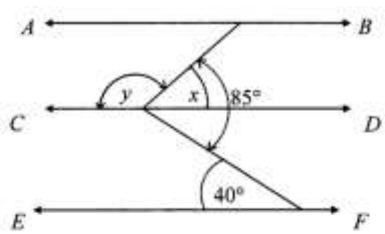
11)



12)



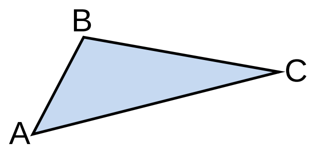
13)



3.5 TRIÁNGULOS: desigualdad del triángulo y la clasificación de los triángulos.

Un **triángulo** es una figura rectilínea comprendida entre tres líneas rectas[3], comúnmente definido como un polígono de tres lados.

Por lo general, para representar un triángulo se utiliza el símbolo ∆ seguido de tres letras mayúsculas que representan cada una a los vértices de dicho triángulo. Así, ∆ABC designa al triángulo:



Actividad 1: En tu cuaderno traza 4 triángulos cuyas medidas son las siguientes:

a) ∆ABC: Con AB = 12 cm, BC = 13 cm y AC = 5 cm

b) ∆DEF: Con DE = 6 cm, EF = 8 cm y DF = 8 cm.

c) ∆GHI: Con GH = 5 cm, HI = 7 cm y GI = 2 cm.

d) ∆PQR: Con PQ = 9 cm, QR = 4 cm y PR = 3 cm.

Sugerencia para el trazo de los triángulos.
Para el ∆ABC se procede de la siguiente forma:
1º) Se traza el lado mayor BC = 7 cm.
2º) Se abre el compás AB = 5 cm y con centro en B se traza un arco lo suficientemente grande.
3º) Se abre el compás AC = 3 cm y con centro en C se traza otro arco que corte al anterior.
4º) Con la regla se trazan los segmentos AB y AC, y se obtiene el ∆ABC.

a) Dadas cualesquiera tres medidas, ¿siempre puedes construir un triángulo? ________

b) ¿Cuál sería la condición para poder formar un triángulo? ______________________

____

Desigualdad del triángulo: En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante[4]. O dicho de otra forma, la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado[5].

Los triángulos se pueden clasificar de dos formas: de acuerdo a sus lados y de acuerdo a sus ángulos.

[3] Definición 19 de los elementos de Euclides, L1.
[4] Proposición 20 de los elementos de Euclides, L1.
[5] Clemens et al, p.244

De acuerdo a sus lados, los triángulos se clasifican en[6]:

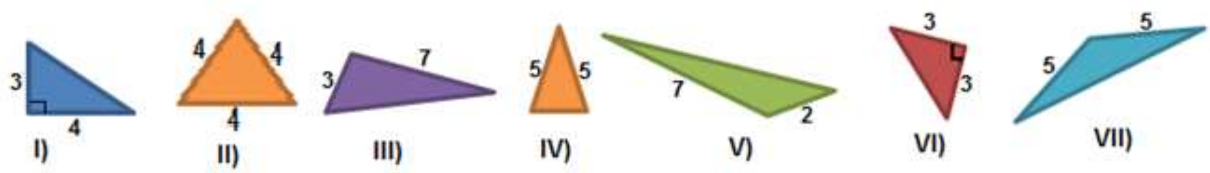
- **equilátero** cuando tiene **los tres lados iguales**.
- **isósceles** cuando tiene **sólo dos de sus lados iguales**.
- **escaleno** cuando **sus tres lados son desiguales**.

De acuerdo a sus ángulos, los triángulos se clasifican en[7]:

- **acutángulo** es el que tiene **sus tres ángulos** (interiores) **agudos**.
- **rectángulo** es el que tiene **un ángulo recto**.
- **obtusángulo** es el que tiene **un ángulo obtuso**.

Ejercicios 3.5

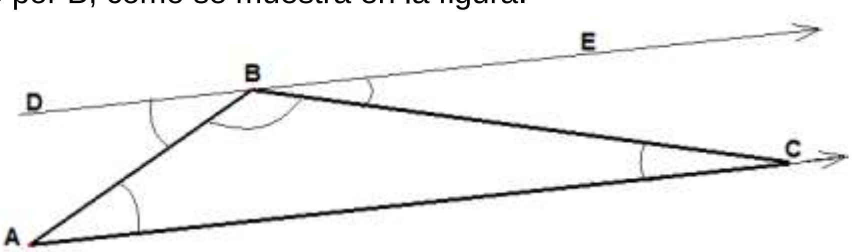
Clasifica cada triángulo colocando el inciso correspondiente en la siguiente tabla:



EQUILÁTERO	ISÓSCELES	ESCALENO	ACUTÁNGULO	RECTÁNGULO	OBTUSÁNGULO

3.5.1 Propiedades del triángulo: La suma de los ángulos interiores es igual a 180º; la suma de los ángulos exteriores es igual a 360º; la suma de dos ángulos interiores es igual al exterior no adyacente.

Actividad 2: Trazamos un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, y trazamos una paralela al lado AC que pase por B, como se muestra en la figura.



1) El $\angle DBA = \angle$_____ ya que son ______________________

[6] Definición 20 de los Elementos de Euclides, L1.

[7] Definición 21 de los Elementos de Euclides, L1.

2) El ∠EBC = ∠_____ ya que son _______________________

3) Es claro que ∠DBA + ∠EBC + ∠ABC = _______

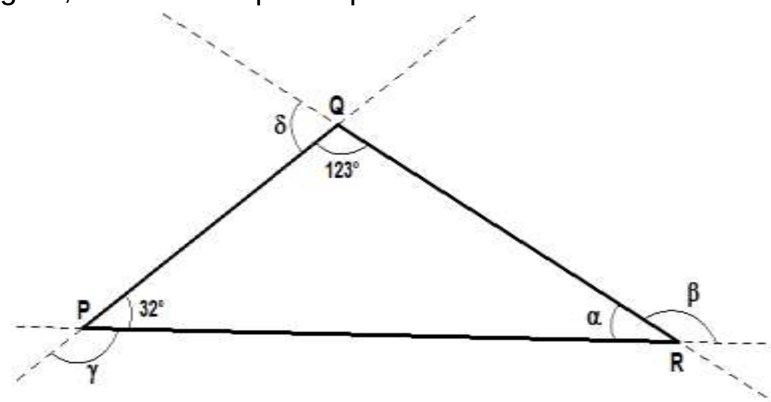
4) Sustituyendo los valores de los pasos 1 y 2, tenemos:

∠BAC + ∠ACB + ∠ABC = _______

¿Qué concluyes de esta actividad?

Conclusión 1: ____
____

Actividad 3: Usando la siguiente figura, contesta lo que se pide:



a) Por la propiedad de la suma de los ángulos interiores en todo triángulo, el ∠α = _____°

b) ∠β = _____° por ser suplemento del ∠α.

c) ∠δ = _____° por ser suplemento de _____

d) ∠γ = _____° por ser suplemento de _____

Conclusión 2: ∠β + ∠δ + ∠γ = ______° y son los tres ángulos exteriores del ΔPQR. Es decir, la suma de los tres ángulos exteriores en un triángulo es de ______°.

Se puede demostrar que esta 2ª conclusión se cumple en todo triángulo en el plano.

Actividad 4: Usando la figura de la actividad 3, contesta lo que se pide:

a) El ∠QPR = 32° y ∠PQR = 123°, su suma es igual al ∠_______.

b) 32° + ∠α = _____° = ∠____

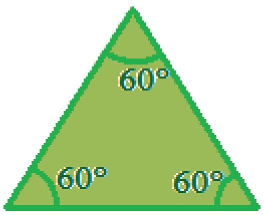
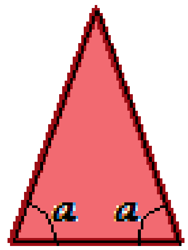
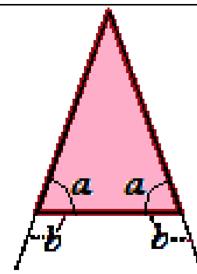
c) 123° + ∠α = _____° = ∠____

Conclusión 3: La suma de dos ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo _
____.

Se puede demostrar en general que esta conclusión se cumple en todo triángulo.

Otras propiedades del triángulo equilátero y del isósceles son:

1) En todo triángulo equilátero sus tres ángulos son iguales y cada uno mide 60°.	2) Si en un triángulo dos ángulos son iguales, entonces los lados opuestos a los ángulos	3) En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales y, si los lados iguales se alargan, los ángulos

	iguales también son iguales uno al otro, es decir, el triángulo es isósceles.	situados bajo la base serán iguales entre sí.
		

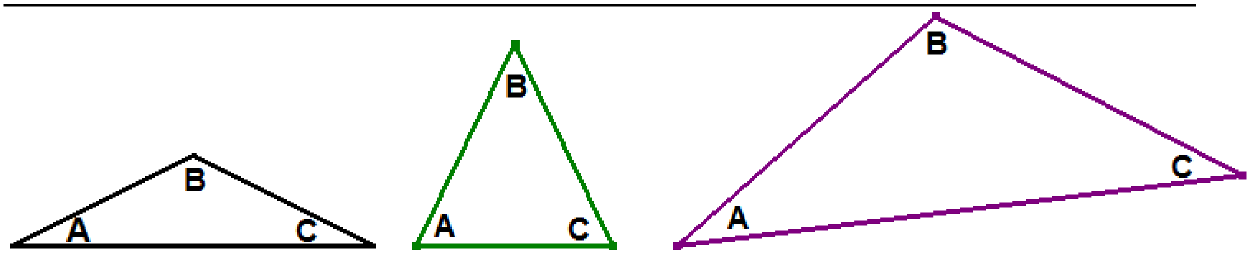
Para complementar esta parte puedes ver el video en la siguiente dirección: https://www.youtube.com/watch?v=yefIa5e1U1Q

3.5.2 Propiedades de un triángulo isósceles:

Para que puedas comprobar algunas de las propiedades en un triángulo isósceles, lee y ve contestando las siguientes actividades.

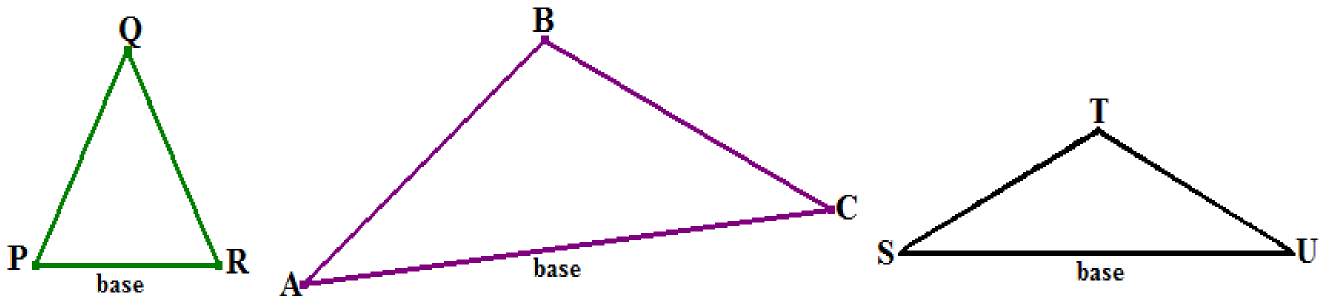
- **Los ángulos adyacentes a la base son iguales.**

Actividad 1. Los siguientes triángulos son isósceles, con cuidado recórtalos y une el vértice A con el C. ¿Qué observas de los ángulos en estos vértices? _______________
____.



- **La altura y la mediana de la base coinciden.**

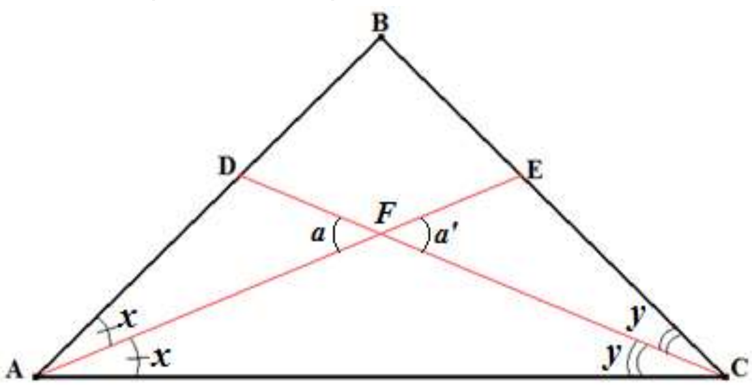
Actividad 2. En cada uno de los siguientes triángulos isósceles, traza con color rojo la altura a la base marcada, y de color azul traza la mediana a la misma base.



¿Qué sucede con la altura y la mediana? ________________________________.
____.

- **La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes en un triángulo isósceles, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.**

Actividad 3. El siguiente ΔABC es isósceles, con AB = BC, entonces ∠BAC = ∠BCA. AE es bisectriz del ∠BAC y CD es bisectriz del ∠BCA.
Tenemos que mostrar que ∠ADF = ∠FEC



Solución:
Al ser AE bisectriz del ∠BAC lo divide en dos ángulos iguales llamados x, de forma similar, el ∠BCA está dividido en dos ángulos iguales llamados y, ya que CD es ________________________.

Como AB = BC entonces ∠BAC = ∠BCA, es decir $\angle x = \angle y$.

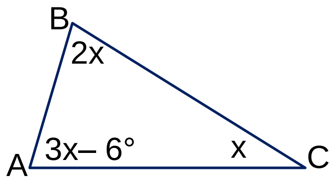
En el ΔADF se cumple $\angle x + \angle a$ + ∠ADF = ________
En el ΔCEF se cumple $\angle y + \angle a'$ + ∠FEC = ________
Como ambas sumas miden lo mismo, entonces son iguales, es decir, $\angle x + \angle a$ + ∠ADF = $\angle y + \angle a'$ + ∠FEC, restando los ángulos iguales $\angle x = \angle y$ en ambos lados tenemos: $\angle a$ + ∠ADF = $\angle a'$ + ∠FEC, pero $\angle a = \angle a'$ por ser ________________________
Restándolos en ambos lados, finalmente obtenemos ____________________.

Conclusión: En un triángulo isósceles, la bisectriz de cada ángulo igual, ___________
____

3.5.3 Problemas de aplicación.

Resolveremos algunos problemas donde usaremos las propiedades antes vistas.

