Matemáticas II.

Unidad 2. Funciones Cuadráticas

PROPÓSITO DE LA UNIDAD

✍*Al finalizar, el alumno:*

Analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica y analítica. Resolverá problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.

Tiempo: 15 horas

CONTENIDO

2.1 Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.

2.2 Estudio gráfico, analítico y contextual de la función: $y = ax^2 + bx + c$, en particular: $y = ax^2$; $y = ax^2 + c$; $y = a(x-h)^2 + k$

2.3 Forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$.

2.4 Ceros de la función.

2.5 La función $y = ax^2 + bx + c$ y sus propiedades gráficas.

2.4.1 Simetría, concavidad, máximo o mínimo.

2.6 Problemas de aplicación.

Autoevaluación.

Bibliografía.

PRESENTACIÓN

Continuando con el curso de Matemáticas II, la Unidad 2 se enfoca en el estudio de la función cuadrática, lo que permite por un lado, que avances en el concepto de función al introducir ahora un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría, y por otro, vincularas estas funciones con las ecuaciones cuadráticas que recién has trabajado, aspecto que enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones y la función cuadrática.

Si los conceptos se reducen sólo a su definición se corre el riesgo de no producir aprendizajes, por lo que, analizarás los diferentes registros de representación de la función cuadrática y la relación que existe entre ellos; representarás gráficamente una función cuadrática a partir de sus puntos notables; y aplicarás sus propiedades en la resolución de problemas de optimización, particularmente, cuando se trata de encontrar valores máximos o mínimos. Esto, a través de diversas actividades, ejercicios y ejemplos diseñados con base a los aprendizajes que marca el programa.

Por otra parte, desde el principio de la unidad se propone trabajar con algunos conceptos que muestran cierta relación, como concavidad, punto máximo/mínimo, simetría, vértice, con la intención de integrarlos en la medida de lo posible y no trabajarlos de manera aislada. Donde su tratamiento en diversas situaciones ayudará a que logres una mejor conceptualización de ellos.

Al finalizar la unidad proponemos una autoevaluación donde tu evaluaras lo que has aprendido, además de un juego donde también practicaras lo visto en esta unidad, es un memorama donde asociaras a varias funciones cuadráticas con su respectiva gráfica, esperamos que tu profesor lo ponga en práctica.

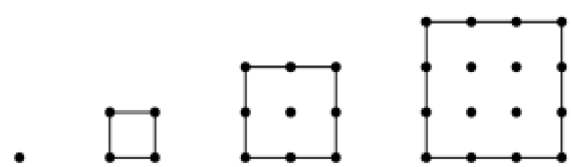
Conceptos clave. Función cuadrática; intersecciones con los ejes; concavidad; punto máximo/mínimo; forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$.

2.1 Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.

Sin lugar a duda, existen diversas situaciones que se pueden modelar mediante un objeto matemático, particularmente en esta unidad, mediante una función cuadrática. Su uso permite determinar con mayor facilidad ciertos aspectos que a primera instancia cuestan mucho trabajo obtener. En este sentido, con las siguientes actividades se pretende expresar la generalidad a través de observar, buscar regularidades, establecer patrones y conjeturas hasta llegar al modelo algebraico.

Nota: En cada uno de los siguientes problemas completar donde sea necesario.

Problema 1. Observa la siguiente secuencia de números cuadrangulares.



a) ¿Cuántos puntos contiene en total la figura con 2 puntos en su base? ______________

b) ¿Y con 3 puntos en su base? __________ ¿Y con 4 puntos en su base? ___________

c) ¿Y con 7 puntos en su base? __________ ¿Y con 325 puntos en su base? _________

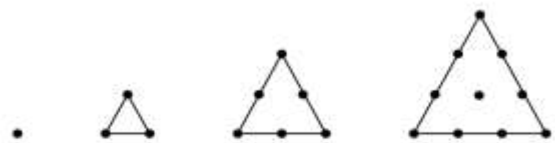
d) De manera general, si n representa el número de puntos de la base, escribe un modelo algebraico que ayude a determinar cuántos puntos contiene en total una figura con n puntos en su base: ________________.
O bien, al escribirla como función, se tiene: $p(n)$ = _____________
Donde p representa el número de puntos en total que tiene la figura y n los puntos de la base.

En caso de que no hayas encontrado la función puedes seguir la siguiente sugerencia:

- Trata de visualizar un patrón de comportamiento en el conteo de los puntos.
- ¿Presenta alguna relación la forma de calcular el área de un cuadrado?

e) Utilizando la función que encontraste, ¿cúantos puntos contiene en total la figura con 250 puntos en su base? $p(250)$ = _____________

Problema 2. Observa la siguiente secuencia de números triangulares.



a) ¿Cuántos puntos contiene en total la figura con 2 puntos en su base? ____________

b) ¿Y con 3 puntos en su base? __________ ¿Y con 4 puntos en su base? ___________

c) ¿Y con 7 puntos en su base? _________ ¿Y con 325 puntos en su base? ___________

d) De manera general, si n representa el número de puntos de la base, escribe un modelo algebraico que ayude a determinar cuántos puntos contiene en total una figura con n puntos en su base: _________________.
O bien, al escribirla como función, se tiene: $p(n)$ = ____________

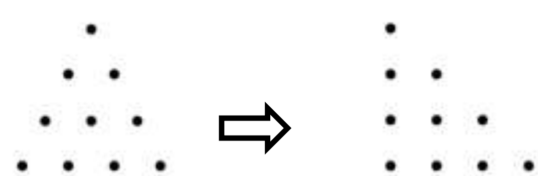
En caso de que no hayas encontrado la función puedes seguir la siguiente sugerencia:

¿Puedes utilizar tu estrategia anterior para resolver este nuevo caso?

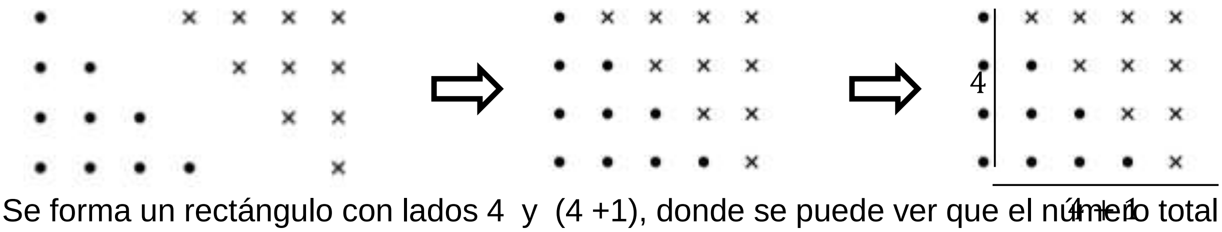
Tratemos de transformar esta figura triangular en una figura cuya área se pueda calcular sin ninguna dificultad como en la actividad 1. Veamos:

Por ejemplo, el número total de puntos que tiene un triángulo con 4 puntos en su base es 1 + 2 + 3 + 4 = 10 puntos. Veamos otra manera de obtener dicho resultado.

El triángulo de 4 puntos en su base (o cuarto número triangular) se puede colocar como sigue:



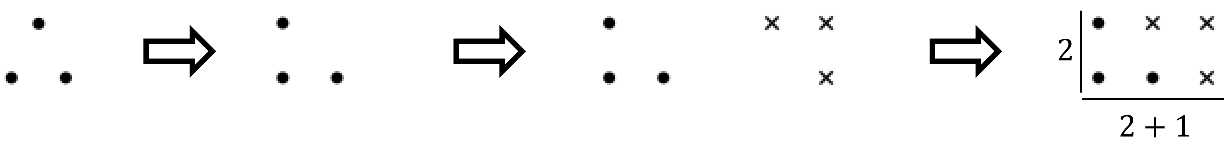
Ahora, formemos un triángulo igual al elegido (de 4 puntos en su base), lo colocamos de manera invertida y los unimos para formar una figura. ¿Qué figura se obtiene?



Se forma un rectángulo con lados 4 y (4 +1), donde se puede ver que el número total de puntos del triángulo elegido (con cuatro puntos en su base) es igual a la mitad del rectángulo formado, esto es, la mitad de su área. Así,

$$p(4) = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{(4)(4+1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Para un triángulo con dos puntos en su base (segundo número triangular) se tienen 3 puntos en total, esto es, 1 + 2 = 3, o bien, hacemos:

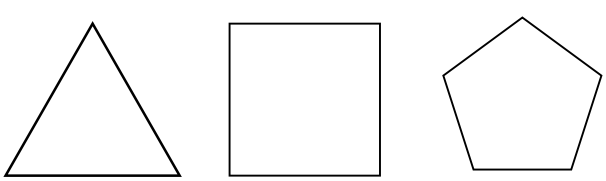


$$p(2) = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{(2)(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Continuando con tal estrategia, de manera general, para un triángulo con n puntos en su base se tiene: $p(n) = \frac{n(\qquad)}{\qquad}$, o bien, $p(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

e) Utilizando la función que encontraste, ¿cúantos puntos contiene en total la figura con 351 puntos en su base? $p(351)$ = ____________

Problema 3. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?



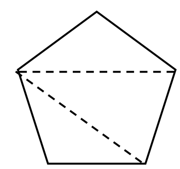
...