Problema 1: En la siguiente figura encontrar el valor de los ángulos interiores del ΔABC.

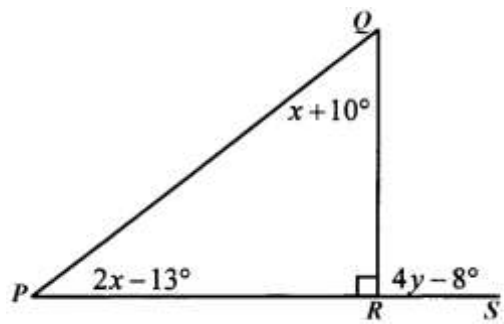


Solución:
Sabemos que la suma de las medidas de los tres ángulos interiores es ____________.
En símbolos: $\angle(3x - 6°) + \angle 2x + \angle x =$ _______.

Resolviendo la ecuación: $6x =$ ________, es decir $x =$ ________
Entonces, $\angle C =$ _______, $\angle B =$ _______ y $\angle A =$ ________

Problema 2: En el ΔPQR, ¿cuánto mide el ángulo x y cuánto él ángulo y?

Solución:
$\angle(2x - 13°) + \angle(x + 10°) =$ ____, ya que _________
____
Resolviendo la ecuación se obtiene $\angle x =$ _______.
$\angle(4y - 8°) + 90° =$ ______, por ser _________________
Resolviendo la ecuación se obtiene $\angle y =$ _______.



Ejercicios 3.5.3
I. En cada caso, se dan las medidas de tres segmentos, menciona si con estos se puede formar un triángulo. Además, indica qué tipo de triángulo se forma con estas medidas.

1) 7, 7, 8	2) 12, 8, 4	3) 20, 15, 10	4) 5, 8, 15
5) 6, 3, 2	6) 4, 11, 5	7) 125, 36, 84	8) 26, 45, 220

9) Las longitudes de dos lados de un triángulo son 6 y 11 cm. Menciona un conjunto de posibles longitudes para el tercer lado de tal forma que SI se pueda formar el triángulo.

10) En el ejercicio 9), menciona un conjunto de posibles longitudes para el tercer lado de tal forma que NO se pueda formar el triángulo.

11) Con regla y compás trazar un triángulo equilátero.

12) Con regla y compás trazar un triángulo rectángulo.

13) Con regla y compás trazar un triángulo con un ángulo interior de 120°.

14) Con regla y compás trazar un triángulo con un ángulo interior de 45°.

15) Con regla y compás trazar un triángulo con un ángulo interior de 105°.

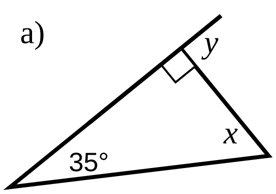
16) Con regla y compás construye un triángulo cuyos ángulos interiores sean de 90°, 75° y 15°.

17) Dado un segmento AB = 7 cm trazar un triángulo cuyos ángulos sean de 30°, 60° y 90°, para el cual dicho segmento sea el cateto que se opone al ángulo de 60°.

18) Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar con regla y compás otra recta que pase por el punto y forme con la primera recta un ángulo de 30°.

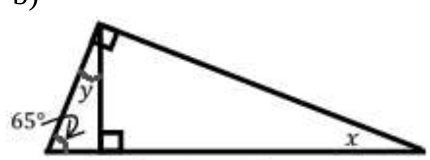
II. Usando las propiedades de los triángulos y de ángulos, en cada caso encuentra lo que se pide.

a)



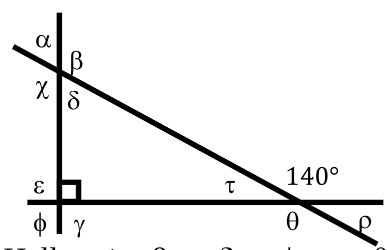
Hallar $\angle x$, $\angle y$

b)



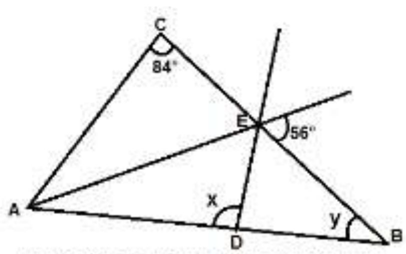
Hallar $\angle x$, $\angle y$

c)



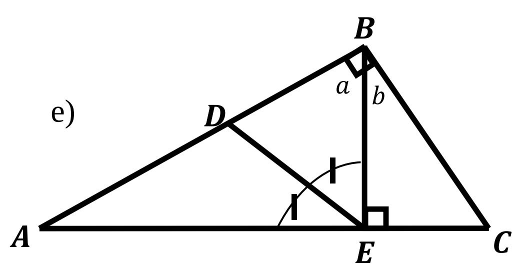
Hallar $\angle \alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi, \gamma, \tau, \theta, \rho$

d)



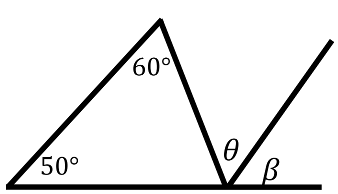
AE bisectriz del ∡CAB, ED bisectriz del ∡AEB.
Hallar el valor de x y de y.

e)



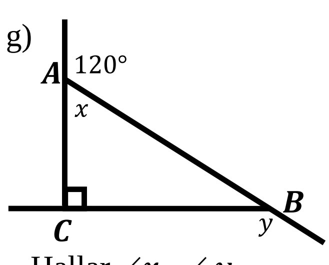
$Si\ \angle b = 42°$. Hallar $\angle a$; $\angle AEB$; $\angle CED$

f)



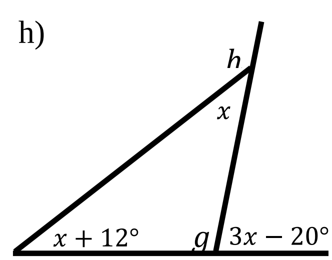
$\angle\theta \cong \angle\beta$. Hallar $\angle\theta$

g)



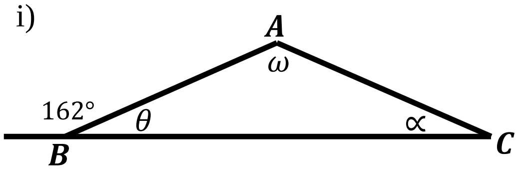
Hallar $\angle x$, $\angle y$

h)



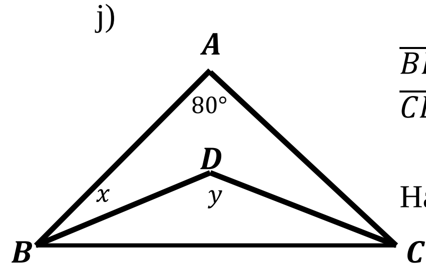
Hallar $\angle g$, $\angle h$.

i)



$\overline{AB} = \overline{AC}$. Hallar $\angle\omega$, $\angle\propto$.

j)



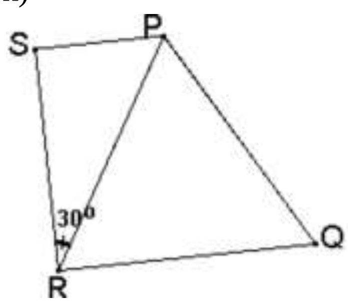
$\overline{BD}$ bisectriz del $\angle ABC$

$\overline{CD}$ bisectriz del $\angle ACB$

$\overline{AB} = \overline{AC}$

Hallar $\angle x$, $\angle y$

k)



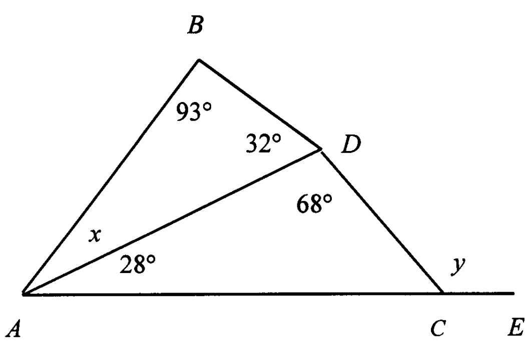
1) Si RQ es perpendicular a SR, ¿Cuánto mide $\angle$PRQ?

2) Si RQ = PQ, ¿cuánto mide $\angle$RPQ?

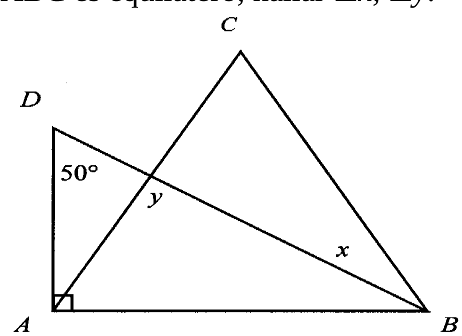
3) ¿Cuánto mide $\angle$ PQR?

4) ¿Qué tipo de triángulo es PQR?

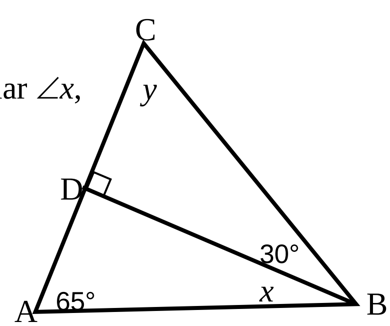
l) Hallar $\angle x$, $\angle y$.



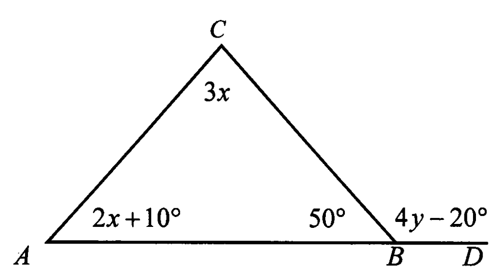
m) El ΔABC es equilátero, hallar $\angle x$, $\angle y$.



n) Hallar $\angle x$,



p) Hallar $\angle x$, $\angle y$.



3.5.4 Rectas y puntos notables en el triángulo: Mediatriz, bisectriz, mediana y altura; circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro. Construcción de las rectas y puntos notables.

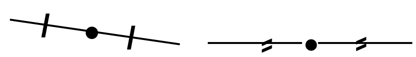
Sugerencia: Para las siguientes actividades, el profesor puede trazar un triángulo cualquiera en el cuaderno de cada alumno.

Actividad 1. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno (llámalo PQR) y en cada uno de sus lados traza su **mediatriz**.

RESULTADO: Las tres **mediatrices** se cortan en un punto llamado **Circuncentro**.

Como todos trabajan en triángulos diferentes, las 3 mediatrices se cortan en un sólo punto que puede estar dentro o fuera del triángulo.

PARA REFLEXIONAR: ¿Es necesario el trazo de las tres mediatrices para encontrar el Circuncentro?

Para que el alumno identifique las propiedades de las rectas notables, se le pide que marque la figura  para los ángulos rectos y para los segmentos iguales marcarlos con una o dos "rayitas" de la siguiente forma: 

Actividad 2. Con centro en el **Circuncentro** abrir el compás hasta cualquier vértice del triángulo y trazar una circunferencia.

RESULTADO: A este círculo se le llama **círculo circunscrito**. El cual permite comprobar si el trazo de las mediatrices está bien hecho.

Actividad 3. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno (llámalo ABC) y en cada uno de sus ángulos interiores traza su **bisectriz**.

RESULTADO: Las tres bisectrices se cortan en un punto llamado **Incentro**.

Al igual que en la actividad 1, todos trabajaron en triángulos diferentes, donde las 3 bisectrices se cortan en un sólo punto dentro del triángulo. Por otra parte, para encontrar el **Incentro** basta con trazar dos de sus bisectrices.

Actividad 4.

a) Con regla y compás, desde el **Incentro** traza una recta perpendicular a cualquier lado del triángulo, llamar Q al punto donde la perpendicular corta al lado elegido.

Este trazo debe de realizarse cuidadosamente porque se usará como radio para trazar la circunferencia en la siguiente actividad.

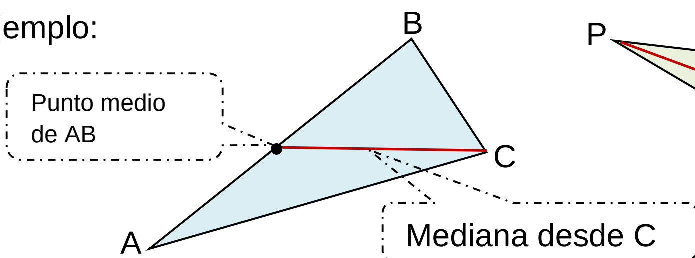
b) Con centro en el Incentro abrir el compás hasta el punto Q trazado en a) y traza una circunferencia.

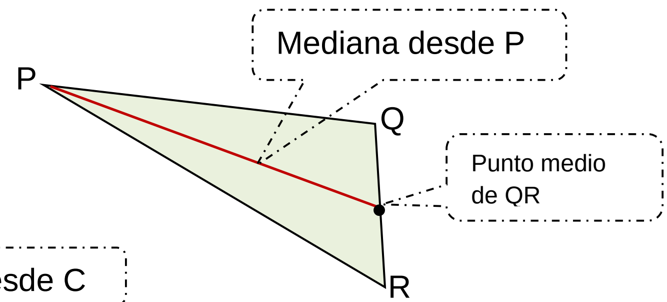
RESULTADO: A este círculo se le llama **círculo inscrito**.

> En el trazo de las bisectrices, quizá haya un pequeño rango de error, ya que el círculo inscrito puede cortar levemente a uno de los lados del triángulo, por lo que se sugiere hacerlo con mucha precisión.

Una **mediana** de un triángulo es un segmento de recta que une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Ejemplo:

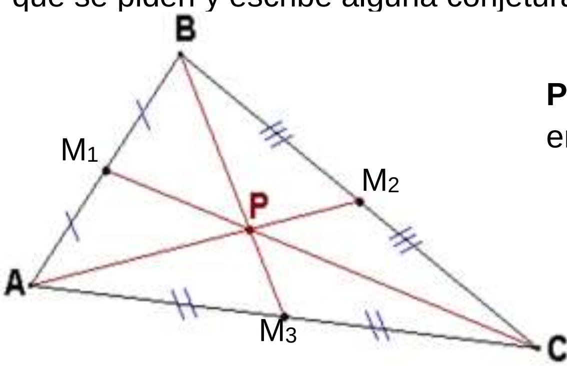




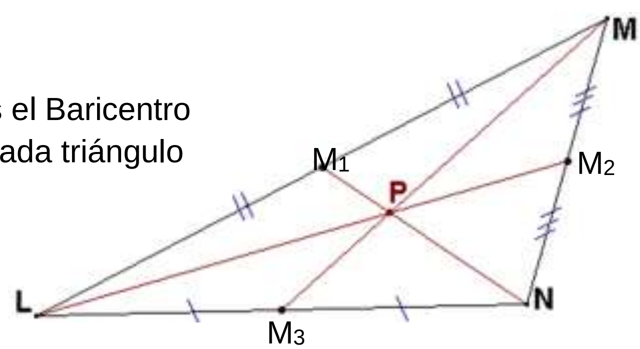
Actividad 5. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno (llámalo LMN). Y traza sus **medianas**.

RESULTADO: Las tres **medianas** se cortan en un punto dentro del triángulo, el cual recibe el nombre de **baricentro** o también llamado gravicentro o centroide.

Actividad 6. En cada uno de los siguientes triángulos mide con regla los segmentos que se piden y escribe alguna conjetura.



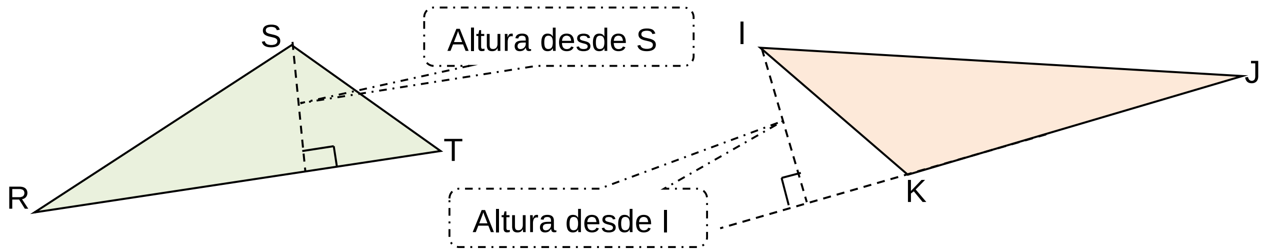
P es el Baricentro
en cada triángulo



$\overline{AP}$ =	$\overline{BP}$ =	$\overline{CP}$ =	$\overline{LP}$ =	$\overline{MP}$ =	$\overline{NP}$ =
$\overline{PM_2}$ =	$\overline{PM_3}$ =	$\overline{PM_1}$ =	$\overline{PM_2}$ =	$\overline{PM_3}$ =	$\overline{PM_1}$ =

RESULTADO: El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une el baricentro con el punto medio del lado opuesto.

La **altura** de un triángulo es un segmento de recta que va desde un vértice perpendicularmente hasta el lado opuesto o a su prolongación.



Actividad 7. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno (llámalo ∆STU). Y traza sus **alturas**.

RESULTADO: Las tres **alturas** se cortan en un punto llamado **Ortocentro**.

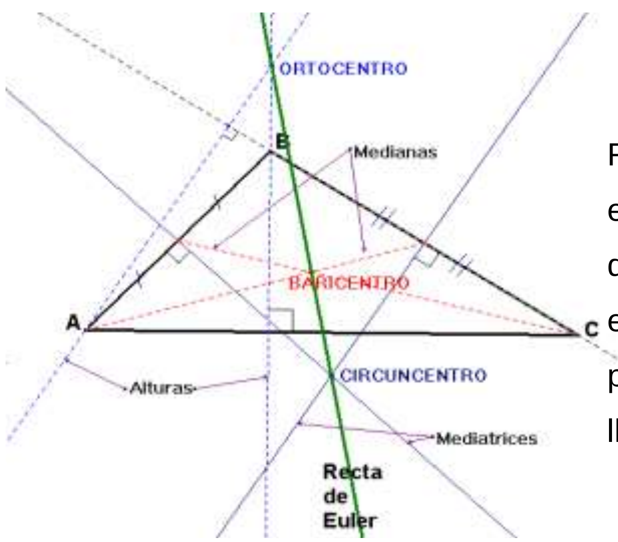
El Ortocentro puede quedar dentro o fuera del triángulo.

RESULTADO GENERAL:
Puntos notables de un triángulo: Circuncentro, Incentro, Baricentro y Ortocentro.

El Incentro y Baricentro siempre quedarán dentro del triángulo, mientras que el Circuncentro y el Ortocentro pueden quedar dentro o fuera del triángulo.

Actividad 8. Traza un triángulo escaleno y llámalo ∆ABC. Traza su Baricentro, su Circuncentro y su Ortocentro. ¿Puedes trazar una línea recta que pase por los tres puntos?

Solución:

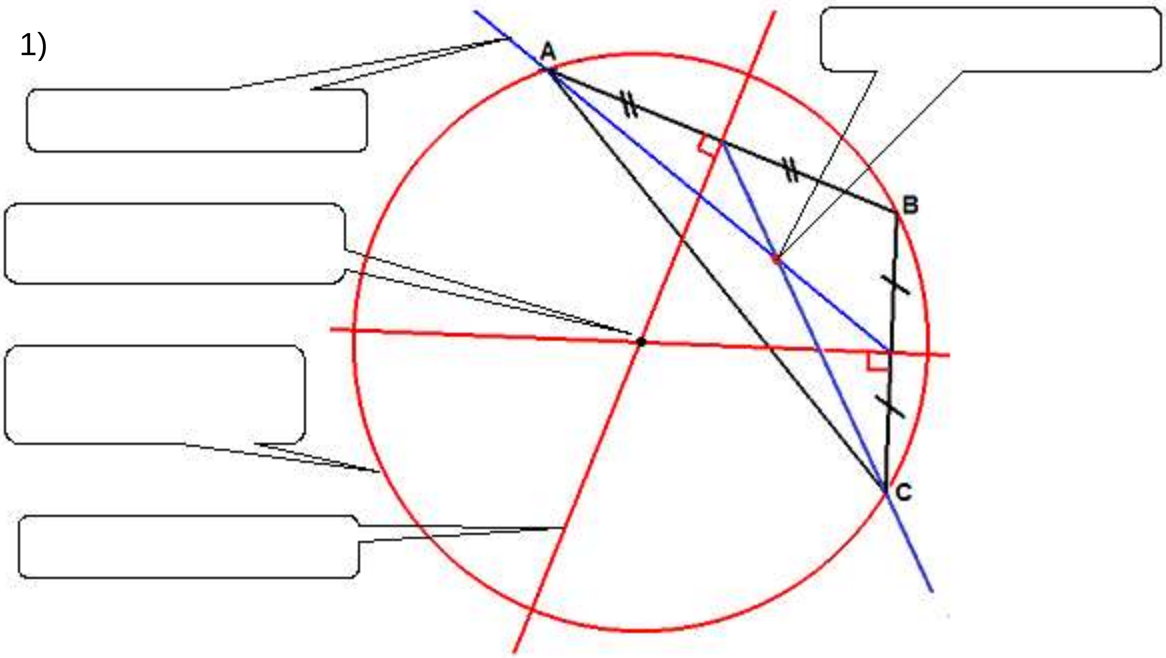


RESULTADO: El Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados, es decir, pertenecen a la misma recta, llamada **recta de Euler**.

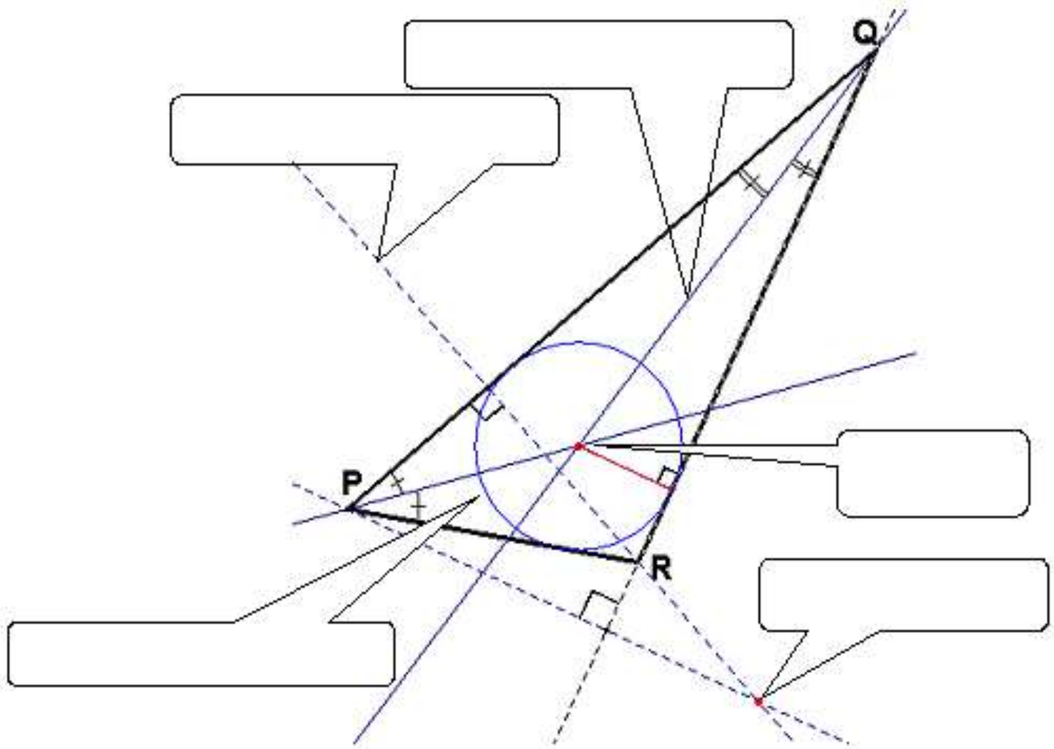
Ejercicios 3.5.4

I. En cada una de las siguientes figuras, escribe el nombre del trazo correspondiente.

1)



2)



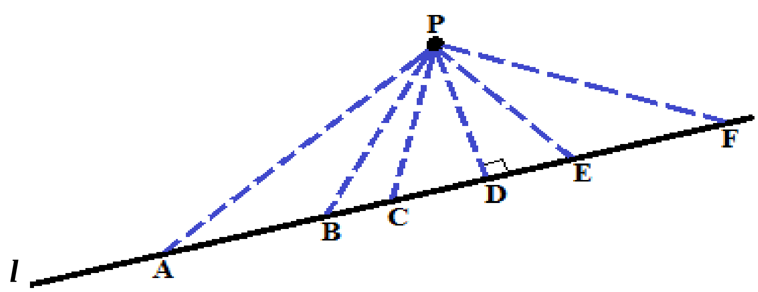
3) Traza las rectas notables en un triángulo isósceles. ¿Qué pasa con las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas?

4) Traza las rectas notables en un triángulo equilátero. ¿Qué pasa con las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas?

3.5.5 Distancia de un punto a una recta.

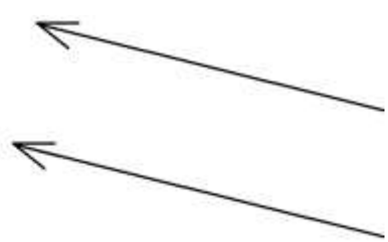
Si tenemos una recta *l* y un punto P que no esté sobre ella, como se muestra en la figura, la distancia de P a *l* ¿es la medida de PA? ____, ¿es la medida de PC? ____, ¿es la medida de PE? _____, ¿es la medida de PF? _____, entonces, ¿cuál es la distancia de P a *l*?, es la medida del segmento _______.

¿Porque lo crees? ____



Entonces, podemos afirmar que la distancia de un punto a una recta en el mismo plano es: ____.

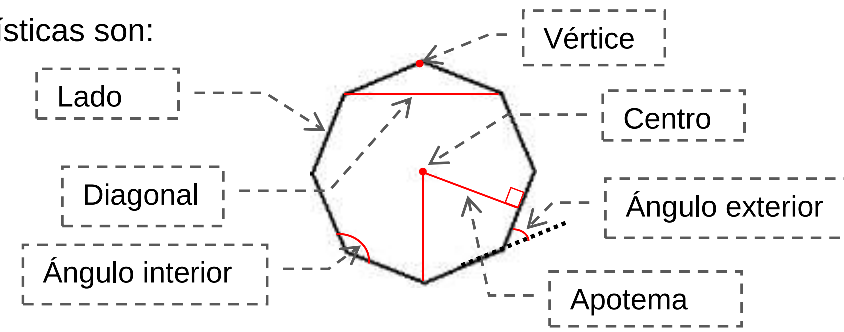
Si te dan dos rectas paralelas, como se muestra en la figura, describe como le harías para encontrar la distancia que hay entre ellas. ________________________________
____



3.6 POLÍGONOS: Regulares e irregulares, propiedades de los polígonos, suma de los ángulos interiores. Número de triángulos que se forman al interior del polígono.

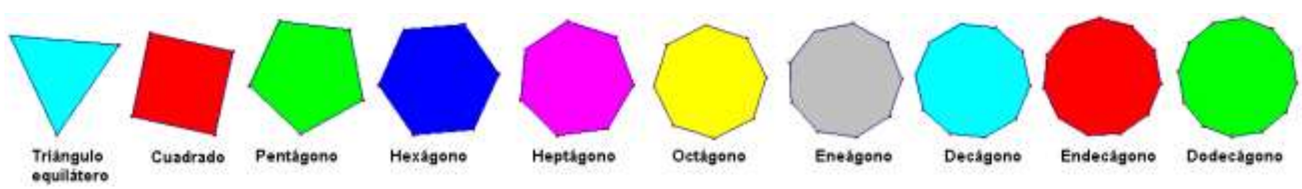
Polígono es la superficie plana limitada por segmentos de recta. Estos segmentos son llamados lados, y los puntos en que se intersecan se llaman vértices.