Solución:

Primero analicemos cuántas diagonales genera **un sólo vértice** en diferentes polígonos, para ello, completa la siguiente tabla:

Número de lados de un polígono.	Número de vértices que tiene el polígono.	Elige un vértice, el número de vértices disponibles para formar las diagonales a partir del vértice elegido es:	Número de diagonales que obtienes a partir del vértice elegido es:	Número de vértices que no se relacionan, incluyendo el vértice elegido es:
4				
5	5	2	2	3
6				
10				

Figura que ejemplifica el caso de un polígono de 5 lados:



Con base en la tabla, se puede generalizar de la siguiente forma:

- El número de lados de cualquier polígono es igual al número de ______________________.
- Al elegir **un vértice**, el número de vértices disponibles para formar diagonales desde el vértice elegido es igual al número de _________________.
- En todo polígono, el número de vértices que no se relacionan incluyendo el vértice de partida es: ______.
- En todo polígono, al elegir **un vértice** éste se relaciona con todos los vértices excepto 3, entonces, el número de diagonales que se pueden trazar a partir de **un vértice** es: _________
- Por lo tanto, para un polígono de n lados se tiene: (completa la siguiente tabla como la anterior)

n				

Entonces, el número de diagonales (desde un vértice del polígono) = número de lados o vértices ____________________. Esto es, para un vértice, $\# d = n$__________

De esta forma, ya puedes calcular el número de diagonales que genera **un sólo vértice**. Ahora bien, para saber cuántas diagonales tiene en total un polígono de n lados hay que sumar sus diagonales. Veamos como:

El número de diagonales que se obtienen a partir de **un sólo vértice** es: $(n-3)$
Para obtener la suma total de diagonales que se obtienen a partir de dos vértices multiplicamos $(n-3)$ por 2, así: $2(n-3)$
La suma total de diagonales a partir de tres vértices será: ____$(n-3)$
Para n vértices se tiene: ____$(n-3)$

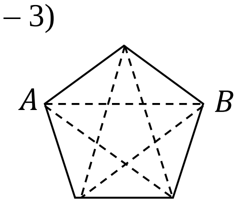


Figura 1

Por ejemplo, para un polígono de cinco lados (figura 1) la suma total de las diagonales trazadas desde sus vértices es 10, esto es, $5(5-3)=10$, lo cual es correcto. Pero como se puede observar en la figura 1 sólo tiene 5 diagonales diferentes y no 10, esto porque las diagonales de cada vértice se cuentan dos veces, por ejemplo, la diagonal AB se cuenta cuando eliges el vértice A y cuando eliges el vértice B.
Por lo tanto, para determinar cuántas diagonales tiene este polígono hay que dividir entre dos la suma total de las diagonales, así: $\frac{5(5-3)}{2}=\frac{5(2)}{2}=\frac{10}{2}=5$ diagonales.

Para el polígono de cuatro lados se tiene: $\frac{4(4-3)}{2}=\frac{4(1)}{2}=\frac{4}{2}=2$ diagonales.

De manera general, para determinar cuántas diagonales tiene un polígono de n lados se tiene: $\frac{\quad(\qquad)}{2}=$

O bien, al escribirla como función: $d(n)=\frac{\quad(\qquad)}{2}=$_________________

a) Utilizando la función que encontraste, ¿cúantas diagonales se pueden trazar en un polígono de 100 lados? $d(100)=$ ____________

Problema 4. A una reunión asistieron 200 personas, si cada persona saluda con un apretón de manos a cada una de las otras ¿cuántos apretones de manos hubo en total?

Solución:

Intenta encontrar el modelo que ayude a resolver el problema. En caso de que no hayas encontrado la función puedes seguir las siguientes sugerencias:

Opción 1. Trata de resolver casos particulares y observa qué sucede.
Recuerda que un saludo se da entre dos personas. Entonces,
Entre dos personas (A y B) hay: 1 saludo.
Entre tres personas (A, B y C) hay: A con B, A con C, y B con C, en total 3 saludos.
Entre cuatro personas (A, B, C y D) hay: A con B, A con C, A con D, B con C, B con D, y C con D, en total 6 saludos.

Entre 3 personas se dan 3 saludos, lo cual se obtiene sumando 1 + 2 = 3. Otra forma de obtener este resultado es haciendo:

$$\begin{array}{rcc} + & 1 & 2 \\ & 2 & 1 \\ \hline & 3 & 3 \end{array}$$

esto es, $\frac{3(2)}{2}=3$

En ésta expresión, ¿qué representa el 3 y el 2 en el numerador, y qué representa el 2 en el denominador?

____

____

Entre 4 personas se dan 6 saludos, esto es 1 + 2 + 3 = 6. Que también se puede obtener si hacemos:

$$\begin{array}{r} \;1 \quad 2 \quad 3 \\ +\;3 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 4 \quad 4 \quad 4 \end{array} \qquad \text{esto es, } \frac{4(3)}{2} = 6$$

En ésta expresión, ¿qué representa el 4 y el 3 en el numerador, y qué representa el 2 en el denominador?

____

____

Entre 5 personas se dan 10 saludos, esto es 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Otra forma de obtener el total de saludos es haciendo:

$$\begin{array}{r} \;1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ +\;4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \end{array} \qquad \text{esto es, } \frac{(\qquad)}{\qquad} =$$

Siguiendo tal estrategia, de manera general, si asisten n personas se dan $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$ saludos. Cuya suma es igual a:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \\ +\; n-1 & n-2 & n-3 & \ldots & 2 & 1 \\ \hline n & n & n & \ldots & n & n \end{array} \qquad \text{esto es, } \frac{(\qquad)}{\qquad} =$$

Al escribirla como función, se tiene: $s(n) = \frac{(\qquad)}{2} =$

a) Utilizando la función que encontraste, ¿cúantos apretones de manos se pueden dar en total si asisten 200 pesonas a la reunión? $s(200)$ = __________

Opción 2. ¿Puedes aplicar las estrategias antes vistas para resolver este nuevo caso? Analiza casos particulares, por ejemplo, si se tienen 10 asistentes el número de saludos es:

10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
~~1~~	~~2~~	3	4	5	6	7	8	9	10
~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	5	6	7	8	9	10
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8	9	10
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6	7	8	9	10
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	8	9	10
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	8	9	10
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	9	10
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	10

10 – 1

Entonces,

$s(10)$ = __________

En el caso anterior asistieron sólo 10 personas. De manera general, si asisten n personas, el número de saludos es: $s(n) = \frac{(\qquad)}{\qquad}$

A este tipo de expresiones, donde la variable independiente esta elevada al cuadrado reciben el nombre de funciones cuadráticas. Veamos un poco más.

Problema 5. Escribe la fórmula del área de un círculo en función del radio. ¿Qué tipo de función es?
Solución: $A(r)$ = ______________

Problema 6. Se tienen 100 metros de malla y se quiere cercar un terreno rectangular, expresa el área del terreno en función de su ancho (y) o su largo (x).

Solución:
Recuerda que, el perímetro de un rectángulo es igual a ________________________,
y su área se calcula como _________________.


y
x

Si se tienen 100 m de malla para rodear el terreno, entonces:

$$2x + 2y = \_\_\_\_\_$$

Se pide expresar el área en términos de x ó y. Entonces, en la fórmula del área $A = xy$ el lado derecho debe tener la misma variable. Para ello, despejemos una de las variables de la ecuación del perímetro y la sustituimos en la fórmula del área. Así:

Al despejar x se tiene: x = ___________
Al sustituir este valor se obtiene: $A(y) = y(\qquad\qquad) = -y^2 + 50y$

Para reflexionar:
¿Qué valores puede tomar y? ¿Cuáles no? ¿Por qué?
¿Cuáles son las dimensiones del terreno para obtener la máxima área?

Problema 7. El director de un teatro estima que si cobra \$30 por localidad, podría contar con 500 espectadores. Y que por cada \$1 de descuento estima 100 personas más. Calcular los ingresos obtenidos en función del número de rebajas del precio.

Solución: (Completa la siguiente tabla)

Descuento	0	1	2	3 . . .	x
Precio	\$30	\$(30 – 1)	\$(30 – 2)	\$(30 – 3)	

Número de espectadores	500	500 + 100(1)	500 + 100(2)	500 + 100(3)	
Ingresos (I)	(30)(500)	(30 – 1)[500 + 100 (1)]	(30 – 2)[500 + 100 (2)]	(30 – 3)[500 + 100 (3)]	

$I(x)$ =______________

Para reflexionar: ¿Cuánto deberá descontarse para obtener el máximo ingreso?

Como recordarás una función lineal es de la forma $y = ax + b$, y las actividades anteriores dieron lugar a expresiones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$, que reciben el nombre de **funciones cuadráticas** o también llamadas función polinómica de grado dos.
Ahora veamos otra forma de poder identificar y diferenciar cuándo cierta situación genera o representa una función cuadrática, esto es, mediante una *tabla de valores*.

Actividad 1. Las siguientes tablas representan una función ¿cuál de ellas representa a una función lineal y cuál a una función cuadrática?

a)

x	y
-3	14
-2	11
-1	8
0	5
1	2
2	-1
3	-4

b)

x	y
-3	31
-2	17
-1	7
0	1
1	-1
2	1
3	7

Sin duda, puedes darte cuenta cuál representa a una función cuadrática al observar la relación entre la variable y y la variable x, y determinar el modelo algebraico, o bien, hacer las gráficas correspondientes. Otro método que nos permite hacer este análisis es el explorar la *variación* calculando las *primeras y segundas diferencias* de la función.

Las *primeras diferencias* se calculan restando dos términos consecutivos de la sucesión (valores de y); y las *segundas diferencias*, restando dos términos consecutivos de las primeras diferencias.

Para calcular las primeras y segundas diferencias de una función, la tabla de valores debe estar compuesta de manera que las diferencias en x sean constantes.

Así, las diferencias quedan como sigue:

Para a) las primeras y segundas diferencias son:

x	y	Diferencia en x	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-3	14			
-2	11	1	$11-14=-3$	
-1	8	1	$8-11=-3$	$-3-(-3)=0$
0	5	1	$5-8=-3$	$-3-(-3)=0$
1	2	1	$2-5=-3$	$-3-(-3)=0$
2	-1	1	$-1-2=-3$	$-3-(-3)=0$
3	-4	1	$-4-(-1)=-3$	$-3-(-3)=0$

De la tabla, se puede observar que los resultados de las primeras diferencias en y son constantes, es decir, se tiene el mismo resultado.

Para b) las primeras y segundas diferencias son:

x	y	Diferencia en x	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-3	31			
-2	17	1	-14	
-1	7	1	-10	$-10-(-14)=-10+14=4$
0	1	1	-6	$-6-(-10)=-6+10=4$
1	-1	1	-2	$-2-(-6)=-2+6=4$
2	1	1	2	$2-(-2)=2+2=4$
3	7	1	6	$6-(2)=6-2=4$

De la tabla, se puede observar que los resultados de las segundas diferencias son constantes, mientras que las primeras diferencias no lo son.