Sus características son:

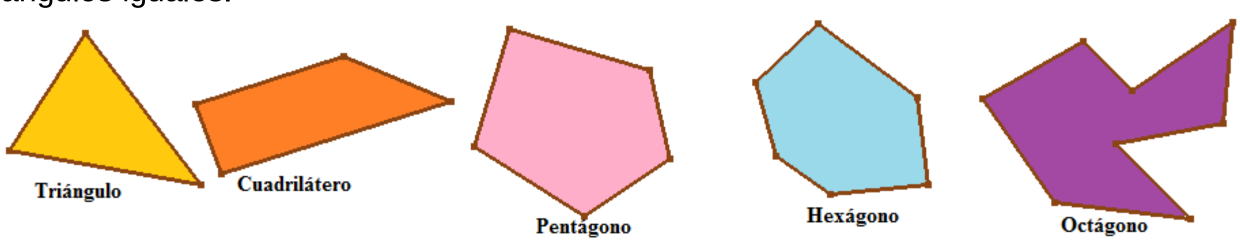


Según el número de sus lados, los polígonos se clasifican en: triángulo (tres lados); cuadrilátero (cuatro lados); pentágono (5 lados); hexágono (6 lados); heptágono (7 lados); octágono (8 lados), etc.

Polígono regular. Es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

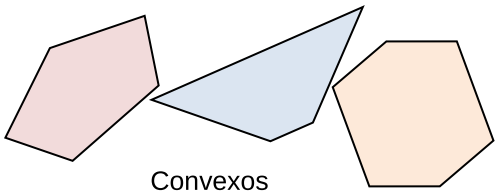


Polígonos irregulares. Son aquellos polígonos que no tienen ni sus lados ni sus ángulos iguales.



Los polígonos pueden ser convexos o no convexos (cóncavos).

Un polígono es **convexo** cuando cada ángulo interior mide menos de 180º, y los polígonos que tienen por lo menos un ángulo interior mayor de 180º se le llama **cóncavo**.



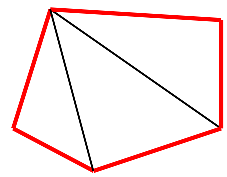
Convexos

Cóncavos

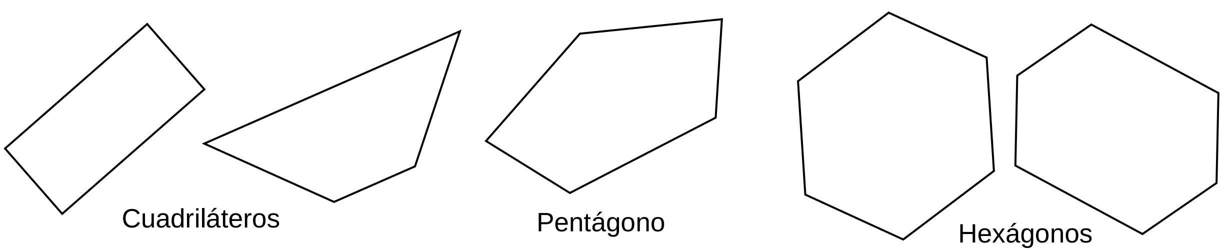
Analicemos algunas de las propiedades de los polígonos convexos.

La triangulación de un polígono es la descomposición de éste en triángulos utilizando para ello el conjunto máximo de diagonales que no se intersecan.

Por ejemplo: una forma de triangular un pentágono se muestra en la figura del lado derecho.



Actividad 1. En cada uno de los siguientes polígonos, elige un vértice y desde él, ¿podrías descomponer cada polígono en triángulos?, trata de hacerlo y al terminar compara tus trazos con tus compañeros.



Cuadriláteros Pentágono Hexágonos

a) ¿Todos hicieron la división en triángulos, de la misma forma? ___________

b) ¿En cuántos triángulos se descompuso cada polígono?

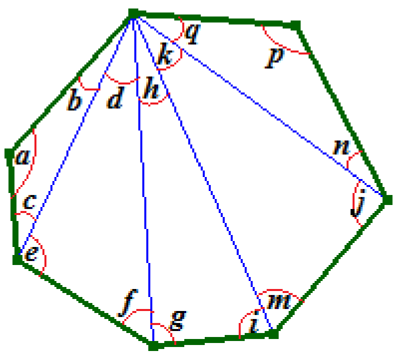
Los cuadriláteros en _____ triángulos, el pentágono en _____ triángulos y los hexágonos en _____ triángulos.

Actividad 2. Dibuja en tu cuaderno dos heptágonos (7 lados), dos octágonos (8 lados) y dos eneágonos (9 lados), triangularlos y completa lo siguiente:

Los heptágonos se descomponen en _____ triángulos, los octágonos en _____ triángulos y los eneágonos en _____ triángulos.

RESULTADO: La triangulación de un polígono no es única y toda triangulación de un polígono convexo con n lados o vértices consiste exactamente de _________triángulos.

Actividad 3. Triangular las siguientes figuras y nombra cada ángulo con letras minúsculas como se ve en el ejemplo y completa la siguiente tabla.



$\angle a + \angle b + \angle c =$ ________ $\angle d + \angle e + \angle f =$ ________

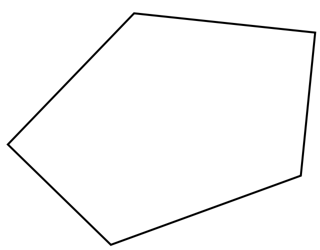
$\angle g + \angle h + \angle i =$ ________ $\angle j + \angle k + \angle m =$ ________

$\angle n + \angle p + \angle q =$ ________

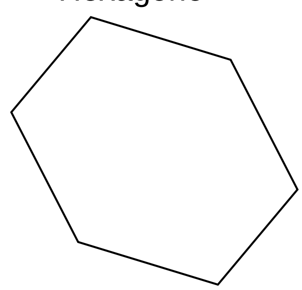
Y la suma de todos esos ángulos es igual a la suma de los 7 ángulos interiores del heptágono, es decir:

$\angle a + \angle(b + d + h + k + q) + \angle p + \angle(n + j) + \angle(m + i) + \angle(g + f) + \angle(e + c) =$
___________ Es el resultado de la suma de los ángulos interiores del heptágono.

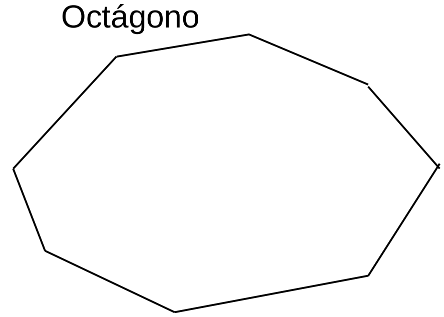
Pentágono



Hexágono



Octágono



	Pentágono	Hexágono	Octágono
Número de triángulos en que se descompone.			
Suma de todos los ángulos interiores de los triángulos.			
Suma de los ángulos interiores de cada polígono.			

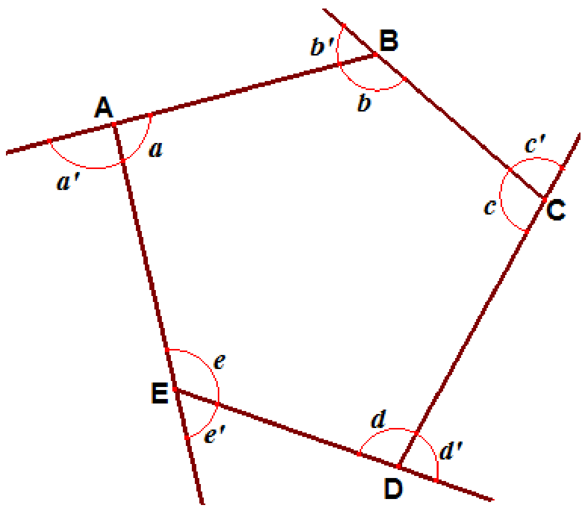
Si un polígono tiene 12 lados ¿cuánto mide la suma de sus ángulos interiores? ______

Conclusión: La suma de los ángulos interiores en un polígono convexo de n lados, es igual a ____________.

Actividad 4. En tu cuaderno traza un heptágono regular y un decágono regular, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores?

En general, por las actividades 3 y 4 podemos afirmar que, cada ángulo interior de un **polígono regular** de n lados es igual a __________________.

Ahora, analicemos la medida de los ángulos exteriores en un polígono convexo.
En la siguiente figura se cumple:



$\angle a + \angle a' =$ _______ $\angle b + \angle b' =$ _______

$\angle c + \angle c' =$ _______ $\angle d + \angle d' =$ _______

$\angle e + \angle e' =$ _______

Al sumar todos estos ángulos obtenemos:

$\angle a + \angle a' + \angle b + \angle b' + \angle c + \angle c' + \angle d + \angle d' +$
$\angle e + \angle e' =$ ____________

Ordenando convenientemente:

$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + \angle a' + \angle b' + \angle c' +$
$+ \angle d' + \angle e' =$ __________

Como $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e =$ __________ lo restamos a la suma anterior y tenemos:
$\angle a' + \angle b' + \angle c' + + \angle d' + \angle e' =$ __________ Es la suma de los cinco ángulos exteriores del pentágono.

Actividad 5. En tu cuaderno traza un hexágono y un heptágono convexos, ¿cuánto mide la suma de sus ángulos exteriores?
En el hexágono: _______________ En el heptágono: ________________
Conclusión: La suma de los ángulos exteriores en un polígono convexo de n lados, es igual a ________________.
En general, podemos afirmar que algunas propiedades de los polígonos convexos son:

- Un polígono de n lados tiene n vértices, n ángulos interiores y n ángulos exteriores.

- Al trazar diagonales en un polígono desde un mismo vértice se forman $n – 2$ triángulos.

- La suma de los ángulos interiores en un polígono convexo es 180°(n – 2).

- La suma de los ángulos exteriores en un polígono convexo es de 360°.

Ejercicios 3.6

Usando las propiedades de los ángulos y polígonos, en cada caso encuentra lo que se pide.

1) ¿En cuántos triángulos dividen al polígono las diagonales trazadas desde uno de sus vértices?, si el polígono tiene:

a) 10 lados b) 25 lados c) 36 lados

2) Si un polígono tiene 20 lados, ¿cuánto mide la suma de sus ángulos interiores?

3) Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es de 7020°, ¿cuántos lados tiene el polígono?

4) Si un polígono regular tiene 18 lados, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos?

5) Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono regular es de 3060°, ¿cuántos lados tiene y cuánto mide cada uno de los ángulos interiores del polígono regular?

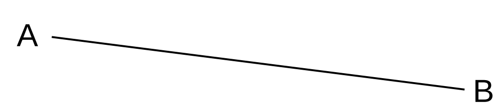
6) Si la suma de las medidas de 12 ángulos interiores de un polígono de 13 lados es de 1900°, ¿cuál es la medida del 13º ángulo interior?

7) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos exteriores de un octágono regular y de un dodecágono regular?

8) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo exterior mide 15°? ¿Cuántos lados tendrá si cada ángulo exterior mide 18°?

9) Encontrar el número de lados de un polígono si la suma de los ángulos interiores es el doble que la suma de sus ángulos exteriores.

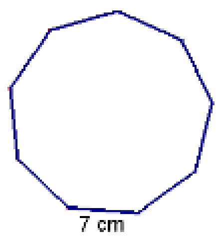
10) Con regla y compás traza un rectángulo con base el segmento AB y de ancho la mitad de AB.



3.6.1 Perímetro y área; fórmula de Herón.

El perímetro de todo polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados. En el caso de un Polígono Regular, al ser todos sus lados iguales, el perímetro es el número de lados multiplicado por la longitud del lado. Es decir, si un Polígono Regular tiene “n” lados y la medida de cada lado es “d” unidades, entonces su perímetro será $n(d)$ unidades.

Actividad 1. Calcular el perímetro del siguiente polígono regular.



Solución:
El polígono tiene ____ lados iguales y cada lado mide 7 cm. Su perímetro es: ___(7) = ____ cm.

Respuesta: El perímetro es _____ cm.

Actividad 2. Calcular la longitud de los lados de un polígono regular de 15 lados si su perímetro es 180 cm.

Solución:
Al ser polígono regular sus 15 lados son iguales, entonces cada lado mide:

$$\frac{180}{\_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ cm.}$$

Respuesta: La longitud de cada lado mide _____ cm.

Actividad 3. El 12.5% de la cuarta parte del perímetro de un cuadrado es 2 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

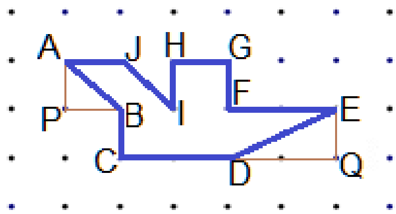
Solución:
Suponiendo que el lado del cuadrado es x, su perímetro será ____.

1º) La cuarta parte del perímetro es $\frac{\_\_}{4} = x$.

2º) El 12.5% de x es: ________
3º) Esta última expresión debe ser igual a 2 cm. Así, tenemos la ecuación $0.125x = 2$, que al resolverla se obtiene $x =$ _____.
Respuesta: El lado del cuadrado mide ______ cm.

Veamos cómo se procede con un polígono que no es regular.

Actividad 4. Encuentra el perímetro del polígono ABCDEFGHIJ trazado en una retícula cuadrada. Donde la longitud de un punto a otro consecutivo ya sea horizontal o vertical mide 1 cm.



Solución:

Contamos los segmentos horizontales y los verticales, son ___, la longitud de estos es ___ cm. Después, calculemos la medida de los segmentos inclinados, AB = JI y además el segmento DE. Para esto usaremos el teorema de Pitágoras.

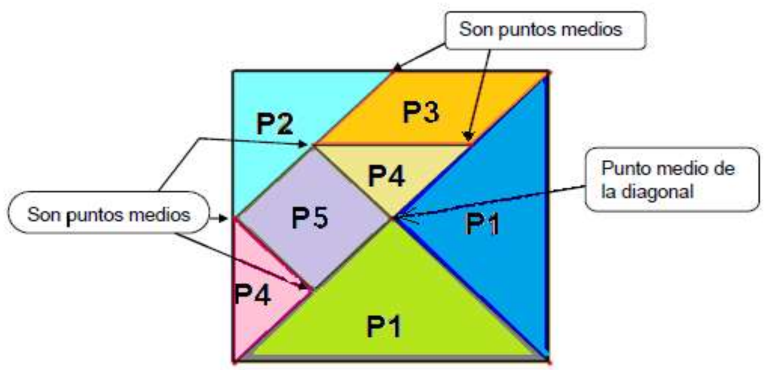
El segmento AB es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABP, entonces:

$$AB = \sqrt{AP^2 + PB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De forma similar, el segmento DE es la hipotenusa del triángulo rectángulo DEQ, entonces: $DE = \sqrt{EQ^2 + DQ^2} = \sqrt{\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_}$

Respuesta: El perímetro del polígono mide ___ + ______ + ____ = 14.06 cm

Actividad 5. Vamos a utilizar las 7 piezas de un tangram, si no lo puedes conseguir de madera o fomy, construye y recorta uno con una hoja de papel, como se muestra en la figura y nombra cada pieza como se muestra.