¿Cómo determinas qué tabla representa a una función cuadrática y cuál a una lineal, con base a los resultados de las primeras y segundas diferencias? ________________

____

____

Actividad 2. Calcula las primeras y segundas diferencias de las funciones:
a) $y=-x^2+3x+4$ b) $y=5x-2$ c) $y=\frac{2}{3}x^2+4x-6$ d) $y=-7x+3$, para $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Solución:
a) $y=-x^2+3x+4$, para esta función se tiene:

x	$y=-x^2+3x+4$	Diferencia en x	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-1	$y=-(-1)^2+3(-1)+4=0$			
0	$y=-(0)^2+3(0)+4=4$	$0-(-1)=1$	$4-0=4$	

1	6	1 – 0 = 1	6 – 4 = 2	2 – 4 = – 2
2	6	2 – 1 = 1	6 – 6 = 0	0 – 2 = – 2
3	4	3 – 2 = 1	4 – 6 = – 2	– 2 – 0 = – 2

De la tabla podemos decir que para una función cuadrática los resultados de las segundas diferencias son ___________________, mientras que las primeras diferencias en y son ___________________.

b) $y = 5x - 2$, en esta función tenemos: (Completa la siguiente tabla)

x	$y = 5x - 2$	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-1	$y = 5(-1) - 2 =$		
0	$y = 5(0) - 2 =$		
1	$y = 5(1) - 2 =$		
2			
3			

De la tabla podemos decir que para una función lineal los resultados de las primeras diferencias en y son ___________________, mientras que las segundas diferencias son ___________________.

c) $y = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 6$, completando la siguiente tabla:

x	$y = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 6$	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-1			
0			
1			
2			
3			

Las primeras diferencias en y son _______________________.
Las segundas diferencias son ________________________.

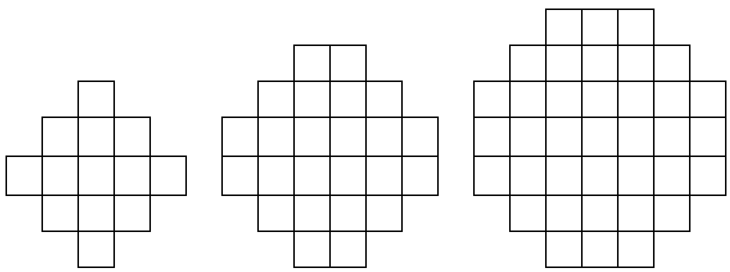
¿Qué pasa con d) $y = -7x + 3$? (Completa la siguiente tabla)

x	$y = -7x + 3$	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
– 1			
0			
1			
2			
3			

Las primeras diferencias en y son ______________________.
Las segundas diferencias son _______________________.
Con base a lo anterior, se puede concluir que:
Si las primeras diferencias son costantes, entonces, la función que representa esta tabla es _______________.
Si las segundas diferencias son costantes, entonces, la función que representa esta tabla es _______________.

Ejercicios 2.1

1) Observa la siguiente secuencia de figuras y contesta lo que se te pide.



a) Si la figura tiene 5 cuadrados en su base, ¿cuántos cuadrados del mismo tamaño (de su base) contendrá la figura en total?
b) ¿Cuántos cuadrados en total tendrá una figura si su base consta de 55 cuadrados?
c) ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura que tiene n cuadrados en su base?

2) Después de varios días de observación un biólogo planteó una hipótesis acerca del comportamiento de las mariposas. "El número de mariposas que se ven en el campo es directamente proporcional al cuadrado de la temperatura". Para una temperatura de 32° C, el biólogo contó 81 mariposas.
¿Cuántas mariposas habrá cuando la temperatura sea de 15° C?

3) Hay un terreno rectangular muy grande en el que se construirá un parque con varias zonas, de tamaño y forma diversos. Imagina que eres parte de la comisión encargada del diseño de las calles de acceso a las distintas zonas. Como es de esperar, se tiene que invertir la menor cantidad de dinero en abrir calles de acceso a las distintas zonas. La tarea de la comisión consiste en encontrar el número de calles que se requerirán para crear 30 zonas. Recuerda que se necesita la menor cantidad de calles.

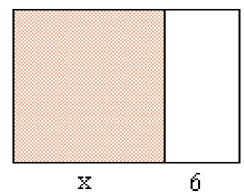
4) La distancia de seguridad que deben guardar los coches entre sí, en circulación, se organiza en la tabla siguiente:

Velocidad (km/h)	Distancia de seguridad (m)
10	1
20	4
30	9
40	16
50	25
…	…

Expresa la distancia de seguridad en función de la velocidad.

5) Expresar el área del triángulo equilátero en función del lado. ¿Qué función se obtiene?

6) Si a un cuadrado le aumentamos 6 unidades a un par de lados opuestos, calcula el área del rectángulo en función del lado x del cuadrado.



7) Construcción de un rectángulo bajo ciertas condiciones y cálculo de su área, donde su base sea una magnitud x.

a) Construye un rectángulo de tal manera que: se encuentre en el primer cuadrante, uno de sus vértices sea el origen del sistema coordenado; otro vértice se encuentre sobre la recta $y = -2x + 8$, donde el segmento que une a éstos vértices sea una diagonal del rectángulo.
b) Bajo estas mismas condiciones, ¿cuántos rectángulos se pueden construir? Construye al menos 4.

Con base a los rectángulos que se pueden obtener en b), responde el resto de los incisos.

c) Construye una tabla en donde se muestre la longitud de los lados de cada rectángulo y sus áreas correspondientes.
d) Determinar el área de un rectángulo donde su base sea una magnitud x.
e) ¿Existe un rectángulo que tenga un área de $9cm^2$?
f) Describe lo que observas respecto al comportamiento del área de los rectángulos.
g) ¿Existe un valor de área máxima en donde sólo exista un rectángulo con esa área? ¿Puedes calcular el valor del área y las dimensiones de ese rectángulo?

8) Calculando las primeras y segundas diferencias, determina cuál de las siguientes tablas representan a una función cuadrática.

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2
Y	27	13	3	-3	-5	-3

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	17	11	5	-1	-7	-13

c)

x	-1	0	1	2
y	$\frac{30}{7}$	8	$\frac{72}{7}$	$\frac{78}{7}$

9) Calcula las primeras y segundas diferencias de las funciones:

a) $y = 2x^2 - 4x - 3$ b) $y = -6x + 5$ c) $y = -\frac{5}{7}x^2 + 3x + 8$

para $x = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

2.2 Estudio gráfico, analítico y contextual de la función: $y = ax^2 + bx + c$, en particular: $y = ax^2$; $y = ax^2 + c$; $y = a(x - h)^2 + k$

En el capitulo anterior se analizó la variación lineal y cuadrática de una función, pero, ¿qué más las hace diferentes? ¿Cómo es la gráfica de una función cuadrática?

Actividad 1. Traza la gráfica de la función $y = x^2$.

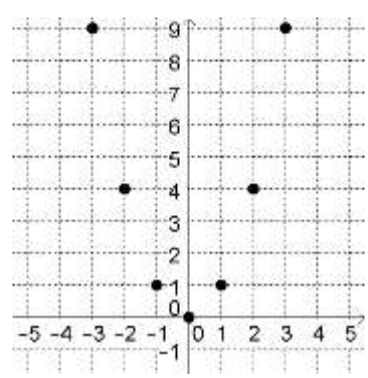
Solución:

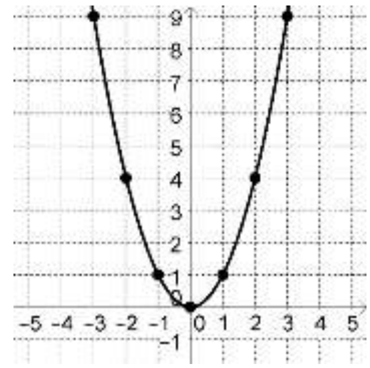
Para trazar la grafica de una función recuerda que, x representa a la variable independiente y puede tomar cualquier valor numérico. Mediante una tabla encontremos los valores correspondientes para y sustituyendo el valor de x en la función, asi:

x	$y = x^2$
-3	$y = (-3)^2 = 9$
-2	$y = (-2)^2 = 4$
-1	1
0	0
1	1
2	$y = (2)^2 = 4$
3	9

De la tabla se obtienen las parejas ordenadas $(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$ y $(3, 9)$.

Ubicamos estos puntos en el plano cartesiano:





Los unimos mediante una curva suave.

La gráfica resultante recibe el nombre de **parábola**.

Para practicar un poco más el trazo de las funciones cuadráticas, realiza la siguiente actividad.