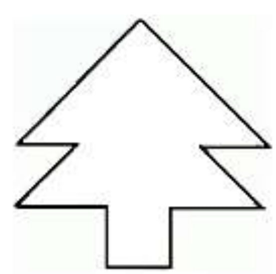
Suponiendo que el lado del cuadrado (pieza 5) mide 1 unidad.

1) El perímetro de P5 es ___________ 2) El perímetro de P4 es _____________

3) El perímetro de P3 es ___________ 4) El perímetro de P2 es _____________

5) El perímetro de P1 es ___________ 6) El perímetro del tangram es _________

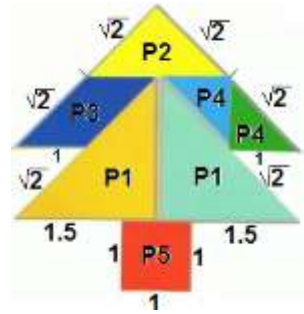
Actividad 6. Con todas las piezas y sin sobreponer, construye la siguiente figura y calcular su perímetro usando las medidas de la actividad anterior.



Solución:

Creemos que la construiste sin mayores problemas.

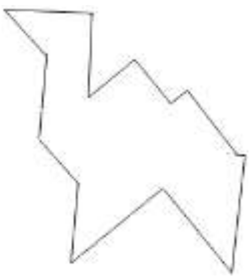
Pero analicemos con mayor cuidado el cálculo del perímetro, este debe encontrarse usando las medidas encontradas en la actividad 5, como se muestra en la siguiente figura que es la solución.



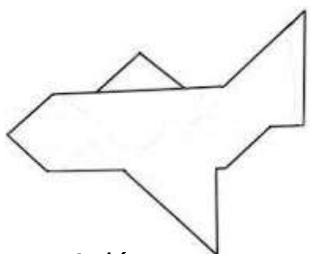
Perímetro = $5 + 1.5 + 1.5 + 6\sqrt{2} = 8 + 6\sqrt{2} = 8 + 8.48 = 16.48$

El perímetro es 16.48 unidades.

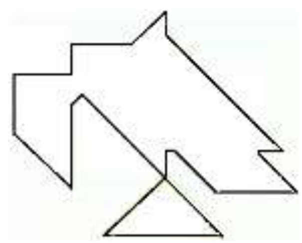
De la misma forma, construye y encuentra el perímetro de las siguientes figuras.



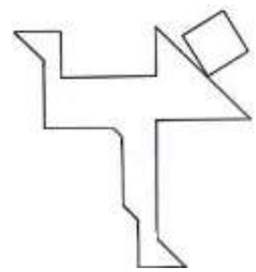
Camello



Avión

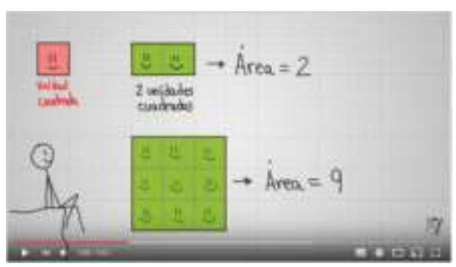


Águila

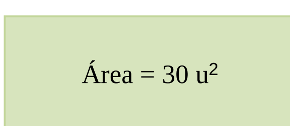


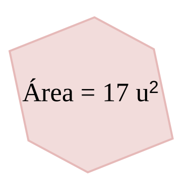
Chino

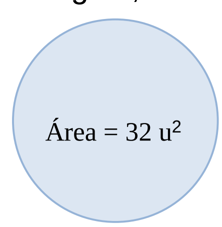
Observa con detalle el video en https://www.youtube.com/watch?v=E1uWLydHTqA te ayudará a comprender el significado de área.



El **área** de una figura corresponde a la medida de la superficie que dicha figura ocupa. Para medir áreas, se usan dos dimensiones: largo y ancho, por tal razón, la unidad de medida se eleva al cuadrado. Por ejemplo, medir el área de un rectángulo, de un polígono en general, de un círculo, etc.



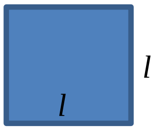




A partir del área del cuadrado se puede encontrar las áreas del rectángulo, triángulo, trapecio, rombo, paralelogramo, etc.

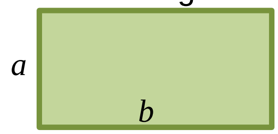
Recuerda cómo se calculan las tres áreas más básicas:

Cuadrado



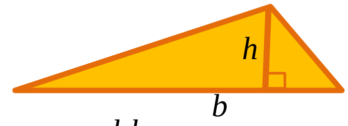
$A = l^2$

Rectángulo



$A = b \cdot a$

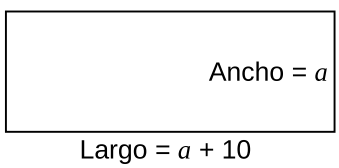
Triángulo



$A = \dfrac{bh}{2}$

Ejemplo 1. En un rectángulo, el largo excede en 10 cm al ancho. Si el perímetro mide 80 cm ¿cuál es su área?

Solución:
Trazando una figura con los datos dados tenemos el siguiente rectángulo:



Perímetro = $2a + 2(a + 10)$, es decir, $2a + 2(a + 10) = 80$
Resolviendo la ecuación: $2a + 2a + 20 = 80$
$4a = 80 - 20$
$a = 60/4 = 15$

Entonces, el ancho del rectángulo es 15 cm.
Su área es: $a(a + 10) = 15(15 + 10) = 375$ cm^2.
Respuesta: El área del rectángulo es 375 cm^2.

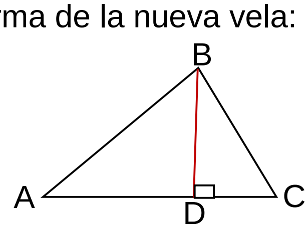
Ejemplo 2. Un rollo de tela de 2 m de ancho se ha usado para cortar 1050 pañuelos cuadrados de 20 cm de lado. ¿Qué longitud de tela había en el rollo si no ha faltado ni sobrado tela?

Solución:
Supongamos que el rollo de tela tiene forma de un rectángulo.
Si se cortan 1050 cuadrados de lado 20 cm, entonces, en el ancho caben 200/20 = 10 y en el largo caben 1050/10 = 105.
Es decir, la longitud de la tela es de 20(105) = 2100 cm = 210 m.

Respuesta: La longitud de la tela es de 210 m.

Ejemplo 3. Una vela triangular de una barca se ha estropeado y hay que sustituirla por otra. Para confeccionar la nueva vela nos cobran \$210 por m^2. ¿Cuánto costará esa nueva vela si debe tener 5 m de alto y 6 m de base?

Solución:
Forma de la nueva vela:



El área del ΔABC = $\dfrac{5 \times 6}{2} = 15$ m^2

Si el m^2 cuesta \$210, 15 m^2 costará 210(15) = 3150.

Respuesta: La nueva vela costará \$3150.

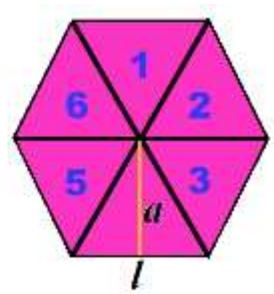
En general, el **área** de un **polígono** es la **medida** de la región **superficie** encerrada por un **polígono**.

Si el **polígono es regular** se calcula a partir de su perímetro y su apotema, ya que al ser regular, lo podemos dividir en triángulos congruentes, por ejemplo, el hexágono:

El área del hexágono será igual al área de un triángulo multiplicada por el número de triángulos. Esto es:

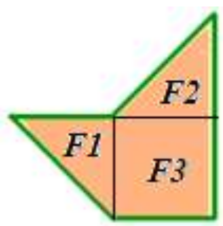
A = 6(área del Δnum.4) = $6\left(\dfrac{l \times a}{2}\right) = \dfrac{6l \times a}{2}$

$6l$ es el perímetro y a es la apotema del hexágono.



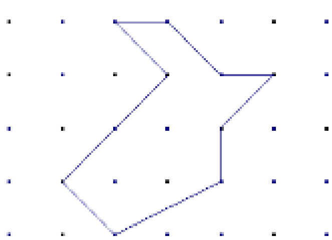
En general, el área de un polígono regular es: $A = \dfrac{perímetro \times apotema}{2}$

Si el **polígono no es regular**, su área se obtiene descomponiendo el polígono en figuras más sencillas cuyas áreas sean fácil de calcular, y después sumarlas. Por ejemplo:

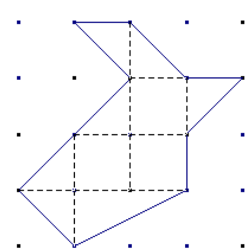


Área del pentágono = área ***F1*** + área ***F2*** + área ***F3***

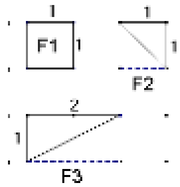
Ejemplo: Calcular el área de la siguiente figura trazada en una retícula cuadrada, donde la medida ya sea horizontal o vertical entre dos puntos consecutivos es 1 unidad.



Solución:
Descomponemos la figura en otras más sencillas para facilitar el cálculo de sus áreas.

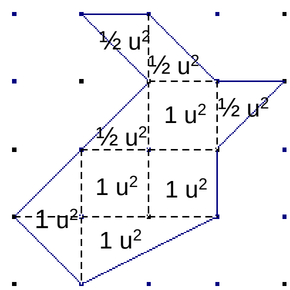


Ya descompuesta en figuras más sencillas, calcular el área de éstas por separado y después sumarlas:



F1: Es un cuadrado de lado 1 unidad, su área es 1(1) = 1 u^2.
F2: Es un triángulo que es la mitad de la figura F1, entonces su área es ½ u^2.
F3: Es la mitad de un rectángulo de área 2 u^2, ya que su ancho es 1 u y de largo 2 u, entonces su área es 1 u^2.

Calculando cada área tenemos:



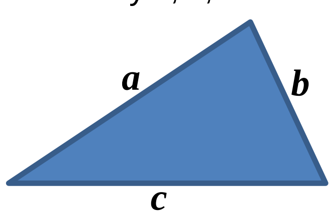
Sumando las áreas:

4(½) u^2 + 5 u^2 = 7 u^2.

Respuesta: El área de la figura dada es 7 u^2.

Pero también puedes triangular el polígono irregular, y calcular las áreas de cada triángulo conociendo la medida de sus tres lados utilizando la fórmula de Herón de Alejandría.

Herón de Alejandría vivió hacia el siglo III a. de C. Son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón, que nos permite calcular el área de un triángulo conocidas las medidas de sus tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni ninguno de los ángulos. Si llamamos **s** al semiperímetro y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a los tres lados, entonces:



área = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Ya conoces varias formas para calcular el área de un polígono. Cual utilizar, depende de la forma del polígono.

Completa las siguientes actividades.

Actividad 1. Encuentra el área del triángulo ABC cuyos lados miden AB = 5 cm, BC = 7 cm y AC = 10 cm.
Solución:

El semiperímetro del triángulo es **s** = $\dfrac{\quad + \quad + \quad}{2}$ = ______

Sustituyendo en la fórmula de Herón: $A = \sqrt{\_\_\_(\_\_\_ - 5)(\_\_\_ - 7)(\_\_\_ - 10)} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_}$ = ______ El área del ΔABC = _________ cm²

Actividad 2. Las medidas de los lados del triángulo PQR son, PQ = 8 u, QR = 11 u y PR = 15 u. Encuentra la medida de la altura desde el vértice PR.
Solución:

Por un lado sabemos que su área = $\frac{b \times h}{2}$

Por otro lado usando la fórmula de Herón: **s** = $\frac{\quad + \quad +}{2}$ = ______

$A = \sqrt{\_\_\_(\_\_\_ - 8)(\_\_\_ - 11)(\_\_\_ - 15)} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_}$ = ______

Sustituyendo el valor del área: ________ = $\frac{15 \times h}{2}$ y despejando h:

2(_______) = 15(h), h = _________ u es la altura desde PR.

Actividad 3. En las fiestas de un pueblo han montado una carpa para las verbenas, cuya forma es la de un polígono regular de 8 lados. La carpa está rodeada por una serie de focos que tiene una longitud total de 44.8 m. ¿Cuánto mide cada lado de la carpa octagonal?

Solución:
Para conocer la medida del lado de la carpa, sabemos que es un polígono regular de ____ lados y su perímetro es una serie de focos cuya longitud es de ______ m.

Entonces, tenemos la ecuación $8l$ = ______, despejando a l: $l = \frac{\quad}{\quad}$ = ______

Respuesta: Cada uno de los lados de la carpa octagonal mide ______ m.

Ejercicio 3.6.1

1) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su perímetro es de 34 cm?

2) El perímetro de un cuadrado es 45 cm, y si cada lado mide 3 + x, ¿cuánto vale x?

3) El perímetro de un rectángulo es 54 cm, si su base mide 2x – 1 y su ancho mide x + 5, ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

4) Determina el perímetro del rectángulo cuya área o superficie es 44 cm^2 y uno de sus lados mide 8 cm.

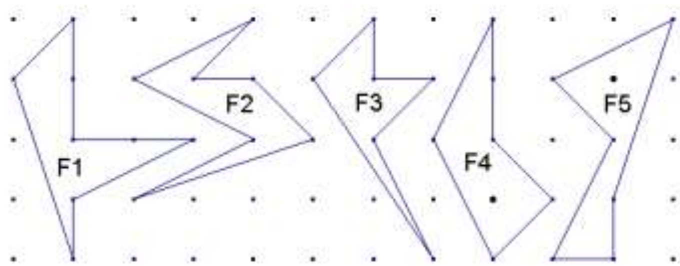
5) La cuarta parte de la superficie de un cuadrado es 7 cm^2. ¿Cuánto mide su lado?

6) El perímetro de un triángulo isósceles es 37 cm. ¿Cuál es la medida de sus lados iguales si el lado desigual mide 9 cm?

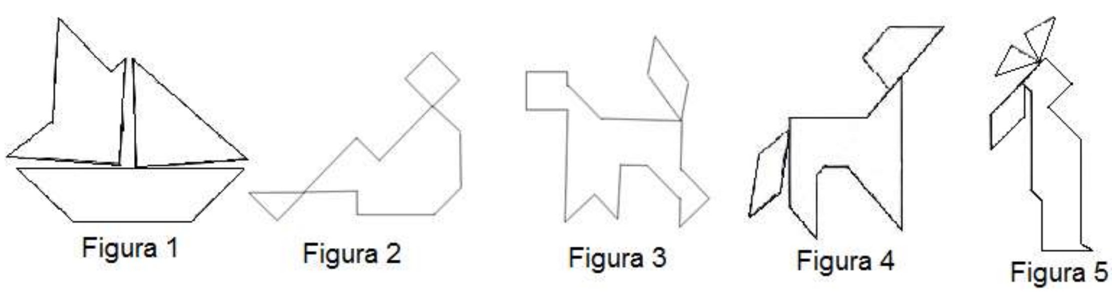
7) En un rectángulo, el largo excede en 12 cm al ancho. Si el perímetro mide 92 cm ¿Cuál es su área?

8) Si un cuadrado de 54 cm de perímetro, disminuye su lado en 4 cm. ¿Cuánto mide el área del nuevo cuadrado?

9) Calcular el perímetro de las siguientes figuras en una retícula cuadrada, donde la medida ya sea horizontal o vertical entre dos puntos consecutivos es 1 unidad.



10) Usando el tangram de 7 piezas (pág. 185) y suponiendo que el lado del cuadrado (pieza 5) mide 1 unidad (como se indica en la actividad 5 pág. 185), calcular el perímetro de las siguientes figuras.



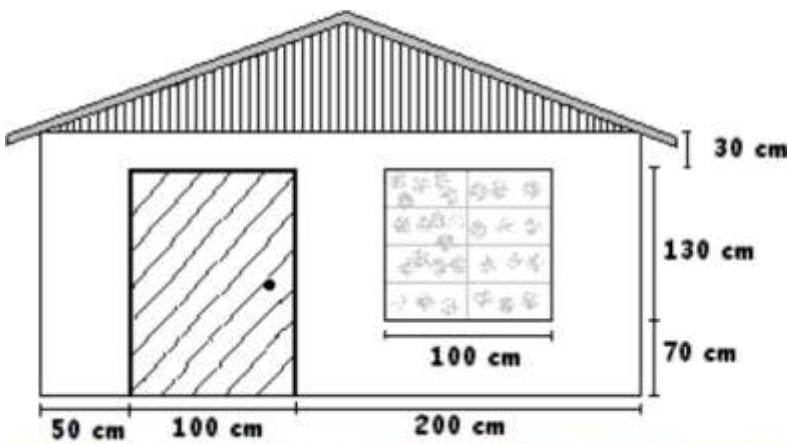
11) Un cuadrado tiene igual perímetro que un rectángulo de 18 cm de largo y 15 cm de ancho. Calcula el lado del cuadrado.

12) El área de un cuadrado es 50 cm^2, si trazas un triángulo equilátero sobre uno de sus lados, ¿Cuál es el perímetro del triángulo equilátero?

13) Encuentra el área del triángulo ABC cuyos lados miden AB = 12 cm, BC = 8 cm y AC = 10 cm.

14) Las medidas de los lados del triángulo PQR son, PQ = 12 u, QR = 13 u y PR = 18 u. Encuentra la medida de la altura desde el vértice PR.

15) Se tiene una cabaña cuyas medidas se indican en la siguiente figura:



a) ¿Cuál es el perímetro de la puerta?
b) ¿Cuál es el perímetro de la ventana?
c) El frente de la cabaña se pintará color beige ¿Cuánto mide la superficie a pintar?

16) Si el lado de un cuadrado aumenta al doble. ¿Qué ocurre con el área y su perímetro?

17) Si un cuadrado de lado n tiene un área de 121 m^2 ¿Qué área tendrá un cuadrado de lado $4n$?

18) El perímetro de un cuadrado de lado 13 cm es igual al de un rectángulo cuyo largo es el triple del ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo?

19) Un cuadrado y un rectángulo tienen el mismo perímetro. Si el lado del cuadrado mide x cm y el ancho del rectángulo mide $x/3$. ¿Cuánto mide su largo? 20) Los perímetros de dos cuadrados son 24 cm y 72 cm ¿Cuál es la razón entre sus lados?

20) Un terreno rectangular de 27 metros de ancho por 45 metros de largo se quiere cercar con 3 vueltas de alambre de púas. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar el terreno?

21) El Sr. López tiene un terreno rectangular de 150 m de largo y 95 m de ancho, y desea cercarlo con 3 líneas de alambre de púas. Si ya tiene colocados los troncos de madera a cada 5 m ¿Cuántos rollos de alambre requiere comprar, si cada rollo tiene 60 m de alambre?

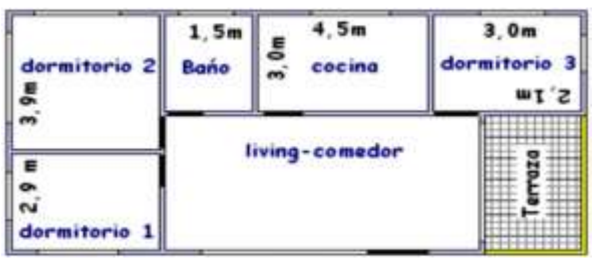
22) ¿Cuántos sacos de cereal se obtienen al sembrar un lote de 25 metros por 35 metros si se estima que cada metro cuadrado produce 8 sacos?

23) Calcula el número de azulejos cuadrados de 10 cm de lado que se necesitan para cubrir una superficie rectangular de 4 m de base y 3 m de altura.

24) Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 4 m^2.

25) Queremos enmarcar un cuadro cuyas dimensiones totales son 95 cm de base por 68 cm de alto. ¿Qué longitud deberá tener la moldura que debemos usar? Si la moldura cuesta a $18 el metro, calcula el precio de dicho marco.

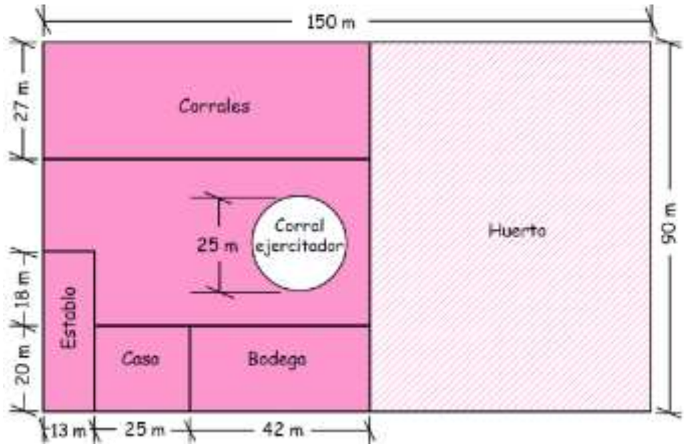
26) El plano de una casa está hecho como se muestra en la siguiente figura:



a) ¿Cuál es el perímetro de la terraza?
b) Calcular el perímetro del living – comedor.
c) ¿Cuál es el área de la terraza?
d) Si se instala cerámica en el piso del baño y cocina. ¿Qué cantidad de metros cuadrados de cerámica se necesitan?
e) Si se instala cubre piso en los dormitorios, (donde el largo del dormitorio 1 y 2 es de 4 metros) y en el living - comedor. ¿Qué cantidad de metros cuadrados de cubre piso se necesitan?

27) Se necesita cercar un huerto rectangular de 180 m de longitud y 150 m de anchura, con tela metálica. El metro lineal de la malla cuesta $78. Al mismo tiempo, es necesario abonarlo con abono nitrogenado. El fabricante del abono recomienda 25 kg por hectárea (superficie de un cuadrado de 100m de lado).
a) Calcula la longitud de la tela metálica y el costo de la misma para cercar el huerto.
b) Calcula la cantidad de abono nitrogenado necesario para abonarlo.

28) Evaristo compró un rancho que tiene las medidas que se muestran en el plano:



a) Colocará una cerca nueva en los corrales, en el corral ejercitador y en el establo. ¿Cuántos metros de tela metálica necesitará?

b) En la mitad del huerto plantará maíz, en la tercera parte de lo que resta plantará arroz y en lo que resta plantará trigo. ¿Qué superficie le corresponde a cada uno?

c) Si colocará piso nuevo en toda su casa, ¿cuántos m^2 debe de comprar?

d) Si Evaristo pagó por el rancho $2,800 000, ¿Cuánto pagó por cada m^2?

3.7 CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA: Rectas y segmentos, localización del centro de una circunferencia, perímetro y área del círculo.

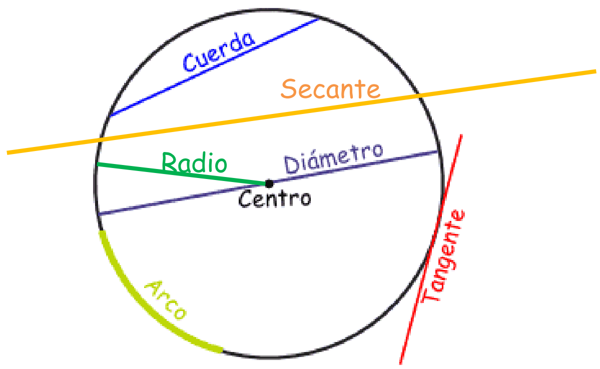
Llamamos **círculo** a la región plana encerrada por una circunferencia.

Circunferencia. Es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.
El **círculo** está formado por la circunferencia y todos los puntos interiores a ella, es decir, la circunferencia es la curva que limita al círculo o sea es el contorno de éste.
Longitud de una circunferencia. Es la medida del contorno del círculo, que produce un radio girando una vuelta completa de 360 grados o 2π radianes.

Los elementos característicos de una circunferencia son:

Radio. Segmento que une un punto cualquiera de una circunferencia con su centro.
Ángulo central. Ángulo formado por dos radios.
Arco. Es una porción de la circunferencia y se representa con el símbolo $\frown$.
Cuerda. Segmento determinado por dos puntos de la circunferencia.
Diámetro. Es la cuerda mayor y pasa por el centro, es igual a la suma de dos radios.

Secante. Cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
Tangente. Recta que toca a la circunferencia en un punto y sólo uno.
Semicircunferencia. Arco igual a la mitad de la circunferencia.
Longitud de la circunferencia. Es un ángulo de una vuelta, mide 360°.



Rectas tangentes a una circunferencia.

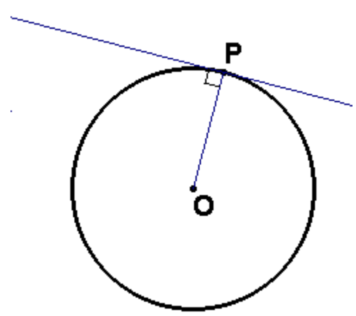
PROPOSICIÓN: Si una recta es tangente a una circunferencia o a un arco de circunferencia, entonces el radio trazado hasta el punto de tangencia es perpendicular a la tangente[8].
Esta proposición es muy importante para construir una tangente:
a) Desde un punto sobre ella.
b) Desde un punto fuera de ella.
c) Localización del centro de una circunferencia dada.
CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS:

a) Trazar una recta tangente a una circunferencia, que pase por el punto P sobre ella.

CONSTRUCCIÓN:

Se traza una circunferencia con centro en O y se marca el punto P sobre ella. Luego se traza el radio OP.

A este radio se le construye una perpendicular en su extremo P, la cual será la tangente deseada.

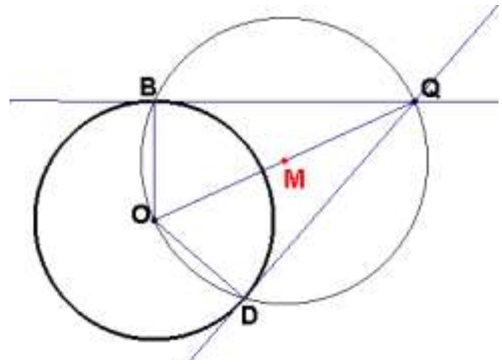


[8] Prop. 18 de los Elementos de Euclides, L-3

b) Trazar una tangente a una circunferencia dada, que pase por un punto M fuera de ella.

CONSTRUCCIÓN:

Se traza una circunferencia con centro O y se marca un punto Q fuera de ella. Se traza un segmento de recta que una al punto Q con el centro O de la circunferencia. Se traza el punto medio M del segmento OQ, y con centro en M y radio igual a MQ, se traza un arco que corte a la circunferencia en los puntos B y D. Se unen los puntos Q con B o con el punto D, encontrando así la tangente deseada. Se puede deducir que hay dos tangentes a la circunferencia que pasan por Q.

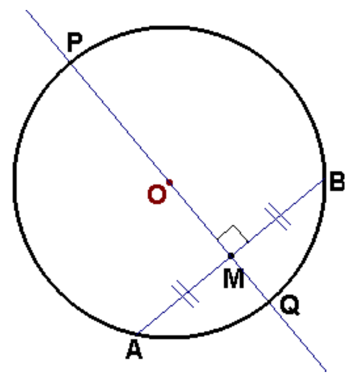


c) Localización del centro de una circunferencia dada.

CONSTRUCCIÓN:

Se traza una circunferencia con cualquier radio.

Se traza una cuerda cualquiera AB y se localiza su punto medio M. Se traza una recta perpendicular a AB que pase por M (mediatriz), esta cortará a la circunferencia en los puntos P y Q. Se localiza el punto medio O de PQ, el cual será el centro del círculo.



Actividad 1. Puedes practicar estos trazos haciéndolos en tu cuaderno, como se vio al principio de la unidad y siguiendo los pasos que se dan

Medida aproximada de la longitud de la circunferencia. Obtención empírica de la fórmula.

SUGERENCIA. Para obtener empíricamente la fórmula de la longitud de una circunferencia, proponemos la siguiente actividad, la cual puedes trabajar de forma dinámica con la ayuda de algún software como Cabri, Geometer Sketchpad o Geogebra.

Actividad 2. Con un mismo radio de la longitud que tú quieras, traza cinco polígonos regulares. Para cada uno de ellos calcular lo siguiente:

a) Su perímetro.
b) Desde su centro traza su radio y mide su longitud.
c) Divide el valor del perímetro entre 2 veces la longitud del radio, y da el resultado con cuatro decimales.