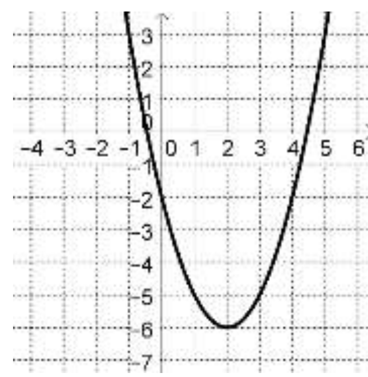
Actividad 2. Traza las gráficas de las funciones: a) $y = x^2 - 4x - 2$
b) $y = -x^2 - 2x + 5$ c) $y = 2x^2 + 4x + 2$ d) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 1$

Solución:

a)

x	$y = x^2 - 4x - 2$
-1	$y = (-1)^2 - 4(-1) - 2 = 3$
0	$y = (0)^2 - 4(0) - 2 = -2$
1	$y = (1)^2 - 4(1) - 2 = -5$
2	
3	
4	
5	

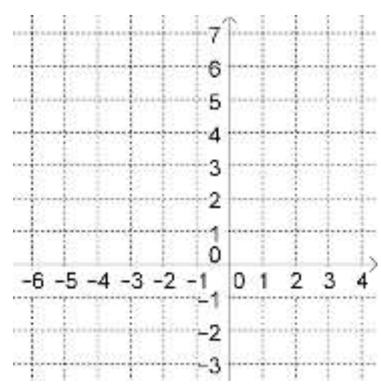
$\longrightarrow$



b)

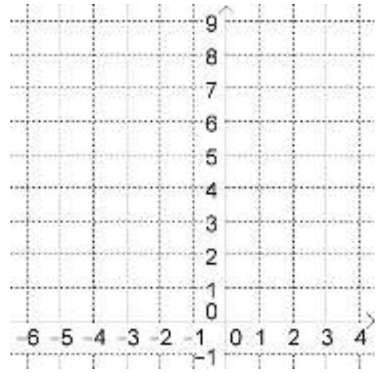
x	$y = -x^2 - 2x + 5$
-4	$y = -(-4)^2 - 2(-4) + 5 = -3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

$\longrightarrow$



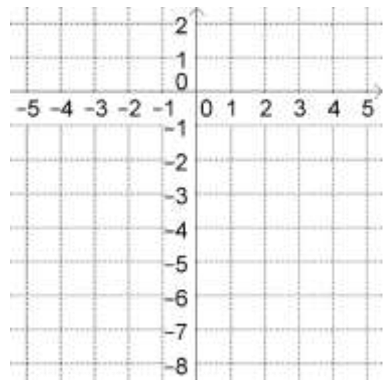
c)

x	$y = 2x^2 + 4x + 2$
-3	$y = 2(-3)^2 + 4(-3) + 2 = 8$
-2	
-1	
0	
1	



d)

x	$y = -\frac{1}{3}x^2 - 1$



Como se puede ver, la gráfica de una función cuadrática presenta diversas características. Por ejemplo:

- Algunas abren “hacia arriba” y otras “hacia _________”, a este comportamiento se le llama *cóncava hacia arriba* y *cóncava hacia abajo*, respectivamente.

- Dado que una gráfica se lee en el plano cartesiano de izquierda a derecha, se observa que algunas comienzan a crecer hasta llegar a un *punto máximo* y después comienzan a decrecer, o bien, inician decreciendo hasta llegar a un *punto mínimo* y después comienza a ___________.

  A este punto maximo o mínimo tambien se le conoce como el *vértice* de la parábola. Que además, es por donde pasa su eje de simetría.

- La parábola presenta cierta simetría, partiendo del caso más característico, $y = x^2$, el valor de la ordenada y es igual para x y $-x$. Esto provoca que la gráfica sea simétrica respecto al eje y.
  La recta del *eje de simetría* resulta importante cuando se trata de graficar una función cuadrática, pues divide a la parábola justamente a la mitad, es decir, cualquier punto de la parábola tendrá un punto homólogo al otro lado de este eje.

Estas son sólo algunas caracteristicas pero existen más, analicemos cuáles son y a qué se debe.

Como te habrás dado cuenta, para trazar la gráfica de la mayoría de parábolas es muy fastidioso y pesado, por ejemplo para trazar la gráfica de $y = x^2 - 32x + 259$, sin lugar a dudas a de costar un poco de trabajo, ¿habrá un método más eficiente?

Como recordarás, para trazar la gráfica de una función lineal basta con utilizar la pendiente y la ordenada al origen, aquí se pretende algo similar. Para trazar la gráfica de una función cuadrática bastará con utilizar el significado de los parámetros en cuestión. Para ver cómo se hace, hagamos un análisis por casos, primero, veamos qué pasa con la familia de parábolas de la forma $y = ax^2$.

Caso 1: $\boldsymbol{y = ax^2}$.

1. Si ya conoces la gráfica de $y = x^2$, ¿cómo serán las gráficas de $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 5x^2$?____ Comprueba tu respuesta trazándolas en el siguiente plano cartesiano. (Usa colores diferentes para que las diferencies)

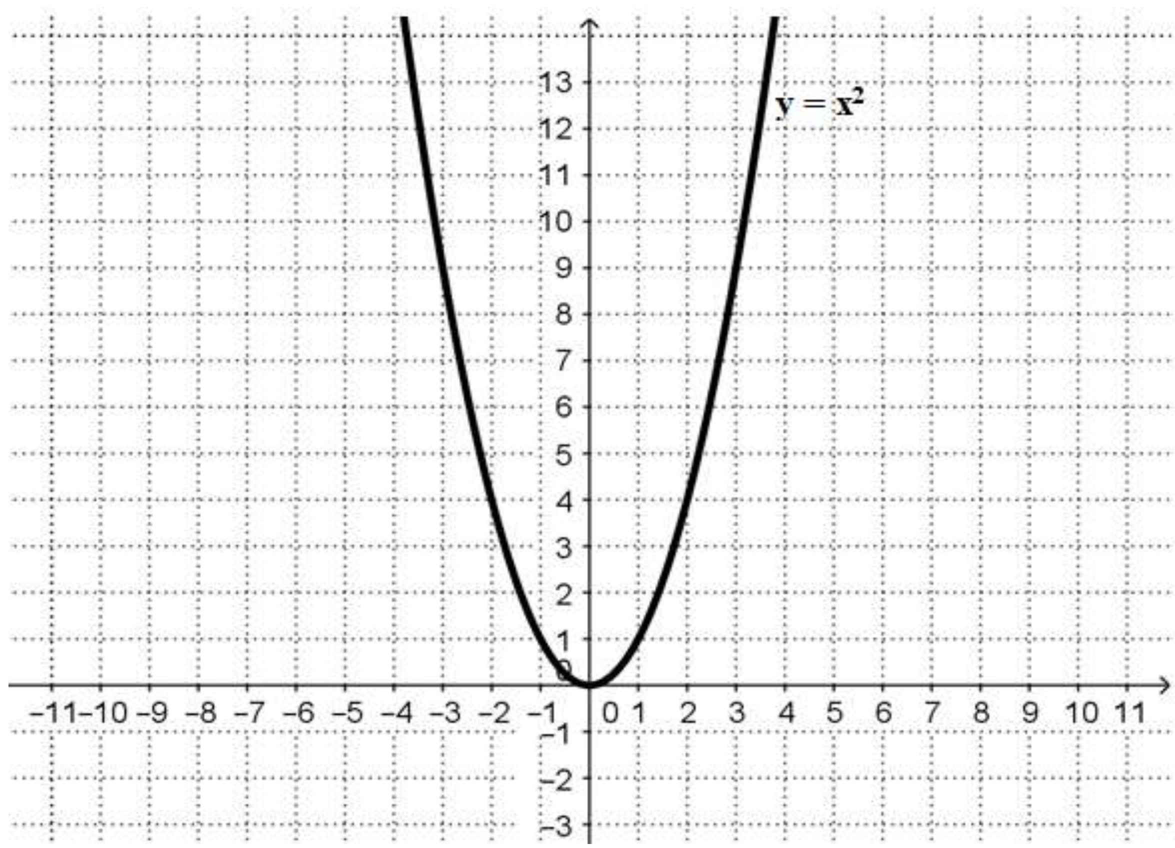


Figura 1

a) ¿Qué comportamiento observas entre las parábolas?

b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?

c) ¿Qué pasará con la gráfica de $y = 13x^2$?

Comprueba tu respuesta trazando la gráfica en el plano de la figura 1.

2. Para que una gráfica sea “más abierta” que la gráfica de $y = x^2$, un estudiante dice que el valor del coeficiente de x^2 debe ser mayor que 13, otro estudiante dice que debe ser –1, –2, –3, etc. ¿Quién tiene la razón? ¿Porqué? Si no concuerdas con ellos, menciona un posible valor del coeficiente de x^2 que cumpla con dicha condición.

3. ¿Qué pasa con las gráficas de $y = \frac{4}{5}x^2$, $y = 0.6x^2$, $y = \frac{1}{5}x^2$?

Comprueba tu respuesta trazándolas en el plano de la figura 1.

a) ¿Qué comportamiento observas entre las parábolas?

b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?

c) ¿Qué pasará con la gráfica de $y = 0.1x^2$?

Comprueba tu respuesta trazando la gráfica en el plano de la figura 1.

4. ¿Qué pasará con las gráficas si los coeficientes de x tienen signo negativo?

a) Por ejemplo, ¿cómo será la gráfica de $y = -x^2$? Un estudiante dice que la nueva gráfica se desplazará a la izquierda, otro dice que “abre” hacia la izquierda. ¿Quién crees que tenga la razón?

Comprueba tu respuesta trazando la gráfica en tu cuaderno.

b) Y cómo serán las gráficas de $y = -2x^2$, $y = -3x^2$, $y = -5x^2$ y $y = -13x^2$.

Comprueba tu respuesta trazándolas en tu cuaderno, junto con la parábola anterior.

c) Y qué pasa con las gráficas de $y = -\frac{4}{5}x^2$, $y = -0.6x^2$, $y = -\frac{1}{5}x^2$.

____

Comprueba tu respuesta trazándolas en tu cuaderno, junto con las anteriores.

Con respecto a las parábolas de la forma $y = ax^2$ podemos decir que:

- Las gráficas son cóncavas hacia arriba cuando ______________________________.
- Y son cóncavas hacia abajo cuando _____________________________________.
- Las gráficas se hacen cada vez más “cerradas” cuando ________________________.
- Y se hacen cada vez más “abiertas” cuando ________________________________.

Por otra parte, analicemos cuáles serán las coordenadas del vértice y el eje de simetría de una parábola de la forma $y = ax^2$, para esto:

5. Completa la siguiente tabla:

	$y = x^2$	$y = 4x^2$	$y = 0.3x^2$	$y = -5x^2$	$y = -3/4x^2$	$y = ax^2$
Concavidad	Arriba					
Coordenadas del Punto Máximo/Mínimo		Mínimo $(0, 0)$				
Vértice		$(0, 0)$				
Eje de simetría		$x = 0$				

Ahora, analizaremos qué le pasa a la gráfica de la función $y = ax^2$ al agregarle una constante. Si se suma 1, 2, 5, etc., a la función $y = ax^2$ se obtiene una nueva función $y = ax^2 + c$, ¿sufren algún cambio las nuevas gráficas?, veámoslo:

Caso 2: $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$.