Anota tus resultados en la siguiente tabla:

Número de lados	8	15	25	60	90
Perímetro					
Longitud de $2\boldsymbol{r}$					
Perímetro/$2\boldsymbol{r}$					

d) ¿A qué número se parece el resultado de "Perímetro/$2\boldsymbol{r}$"? ________.

e) Si el número de lados del polígono regular fuera 300, a simple vista parece una ________________.

f) Si suponemos que $\boldsymbol{p}$ = Perímetro de un polígono regular, entonces podríamos afirmar que $\frac{\boldsymbol{p}}{2r} \approx$ _______ (donde ≈ significa "aproximado").

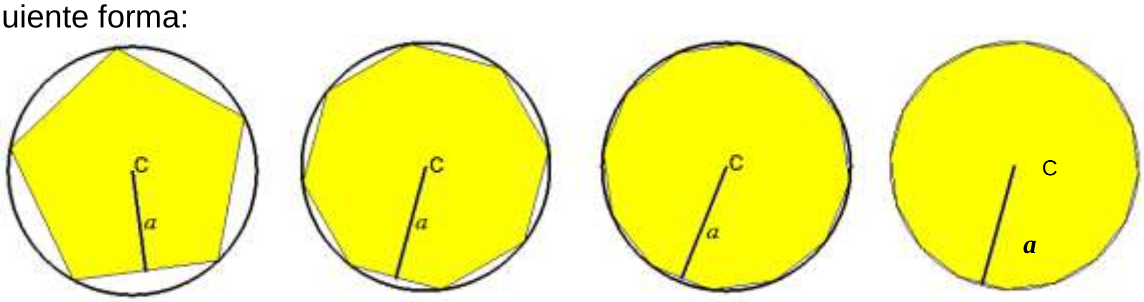
g) Despejando $\boldsymbol{p}$, tenemos: ____________. Si el número de lados del polígono es muy grande, el perímetro será muy aproximado al perímetro de una __________________.

Conclusión: Podemos afirmar que el perímetro de una circunferencia es:

____

Cálculo aproximado del área del círculo. Obtención empírica de la fórmula.

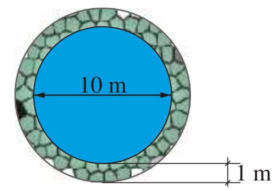
Inscribiendo algunos polígonos regulares en un círculo del mismo radio, quedan de la siguiente forma:



Donde C es el centro del polígono y del círculo, y ***a*** es la apotema del polígono regular. Observa que entre mayor sea el número de lados del polígono, su apotema es de mayor longitud y el área del polígono se parece más al área del círculo. Además, la medida de la apotema tiende a ser la del radio del círculo.
Con estas reflexiones nos atrevemos afirmar que un círculo es un polígono de una infinidad de lados.

Entonces, el área del círculo será: $\frac{perímetro \times apotema}{2} = \frac{2\pi\ r \times r}{2} = \pi r^2$

EJEMPLO. Una fuente circular está rodeada de un andador de mármol. El diámetro de la fuente es de 10 metros y el andador tiene un metro de ancho. ¿Cuál es la superficie recubierta por el mármol?



Solución:

El diámetro de la fuente junto con el andador es de 12 m, entonces el radio es de 6 m.

Y su área es $\pi(6)^2 = 36\pi$ m^2.

Mientras que el área de la fuente es $\pi(5)^2 = 25\pi$ m^2.

La superficie recubierta por el mármol es $36\pi - 25\pi = 11\pi = 34.557$ m^2.

Respuesta: La superficie recubierta por el mármol es 34.557 m^2.

Otras propiedades que se cumplen en toda circunferencia son:

1) Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
2) Toda recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.
3) Desde un punto exterior a una circunferencia se pueden trazar dos tangentes a ésta, entonces los segmentos desde el punto de tangencia al punto exterior serán iguales.
4) En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.
5) Arcos iguales en una circunferencia, subtienden cuerdas iguales.
6) Un radio o diámetro perpendicular a una cuerda, la corta a la mitad.

Ejercicios 3.7

6) El área de una moneda octagonal es de 6 cm^2 y su apotema mide 1.5 cm, ¿cuánto mide el lado de la moneda octagonal?

10) El diámetro de la glorieta de los Insurgentes mide aproximadamente 120 metros, se desea colocar a su alrededor una serie de focos de colores separados por 50 cm. ¿Cuántos focos se necesitan para lograrlo?

3.7.1 Problemas de aplicación.

En esta sección resolveremos otros ejercicios donde aplicaremos las propiedades de las figuras vistas en esta unidad.

Actividad 1. ¿Cuántas losetas debe comprar una persona para cubrir una superficie rectangular de 12×25 metros^2, si se estima que cada loseta es cuadrada de lado 30 cm?

Solución:

a) Como la superficie a cubrir tiene 12 m de ancho.

Realizamos la operación $\frac{1200\text{ cm}}{\quad} =$ ______

Es decir, necesita __________ losetas para cubrir 30 cm del ancho.

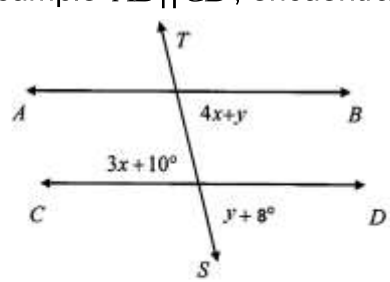
b) Como la superficie a cubrir tiene 25 m de largo.

Realizamos la operación $\frac{2500\text{ cm}}{\quad} =$ ______

Entonces se necesitan __________ losetas para cubrir 30 cm del largo.

c) Para cubrir toda la superficie rectangular se necesitan _____(______) = ___________ losetas, redondeando a enteros la respuesta es: La persona debe comprar ___________ losetas para cubrir toda la superficie.

Actividad 2. En la figura se cumple $AB \parallel CD$, encuentra el valor de x y de y.



Solución:

Los ángulos de medidas $4x + y$ y $3x + 10°$ son __________, por ser ________________

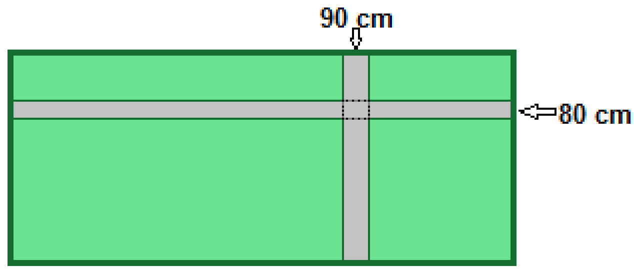
Los ángulos de medidas $3x + 10°$ y $y + 8°$ son __________, ya que son _____________

Tenemos un sistema de ecuaciones: ___________________ y ___________________

Que al resolverlo por el método que más se te facilite, se obtienen los valores:

x = _______ y = _____

Actividad 3. Un jardín rectangular tiene por dimensiones 35 m y 15 m. El jardín está dividido por dos caminos perpendiculares que forman una cruz. Uno tiene un ancho de 80 cm y el otro 90 cm. Calcula el área verde del jardín.



Solución:
Una forma de ver este jardín sería como se muestra en la figura, y una manera de resolverlo es restando áreas, es decir, área total – área de los caminos = área de la región verde del jardín.
Haciendo los cálculos se tiene: ________ – _________ = _________
Solo ten cuidado de no agregar dos veces la intersección de los caminos.
Respuesta: El área de la región verde del jardín es: _______________

Actividad 4. ¿Cuántos lados tiene un polígono **regular** si cada ángulo exterior mide 8°?
Solución:
Recordemos que la suma de los ángulos exteriores en todo polígono es ________.
Como este polígono es regular, cada ángulo exterior mide _______ y tiene _____ lados.
Es decir, n (8°) = _____ y despejando a n, resulta que n = ______.
Respuesta: El polígono tiene _____ lados.

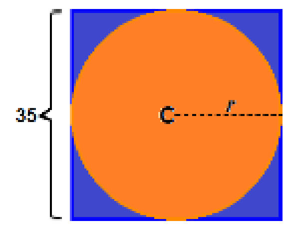
Actividad 5. Determina el área que recorren cada una de las manecillas de un reloj, en un giro completo, si la manecilla que marca las horas mide 0.8 cm, el minutero tiene 1.2 cm de largo y el segundero mide 1.5 cm.
Solución:
Cada manecilla recorre el área de un círculo, solo que con diferente radio.
Área de la manecilla de horas: $\pi(0.8)^2$ = __________
Área de la manecilla de minutos: $\pi(1.2)^2$ = __________
Área de la manecilla de segundos: $\pi(1.5)^2$ = __________

Actividad 6. ¿Cuántos metros recorre la rueda de una bicicleta si esta da tres vueltas, si el diámetro de cada rueda mide 55 cm?

Solución:
La bicicleta en una vuelta recorre el perímetro de la rueda, es decir, π (diámetro) cm.
Sustituyendo el valor del diámetro de la bicicleta se tiene π (_____) = _______ cm.
Si da tres vueltas la rueda, el recorrido será de ____________ metros.

Actividad 7. En un cuadrado de papel terciopelo de 35 cm de lado, Marifer trazó el círculo más grande que pudo y lo recortó. ¿Cuánto terciopelo no usó?

Solución:

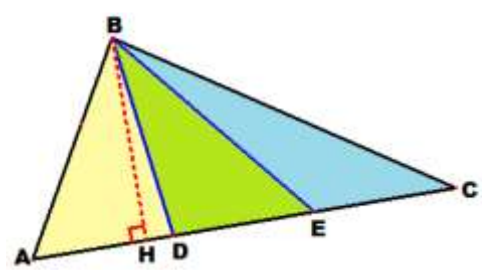


Si trazamos una figura entenderemos mejor el problema.
El radio del círculo mide: ______, entonces, el terciopelo que no uso es: área del cuadrado – área del círculo = ______ – _______ = _____

Respuesta: El área del terciopelo que no usó Marifer es _________.

Actividad 8. El señor Luis les dijo a sus tres hijos que había estado pintando la fachada de su casa, pero como estaba muy cansado no había terminado. Entonces, les pide que terminen de pintar lo que le faltó. Cuando los hijos se dispusieron a terminar el trabajo, se encontraron que faltaba por pintar una región triangular. ¿Cómo ayudarías a los tres hijos para dividir el trabajo en partes iguales?

Solución:
Como la región que falta por pintar es triangular, trazamos un triángulo y lo dividimos como se ve en la figura.



AC se divide en tres partes iguales, por los puntos D y E, es decir, AD = ____ = ____
Trazamos BH⊥AC, es decir, m∠BHA = ____, entonces la altura de los tres triángulos es el segmento ______. Y como sabemos que el área de un triángulo es: ____________________.

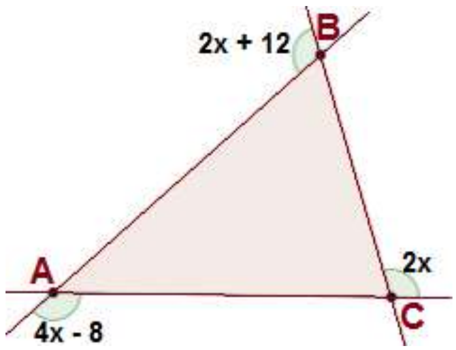
Entonces: área del ΔABD = ______________ área del ΔBDE = ______________
área del ΔBEC = ______________

Pero como AD = ____ = ____, se concluye que las tres áreas son ________________.
Esta es una forma de repartir las regiones, ya que existen otras.

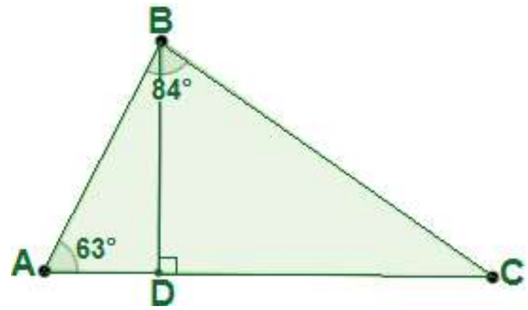
Ejercicios 3.7.1

Resuelve los siguientes ejercicios usando lo que aprendiste en esta unidad.

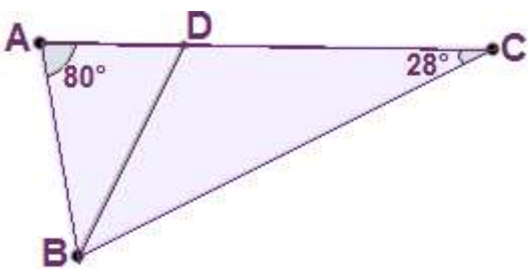
1) Encuentra la medida de cada ángulo interior en el siguiente triángulo.



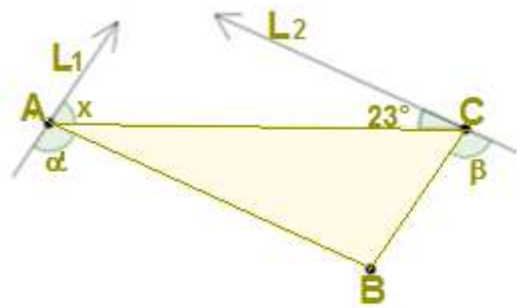
2) En la siguiente figura BD es altura, encuentra $\angle ACB + \angle ABD$.



3) En el siguiente triángulo BD es bisectriz del $\angle ABC$, ¿$\angle DBC$ = ?

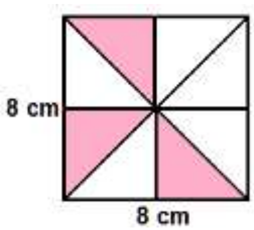


4) En el siguiente triángulo $\alpha + \beta = 200°$ L1 || BC y L2 || AB, encuentra la medida del $\angle x$.

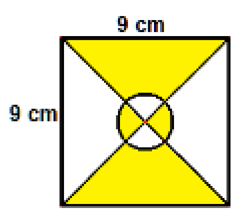


5) Hallar el área de la región sombreada en cada una de las siguientes figuras.

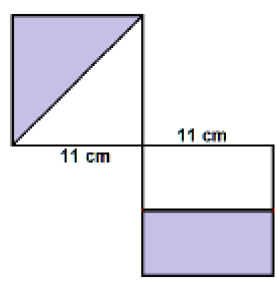
a)



b)



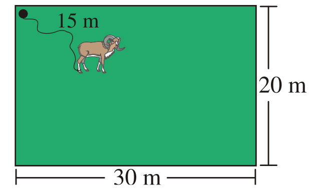
d)



7) Determina el área que recorren cada una de las manecillas de un reloj, en un giro completo, si la manecilla que marca las horas mide 10 cm, el minutero tiene 14 cm de largo y el segundero mide 16 cm.