1. Si a la función $y = x^2$ se le suma 1, esto es, $y = x^2 + 1$, ¿qué sucede con la nueva gráfica, sufre algún cambio? _____________________________________
   Comprueba tu respuesta trazándola en el plano de la figura 2.

2. ¿Qué sucede con las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = x^2 + 5$, $y = x^2 + 7$?
   ____
   Comprueba tu respuesta trazándolas en el plano de la figura 2. (Usa colores diferentes)

a) ¿Qué comportamiento observas entre las parábolas?

____

b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?

____

3. a) ¿Qué sucede con la gráfica de $y = 5x^2$ al sumarle 1, 2 ó 4 unidades, esto es, $y = 5x^2 + 1$, $y = 5x^2 + 2$, $y = 5x^2 + 4$? Trázalas en el plano de la figura 3.

____

b) Si se le suma 6 a $y = 0.2x^2$, esto es, $y = 0.2x^2 + 6$ ¿la nueva gráfica tendrá el mismo comportamiento que las gráficas anteriores? Trázala en el plano de la figura 4.

$y = x^2$

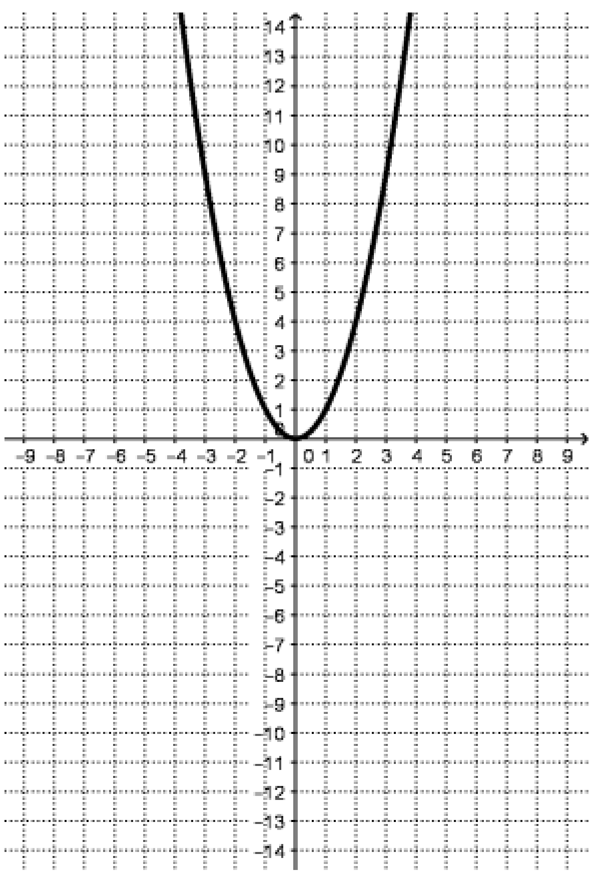


Figura 2

$y = 5x^2$

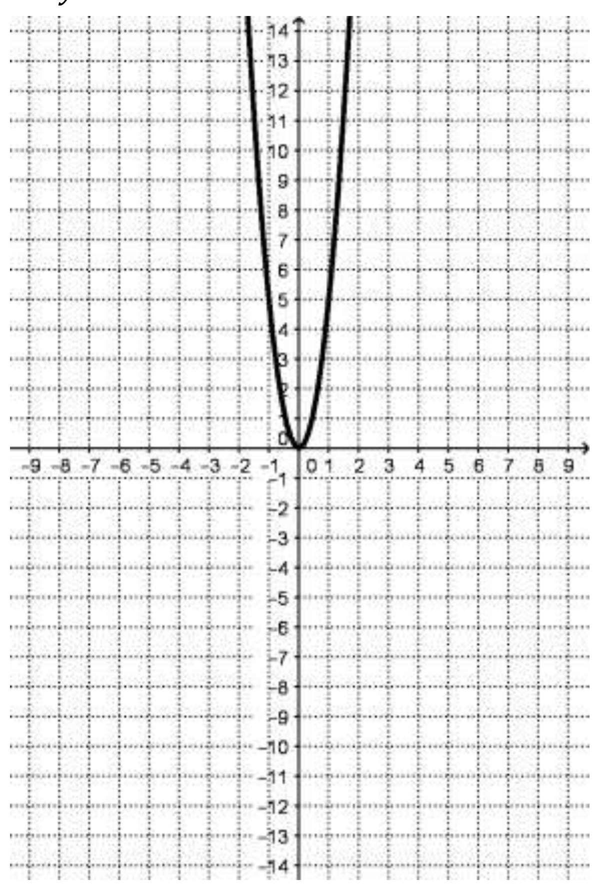


Figura 3

$y = 0.2x^2$

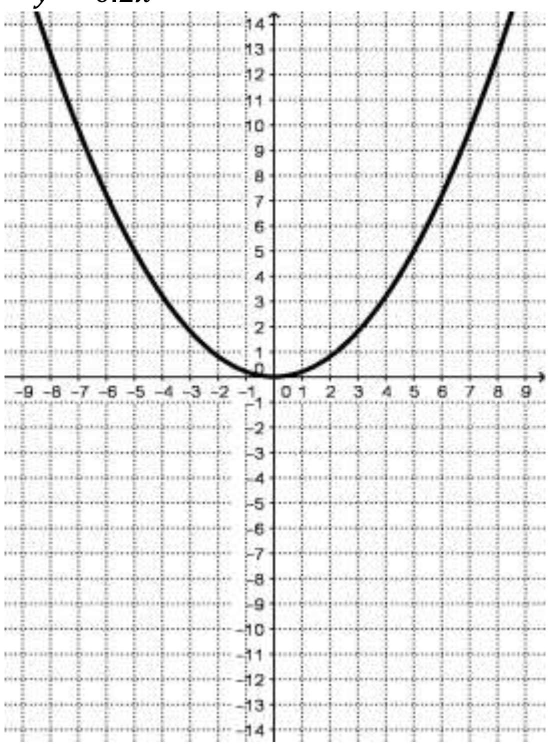


Figura 4

$y = -x^2$

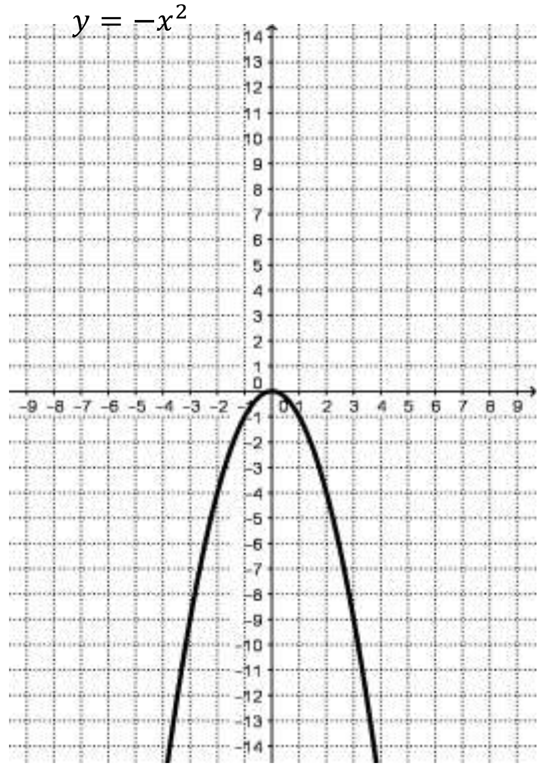


Figura 5

4. Un estudiante dice que la gráfica de $y = -x^2 + 1$ se desplaza hacia abajo 1 unidad con respecto a la gráfica de $y = -x^2$, porque el coeficiente de x^2 tiene signo negativo, ¿será cierto o falso? ¿Por qué?

___

Comprueba tu respuesta trazando la gráfica en la figura 5.

5. Con respecto a la gráfica de $y = -x^2$, ¿Cómo se desplazan las gráficas de $y = -x^2 + 2$, $y = -x^2 + 5$ y $y = -x^2 + 9$?

___

Comprueba tu respuesta trazándolas en el plano de la figura 5.

a) ¿Qué comportamiento observas entre las parábolas?

___

b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?

___

6. ¿Qué pasa con las gráficas si en lugar de sumar una constante a las funciones anteriores se le resta?

___

Comprueba tu respuesta trazando las gráficas en los planos correspondientes.

Con base al caso 2 y a la expresión $y = ax^2 + c$ podemos concluir que:

Las gráficas se desplazan verticalmente c unidades hacia arriba cuando ________________

Las gráficas se desplazan verticalmente c unidades hacia abajo cuando ________________

Por otra parte, tenemos que analizar las coordenadas de su vértice y su eje de simetría.

7. Completa la siguiente tabla.

	$y = x^2$	$y = x^2 + 2$	$y = 5x^2 - 7$	$y = -4/5x^2 - 1$	$y = -3x^2 + 4$	$y = ax^2 + c$
Concavidad				Abajo		
Coordenadas del Punto Máximo/Mínimo					Máximo $(0, 4)$	
Vértice				$(0, -1)$		
Eje de simetría		$x = 0$				

Ahora, veamos qué sucede si se le suma o sustrae cierta cantidad a x.

Caso 3: $\boldsymbol{y = a(x - h)^2}$.

1. Si ya conoces la gráfica de $y = x^2$, ¿cómo será la gráfica si en esta función a x le sumas 1, esto es, si $y = (x + 1)^2$? Comprueba tu respuesta trazándola en el plano de la figura 6.

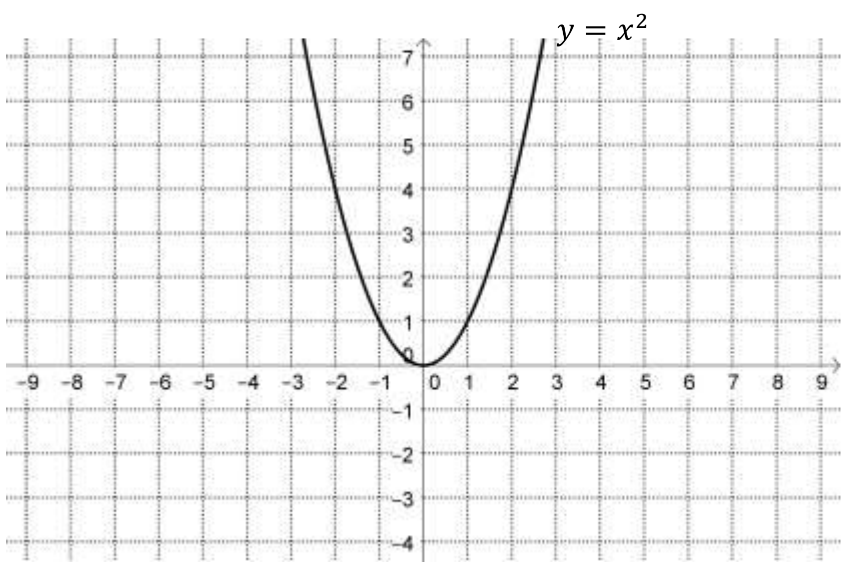


Figura 6

2. ¿Qué pasará con las gráficas de $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 4)^2$, $y = (x + 7)^2$?

Un estudiante dice que las gráficas se recorren hacia la derecha porque se está sumando 2, 4 y 7. ¿Será cierto o falso? ________________________________
Comprueba tu respuesta trazándolas en el plano de la figura 6.

a) ¿Qué comportamiento observas entre estas parábolas?

____

b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?

____

3. Si ahora tienes la gráfica de $y = 3x^2$, y a x le sumas 1, se obtiene $y = 3(x+1)^2$, un estudiante dice que la nueva gráfica se desplaza hacia arriba porque se está sumando 1 ¿es cierto? ____

4. Otro estudiante dice, si se suma 1 a x en $y = -x^2$, esto es, $y = -(x+1)^2$, la nueva gráfica se desplaza 1 unidad hacia abajo por el signo negativo ¿será cierto?

____

5. Con respecto a la gráfica de $y = x^2$, ¿qué sucede si en lugar de sumar se le resta cierta cantidad a x? Esto es, ¿Cómo se desplazan las gráficas de las funciones $y = (x-1)^2$, $y = (x-2)^2$, $y = (x-4)^2$, $y = (x-7)^2$?

____

Comprueba tus respuestas trazándolas en el plano de la figura 6.

Con base al caso 3 y a la expresión $y = a(x-h)^2$ podemos concluir que:

La gráfica se desplaza horizontalmente h unidades hacia la derecha cuando _____________

La gráfica se desplaza horizontalmente h unidades hacia la izquierda cuando _____________

Por otra parte, analicemos las coordenadas del vértice y el eje de simetría de una parábola de la forma $y = (x-h)^2$.

7. Completa la siguiente tabla.

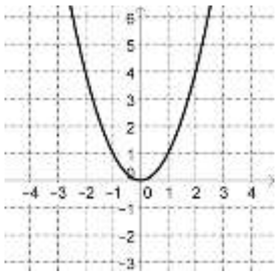
	$y = x^2$	$y = (x-2)^2$	$y = 0.3(x+1)^2$	$y = -(x+6)^2$	$y = 4(x-3)^2$	$y = a(x-h)^2$
Concavidad			Arriba			
Punto Máximo/Mínimo					Mínimo $(-3, 0)$	
Vértice					$(-3, 0)$	
Eje de simetría					$x = -3$	

Caso 4: $\boldsymbol{y = a(x-h)^2 + k}$.

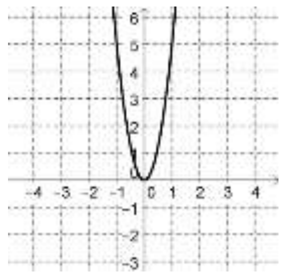
1. Con base en la gráfica de $y = x^2$, realiza el bosquejo de las siguientes funciones aplicando sólo los desplazamientos correspondientes. a) $y = 5(x-1)^2 + 2$ b) $y = -(x+3)^2 - 1$ c) $y = 3(x-2)^2 - 4$ d) $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$

Solución:

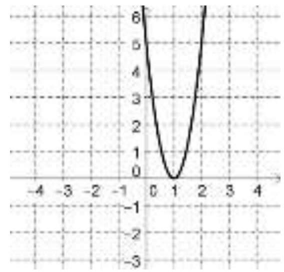
a)



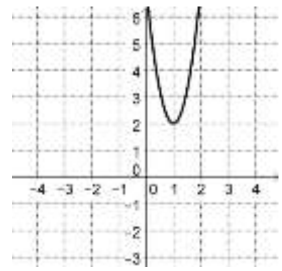
$y = x^2$: gráfica de base o referencia.



$y = 5x^2$: el 5 hace que la parábola se cierre un poco.



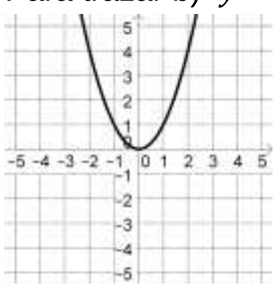
$y = 5(x-1)^2$: el -1 hace que la parábola se mueva una unidad a la derecha.



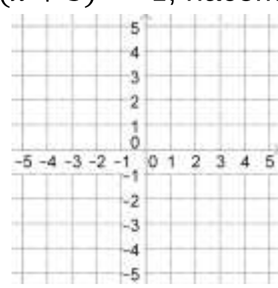
$y = 5(x-1)^2 + 2$: el 2 hace que la parábola se mueva dos unidades hacia arriba.

De manera similar, resuelve el resto de los incisos.

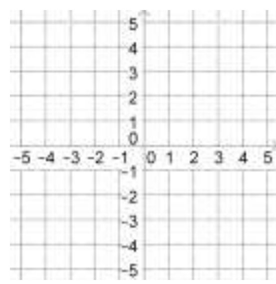
Para trazar b) $y = -(x+3)^2 - 1$, hacemos:



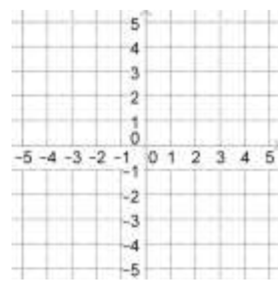
$y = x^2$: gráfica de base o referencia.



$y = -x^2$: el signo $-$ hace que la parábola se _______________ _________________

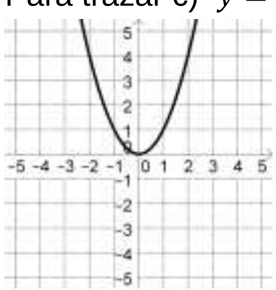


$y = -(x+3)^2$: el $+3$ hace que la parábola se ________________ __________________

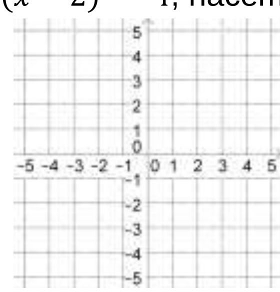


$y = -(x+3)^2 - 1$: el -1 hace que la parábola se ________ __________________ __________________

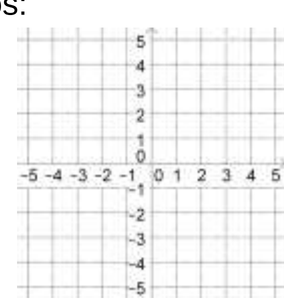
Para trazar c) $y = 3(x-2)^2 - 4$, hacemos:



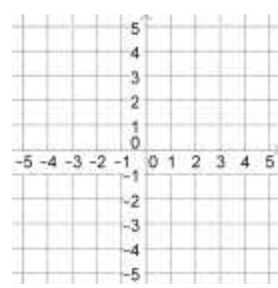
$y = x^2$: gráfica de base o referencia.



$y = (x-2)^2$: el -2 hace que la parábola se _______________ _________________

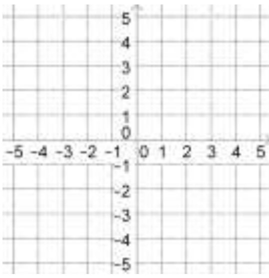


$y = 3(x-2)^2$: el 3 hace que la parábola se ________________ __________________

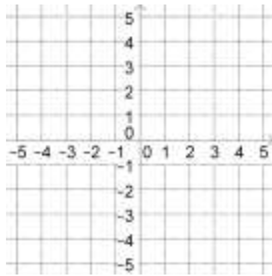


$y = 3(x-2)^2 - 4$: el -4 hace que la parábola se ________ __________________ __________________

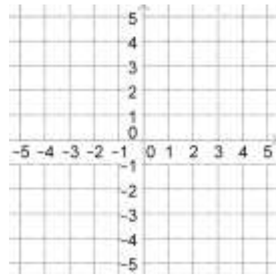
Para trazar d) $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$, hacemos:



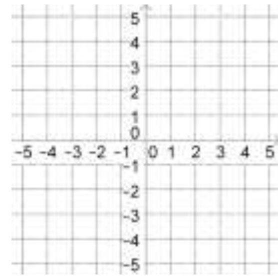
$y = x^2$: gráfica de base o referencia.



$y = (x+1)^2$: el 1 hace que la parábola se ________________ __________________



$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2$: el número $-\frac{1}{2}$ hace que la parábola ________ __________________



$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$: el $+3$ hace que la parábola se ________ __________________

2. Completa la siguiente tabla.

	$y = 5(x-1)^2 + 2$	$y = -(x+3)^2 - 1$	$y = 3(x-2)^2 - 4$	$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$	$y = a(x-h)^2 + k$
Concavidad					
Punto Máximo/Mínimo					
Vértice	$(1, 2)$		$(2, -4)$		
Eje de simetría				$x = -1$	

Como puedes ver, cada uno de los parámetros de la función cuadrática escrita en su *forma estándar* $y = a(x-h)^2 + k$ tiene su propio significado. Y con base a las tablas anteriores se puede ver que en ésta expresión, $(h\ ,\ k)$ representa el vértice, aspecto muy importante cuando se trata de encontrar el máximo o mínimo de una función cuadrática.