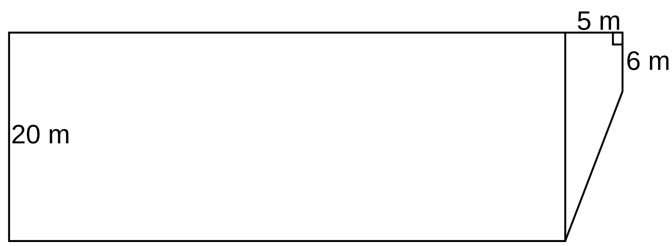
8) La rueda de una máquina aplanadora mide 1.70 m de diámetro y 2 m de ancho, ¿cuál es el área de aplanado por cada vuelta de la rueda?

9) Se ha atado una cabra con una cuerda de 15 m de longitud en una de las esquinas de un prado rectangular de 20 x 30 m. Calcular la superficie del prado en el que puede pastar la cabra y la superficie del prado en la que no puede pastar.

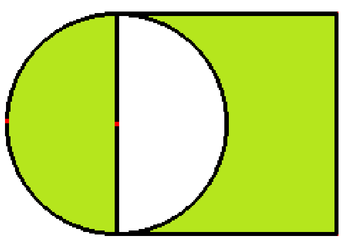


11) En un cuadrado de papel terciopelo de 40 cm de lado, Paty trazó el círculo más grande que pudo y lo recortó. ¿Cuánto papel terciopelo no usó?

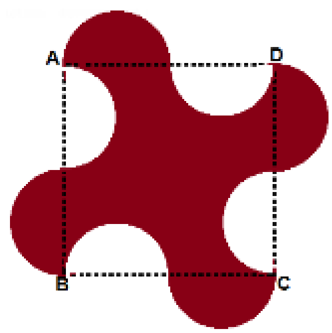
12) Una alberca tiene un área total de 765 m^2 y está formada por un rectángulo para los adultos y un trapecio para los niños como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de cada zona de la alberca? ¿Cuál es la longitud de la zona para adultos?



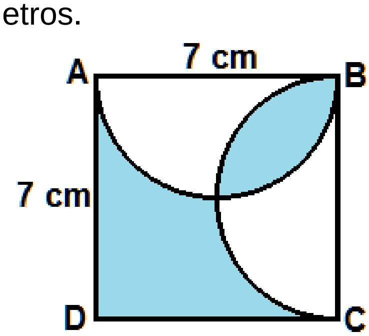
13) Si el lado del cuadrado mide 5 cm, ¿cuánto mide el área de la región sombreada?



14) Si ABCD es un cuadrado de lado 18 cm y las ocho semicircunferencias son congruentes, hallar el área de la región sombreada.



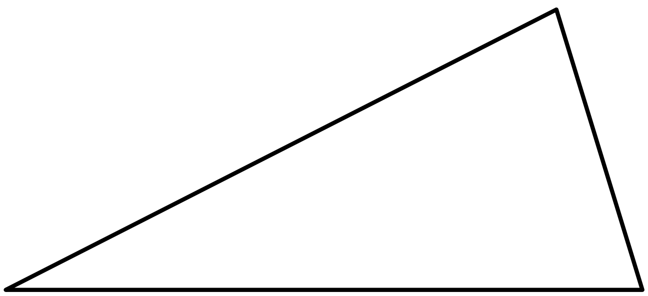
15) Hallar el área de la región sombreada, si AB y BC son diámetros.



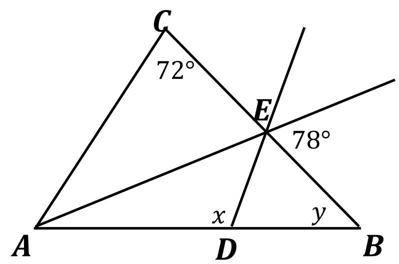
AUTOEVALUACIÓN

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.
Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1½ hora como máximo.
EN CADA EJERCICIO ESCRIBE TUS RAZONES O JUSTIFICACIONES.

1) En el siguiente triángulo, trazar sólo con regla y compás: a) el Baricentro y b) el círculo inscrito. Escribe paso por paso tu construcción.

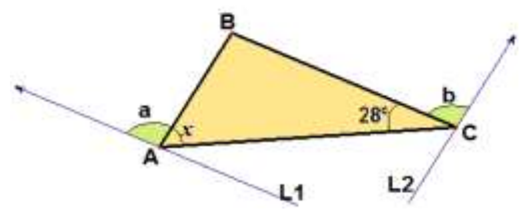


2)

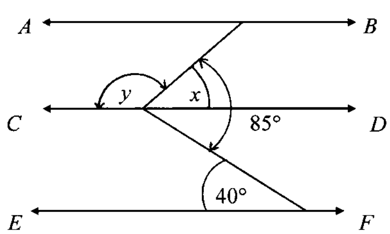


$\overline{AE}$ bisectriz de $\angle CAB$, $\overline{ED}$ bisectriz de $\angle AEB$. Hallar $\angle x$, $\angle y$.

4) a + b =184° y L1 || BC y L2 || AB, encuentra la medida del $\angle x$.

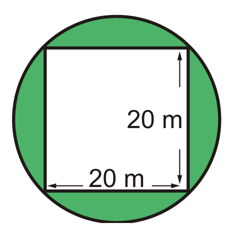


3) Datos : $AB \,||\, CD \,||\, EF$. Encuentra el valor de x y de y.



5) Se quiere dividir una región triangular en cuatro partes iguales, ¿cómo lo harías?, justifícalo.

6) Se ha construido una pista de patinaje cuadrada sobre un terreno circular, como indica la figura. El resto del terreno se ha sembrado de césped. Calcular: a) La superficie del terreno. b) La superficie de la pista. c) La superficie que queda con césped.



ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios.
Si resuelves bien 3 o menos, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, y hacer todos los ejercicios propuestos.
Si contestas bien 4 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 5 o 6 vas avanzando bien en tu estudio.

Bibliografía

Barnett, Rich. *Geometría* Plana con Coordenadas. Serie Schaum-s, Editorial macgraw hill, México, 1982.

Clemens, Stanley *et al*, *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*, Addison Wesley, México, 1989.

Euclides, Elementos de Geometría I - II, versión de Juan D. García Bacca, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 1992.

Garcia, Jesús y Bertrán, Celesti. *Geometría y Experiencias*, *Recursos Didácticos,* Alhambra, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

Miller, Charles et al. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999

Wentworth, J.; Smith, D. Geometría plana y del espacio. Ed. Porrúa. 24a. Ed. 1997.

Páginas Web, vistas el 28 de septiembre de 2014:

http://www.youtube.com/watch?v=QNrQCT9N6rQ&list=PLgZEwwjOo0OpfojR_cw8wxgOkXP0p12aR

http://www.youtube.com/watch?v=rKpSeftVe6w

http://www.youtube.com/watch?v=_wXCb_UexSM

http://math2me.com/playlist/geometria/puntos-notables-en-un-triangulo

http://math2me.com/playlist/geometria/mediatriz-punto-notable-de-un-triangulo

http://math2me.com/playlist/geometria/mediana-punto-notable-de-un-triangulo

http://math2me.com/playlist/geometria/altura-punto-notable-de-un-triangulo

http://www.youtube.com/watch?v=htIbCYFSyzk

http://www.youtube.com/watch?v=THNMV2MsVxg

http://www.youtube.com/watch?v=Uvrxoc-UQ-w

http://www.youtube.com/watch?v=np9b-xNOegc

"CADENA DE GEOMETRÍA ELEMENTAL"

Juego elaborado por la profesora Ana García Azcárate, Universidad de Madrid, España.

Esta actividad permite consolidar conceptos ya trabajados anteriormente. Está pensada para efectuar un repaso de varias propiedades de los polígonos. En concreto, el juego permite un repaso de los siguientes conceptos:

1. Polígonos.
   Nomenclatura de los polígonos en función del número de sus lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y octágonos, así como el Perímetro.
2. Triángulos: Triángulo escaleno, isósceles, equilátero.
3. Cuadriláteros: Trapecio; Rombo.
4. Circunferencia: Diámetro; Radio.
5. Ángulos: Agudo; Obtuso; Recto; Adyacentes; Consecutivos; Bisectriz.
6. Rectas: Semirrectas; Mediatriz; Segmento.

Materiales: Son un total de 27 cartas con las siguientes características: cada tarjeta tiene una pregunta "¿**Quién tiene**…?" en la parte inferior de cada carta, y una respuesta (a otra de las preguntas de la cadena) en la parte superior, empezando con "**Yo tengo**…"
Actividad: Las cartas del juego presentan una cadena de preguntas y las respuestas a estas preguntas. Se trata de una actividad colectiva que sólo necesita un conjunto de cartas. Tiene que haber al menos una por cada participante. Si sobra alguna tarjeta, se darán dos a algún alumno. En el caso contrario, se podrá ampliar la cadena con más cartas o hacer que dos alumnos compartan la tarjeta.
La cadena se cierra, es decir cada pregunta de una tarjeta, tiene una respuesta y sólo una.
Cuando se corta la cadena de preguntas y respuestas, por estar algún alumno despistado, se vuelve a leer la pregunta y si es necesario, entre el grupo se resuelve la pregunta y se reanuda el juego.

Actividad: Una forma de ayudar a que el juego se desarrolle con rapidez, es que el profesor vaya apuntando en el pizarrón las preguntas y las respuestas correspondientes. Las cartas que presentamos, están a modo de ejemplo, y se pueden sustituir o acompañar por otras cartas que contengan cualquier otro concepto que se haya visto antes en clase.
Reglas del juego: Juego a nivel grupal.
- Se reparte una tarjeta por alumno.

YO LO TENGO
trapecio.

¿QUIÉN TIENE
el nombre del
triángulo con sus
tres ángulos
iguales?

Tiene que haber al menos una por cada participante. Si sobra alguna tarjeta, se proporcionarán dos a algún alumno. En el caso contrario, se podrá ampliar la cadena con más tarjetas o hacer que dos alumnos compartan una tarjeta.

– Empieza cualquier alumno leyendo la pregunta de su tarjeta. Por ejemplo, empieza el alumno con la tarjeta:

Todos los alumnos miran sus cartas y contesta el alumno que posee la tarjeta con la solución:

YO LO TENGO el triángulo equilátero.
¿QUIÉN TIENE el nombre de la figura formada por dos semirrectas que parten del mismo punto inicial?

Ese alumno lee a su vez la pregunta de su tarjeta y contesta el que tenga la respuesta:

YO LO TENGO un ángulo.

¿QUIÉN TIENE cómo se llama un ángulo que mide menos de 90°?

Siguiendo la cadena de la misma forma, se cierra ésta hasta que todos los alumnos hayan contestado. Las cartas son las siguientes:

YO LA TENGO
semirrecta.

¿QUIÉN TIENE
el nombre de un cuadrilátero con 4 lados iguales?

YO LO TENGO
rombo.

¿QUIÉN TIENE
la palabra para designar lados y ángulos o figuras de igual medida?

YO LA TENGO
congruentes.

¿QUIÉN TIENE
el nombre para un triángulo con solo dos lados iguales?

YO LO TENGO
triángulo isósceles.

¿QUIÉN TIENE
el nombre de dos rectas que se cortan formando ángulos rectos?

YO LO TENGO
perpendiculares

¿QUIÉN TIENE
el nombre del cuadrilátero con solo un par de lados paralelos?

YO LO TENGO
trapecio.

¿QUIÉN TIENE
el nombre del triángulo con sus tres ángulos iguales?

YO LO TENGO
el triángulo equilátero.

¿QUIÉN TIENE el nombre de la figura formada por dos semirrectas que parten del mismo punto inicial?

YO LO TENGO
un ángulo.

¿QUIÉN TIENE
cómo se llama un ángulo que mide menos de 90°?

YO LO TENGO
ángulo agudo.

¿QUIÉN TIENE el nombre de dos rectas en el mismo plano, que por más que las prolonguen nunca se cortan?

YO LO TENGO paralelas.

¿QUIÉN TIENE el nombre de un polígono de seis lados?

YO LO TENGO un hexágono.

¿QUIÉN TIENE la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia?

YO LA TENGO el diámetro.

¿QUIÉN TIENE el nombre de un triángulo que no tiene lados iguales?

YO LO TENGO un octágono.

¿QUIÉN TIENE el nombre de un ángulo que mide más de 90° pero menos de 180°?

YO LO TENGO obtuso.

¿QUIÉN TIENE el nombre de la longitud de la línea poligonal que encierra un polígono?

YO LO TENGO triángulo escaleno

¿QUIÉN TIENE el nombre de un polígono de ocho lados?

YO LO TENGO perímetro.

¿QUIÉN TIENE el nombre de la línea que encierra a un círculo?

YO LO TENGO circunferencia.

¿QUIÉN TIENE el nombre del segmento que une el centro y un punto cualquiera de una circunferencia?

YO LO TENGO el radio.

¿QUIÉN TIENE el término con el que se nombra a un ángulo de 90°?

YO LO TENGO
ángulo recto.

¿QUIÉN TIENE el nombre de un polígono de 4 lados?

YO LO TENGO
cuadrilátero.

¿QUIÉN TIENE el nombre del trozo de recta comprendido entre los puntos A y B?

YO LO TENGO
segmento.

¿QUIÉN TIENE cómo se nombra a las figuras con la misma forma pero de tamaño diferente?

YO LO TENGO
semejantes.

¿QUIÉN TIENE el nombre del punto común de las dos semirrectas que forman un ángulo?

YO LO TENGO
el vértice.

¿QUIÉN TIENE cómo se le nombra a dos ángulos que suman 180°?

YO LO TENGO
suplementarios.

¿QUIÉN TIENE el nombre de la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio?

YO LO TENGO
mediatriz.

¿QUIÉN TIENE cómo se le nombra a dos ángulos que suman 90°?

YO LO TENGO
complementarios.

¿QUIÉN TIENE el nombre de la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales?

YO LO TENGO
bisectriz.

¿QUIÉN TIENE cómo se llaman a cada una de las partes cuando una línea recta es dividida en dos?