Por otra parte, para ver si las gráficas que has trazado en cada caso son las correctas, puedes comprobarlo utilizando Geogebra (software gratuito que puedes bajar a tu teléfono o computadora), donde incluso, puedes darle animación a cada parámetro y así observar el comportamiento que este genera.

Actividad 4. Halla la expresión algebraica de la función correspondiente al desplazamiento de la gráfica $y = x^2$, según se indica en cada caso:

a) 4 unidades a la izquierda; 2 hacia abajo; abre en un factor de $\frac{1}{7}$; y es cóncava hacia arriba. $y = \frac{1}{7}(x \qquad)^2$

b) 1unidad a la derecha; 3 hacia arriba; se cierra en un factor de 6; y es cóncava hacia abajo. $y = \qquad (x \qquad)^2$

Actividad 5. ¿Cuánto vale $a,\ h$ y k en las siguientes funciones?

a) $y = -(x+1)^2$
$a =$
$h =$
$k =$

b) $y = -7x^2$
$a =$
$h =$
$k =$

c) $y = 2x^2 - 3$
$a =$
$h =$
$k =$

d) $y = 5$
$a =$
$h =$
$k =$

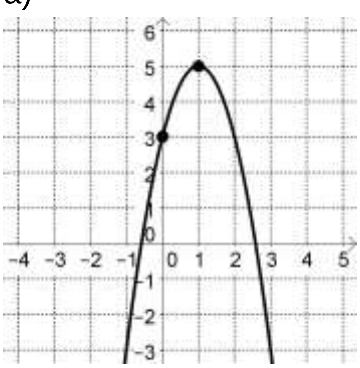
Actividad 6. ¿Cómo describirías la gráfica de la función $y = -3(x+5)^2 - 4$?

____

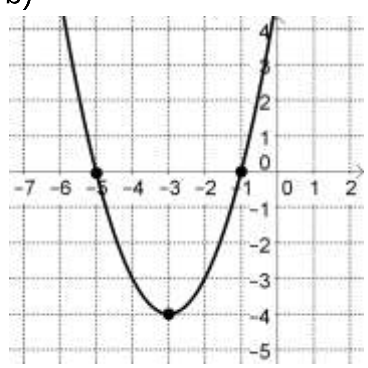
____

Actividad 7. Determina la expresión de la función que representa a cada una de las siguientes gráficas:

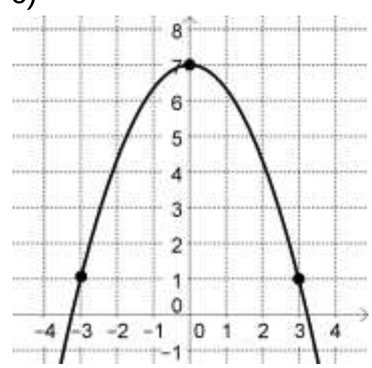
a)



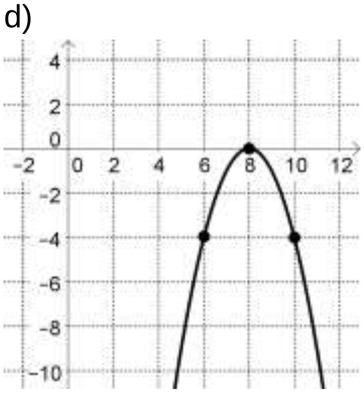
b)



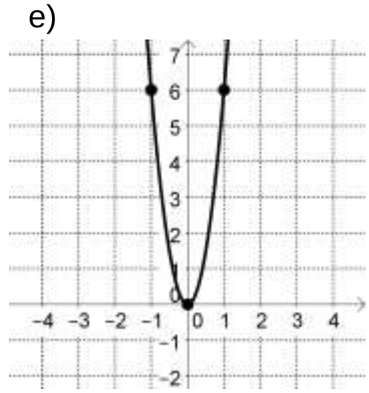
c)



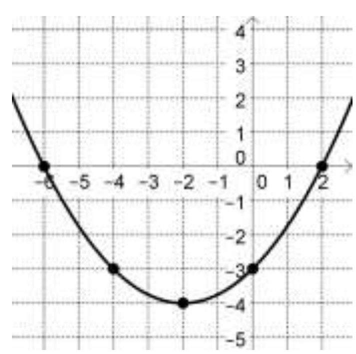
d)



e)



f)



Solución:

a) De acuerdo al análisis anterior, en la forma estándar $y = a(x - h)^2 + k$ el vértice tiene coordenadas $V(h, k)$. Entonces, al sustituir las coordenadas del vértice de esta parábola, se tiene, $y = a(x - 1)^2 + 5$.

Para encontrar el valor de a basta con sustituir las coordenadas de un punto que pertenezca a la parábola excepto el propio vértice. Por ejemplo, si se elige el punto $(0, 3)$ se tiene: $3 = a(0 - 1)^2 + 5$

$3 = a(1) + 5$

donde $a = -2$.

Por lo tanto, la función que representa a esta gráfica es: $y = -2(x - 1)^2 + 5$.

De manera similar, resuelve el resto de los incisos en tu cuaderno y completa:

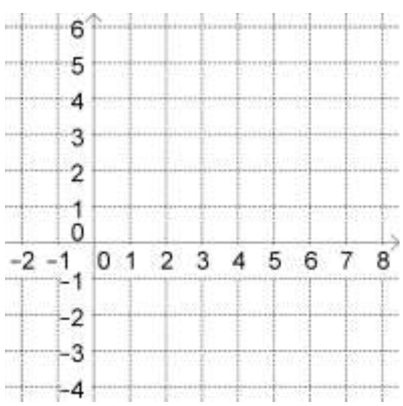
b) $y = \quad (x \quad)^2$ **c)** $y = \quad (x \quad)^2$ **d)** $y = \quad (x \quad)^2$

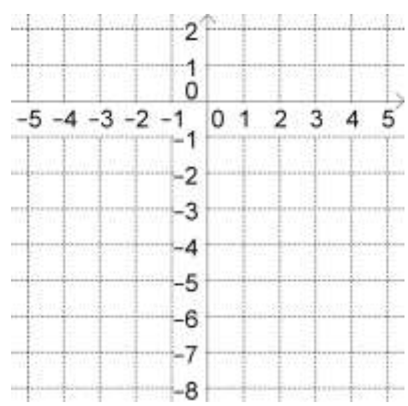
e) $y = \quad (x \quad)^2$ **f)** $y = \quad (x \quad)^2$

Actividad 8. Traza las gráficas de las funciones cuadráticas que cumplan con las siguientes condiciones, y determina su expresión algebraica.

Grafica 1:
a) Es cóncava hacia abajo.
b) Eje de simetría: $x = 4$
c) Pasa por el punto: $(-1, -2)$
d) Punto máximo: $(4,\ 5)$

Gráfica 2:
a) Es cóncava hacia arriba.
b) Eje de simetría: $x = 0$
c) Pasa por el punto: $(3, -4)$
d) Punto mínimo: $(0, -7)$





Actividad 9. Sin graficar, determina la concavidad; el punto máximo o mínimo; el vértice y su eje de simetría de las siguientes funciones:

a) $y = -2(x + 3)^2$

Cóncava hacia____________, tiene punto _____________ sus coordenadas son (,).
Su vértice es el punto (,) y la ecuación de su eje de simetría es _______________.

b) $y = 7x^2$
Cóncava hacia____________, tiene punto _____________ sus coordenadas son (,).
Su vértice es el punto (,) y la ecuación de su eje de simetría es _______________.

c) $y = \frac{5}{12}(x-1)^2 + 4$
Cóncava hacia____________, tiene punto _____________ sus coordenadas son (,).
Su vértice es el punto (,) y la ecuación de su eje de simetría es _______________.

d) $y = -\frac{3}{10}x^2 - 9$
Cóncava hacia____________, tiene punto _____________ sus coordenadas son (,).
Su vértice es el punto (,) y la ecuación de su eje de simetría es _______________.

e) $y = 6(x + \frac{1}{2})^2 + 4$
Cóncava hacia____________, tiene punto _____________ sus coordenadas son (,).
Su vértice es el punto (,) y la ecuación de su eje de simetría es _______________.

f) $y = -2x^2 - \frac{3}{5}$
Cóncava hacia____________, tiene punto _____________ sus coordenadas son (,).
Su vértice es el punto (,) y la ecuación de su eje de simetría es _______________.

Ejercicios 2.2

1) Escribe cuál fue el desplazamiento aplicado a la función $y = x^2$ para obtener cada una de las siguientes expresiones:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = -2(x+3)^2$ c) $y = 0.2(x-1)^2 + 4$

2) Haz un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones aplicando sólo los desplazamientos correspondientes a la gráfica de $y = x^2$:

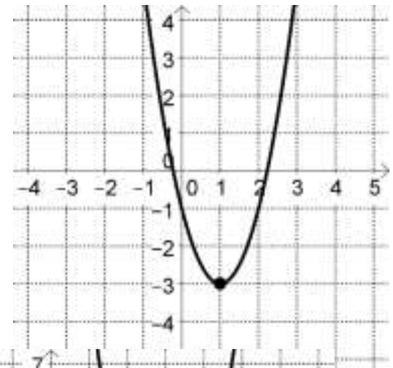
a) $y = -6(x+8)^2 - 3$ b) $y = \frac{7}{11}(x-5)^2 + 2$ c) $y = -(x-4)^2 - 1$

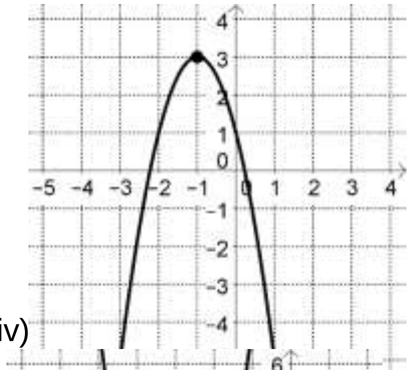
d) $y = 9x^2 + \frac{10}{6}$ e) $y = -0.25(x+3)^2$ f) $y = 12x^2$

3) Asocia cada una de las funciones cuadráticas con su gráfica correspondiente.

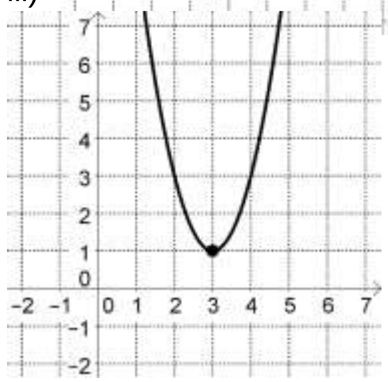
i) ii)

a) $y = 2(x+3)^2 + 1$
b) $y = 2(x+1)^2 - 3$
c) $y = 2(x-3)^2 + 1$
d) $y = 2(x-1)^2 + 3$
e) $y = 2(x+3)^2 - 1$
f) $y = 2(x-3)^2 - 1$
g) $y = 2(x-1)^2 - 3$
h) $y = -2(x-3)^2 + 1$
i) $y = -2(x+1)^2 + 3$
j) $y = -2(x-1)^2 + 3$
k) $y = -2(x+3)^2 - 1$

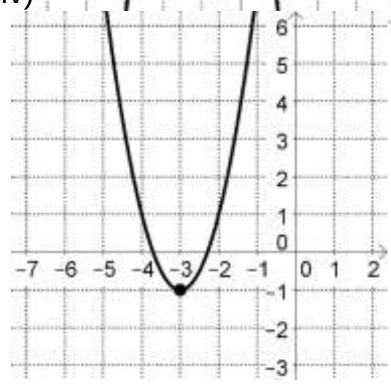




iii)



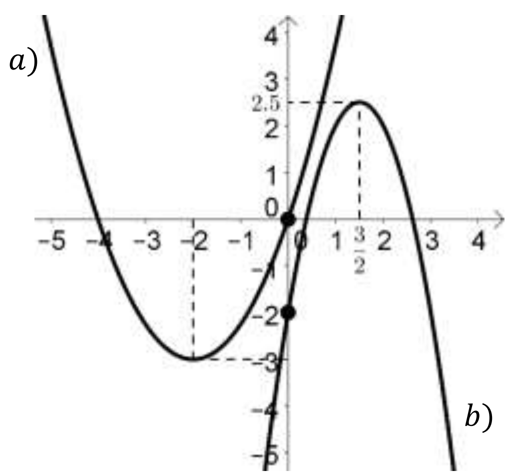
iv)



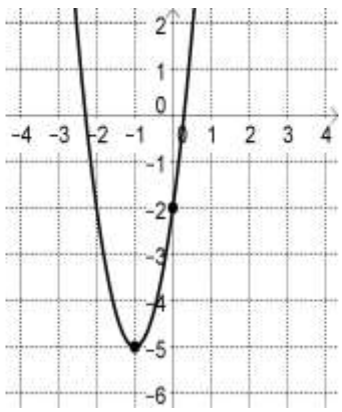
4) Halla la expresión de la función cuadrática que cumpla con los requisitos que se piden en cada caso.

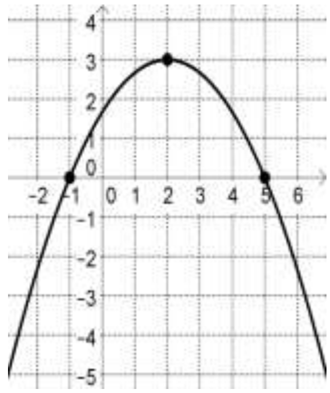
a) Su gráfica interseca al eje y en $(0, 3)$ y su vértice es $V(1, 2)$.
b) Su gráfica pasa por el punto $(1, -1)$ y su punto mínimo es $(-2, -5)$.
c) Su punto máximo es $\left(-\frac{1}{2},\ 6\right)$ y pasa por el punto (5, 1).

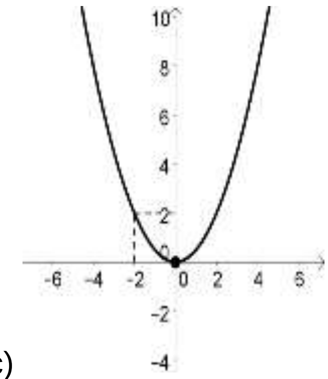
5) Determina la concavidad; el vértice; el punto máximo o mínimo; y el eje de simetría de las siguientes gráficas.

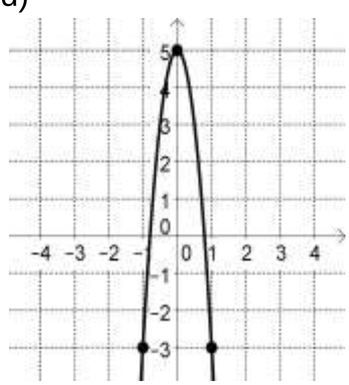


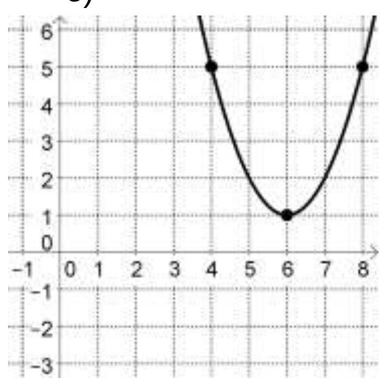
6) Determina la expresión de la función que representa a cada una de las siguientes parábolas:

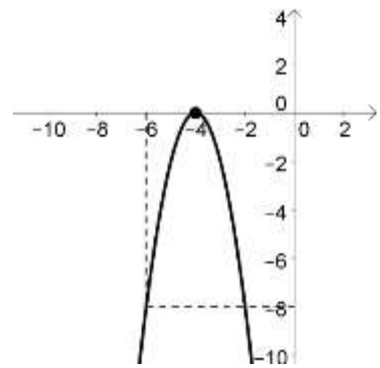
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

2.3 Forma estándar $\boldsymbol{y = a(x-h)^2 + k}$.

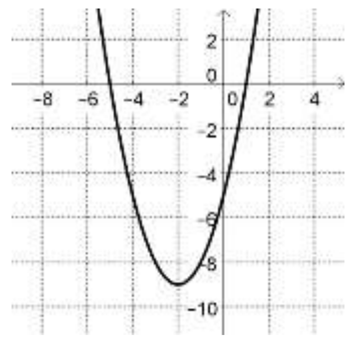
¿Cómo trazas la gráfica de la función $y = -2x^2 + 12x - 8$ aplicando los desplazamientos correspondientes?

Ciertamente, la gráfica de esta función es cóncava hacia abajo y se cierra un poco dado que el coeficiente de x^2 tiene signo negativo y es mayor que 1. También se sabe que cortará al eje y en -8 que es el término independiente. Pero, ¿cuál es su vértice? ¿Cuánto se desplaza horizontalmente o verticalmente?

Como te habrás dado cuenta aún no podemos contestar estas preguntas. Para ello, necesitamos convertir la función escrita en forma general a su forma estándar, es decir, de la forma $y = ax^2 + bx + c \overset{\text{a}}{\rightarrow} y = a(x-h)^2 + k,$ utilizando el Método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP).

EJEMPLO 1. Traza la gráfica de la función $y = x^2 + 4x - 5$ aplicando sólo los desplazamientos y transformaciones correspondientes.

Solución:
Hay que convertir esta función a la forma estándar. Para ello, utilizamos el método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). Así:



$y = (x^2 + 4x) - 5$ Agrupamos las x.
$y = (x^2 + 4x + (2)^2) - 5 - (2)^2$ Se completa el TCP para x.
$y = (x+2)^2 - 9$ Se factoriza el TCP y se realiza la suma $-5-(2)^2$.
Se aplica el significado de cada uno de los parámetros, y se obtiene la gráfica de lado derecho.

EJEMPLO 2. ¿Cuál es el vértice de la función $y = -2x^2 + 12x - 8$?

Solución:
Hay que convertir esta función a la forma estándar. Así:
$y = (-2x^2 + 12x) - 8$ Agrupamos las x.
$y = -2(x^2 - 6x) - 8$ Se factoriza -2.
$y = -2(x^2 - 6x + (-3)^2) - 8 - (-2)(-3)^2$ Se completa el TCP para x.
$y = -2(x-3)^2 + 10$ Se factoriza el TCP y se suma $-8 + 2(-3)^2$.

De la forma estándar se puede deducir que el vértice es V(3 , 10).

EJEMPLO 3. La función $y = 3x^2 + 2x - 5$ tiene punto máximo o minimo? ¿Cuáles son sus coordenadas?

Solución:
Observando la función se puede afirmar que es cóncava hacia arriba, por lo tanto, tiene punto mínimo. Para encontrar sus coordenadas hacemos:
$y = (3x^2 + 2x) - 5$ Agrupamos las x.
$y = 3(x^2 + \frac{2}{3}x) - 5$ Se factoriza el 3.
$y = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - 5 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2$ Se completa el TCP para x.
$y = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}$ Se factoriza el TCP y se suma $-5 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Observa que:
$$\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

De la forma estándar se puede deducir que las coordenadas del punto mínimo son $\left(-\frac{1}{3},-\frac{16}{3}\right)$.

Actividad 1. Determina la concavidad, el vértice, el punto mínimo o máximo y el eje de simetría de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2 - 12x + 16$ b) $y = 7x^2 + 14x$ c) $y = -5x^2 - 40x - 43$
d) $y = -4x^2 + 2x + 1$ e) $y = 2x^2 + 5x - 15$ f) $y = -x^2 + 3$

Solución:
Para poder determinar estos elementos hay que convertir cada función a la forma estándar.

a) $y = 3x^2 - 12x + 16$, hacemos:
$y = (\qquad\qquad) +$ Agrupamos las x.
$y = 3(x^2 \qquad) +$ Se factoriza el ______ .
$y = 3(x^2 - \quad x + (\quad)^2) + 16 - 3(\quad)^2$ Se completa el TCP para x.
$y = 3(x - \quad)^2 +$ Se factoriza el TCP y se suma _____________.

De aquí, se puede deducir que:
La concavidad es hacia _______________. El vértice es (,)
Tiene punto ____________ en (,). Y el eje de simetría es $x =$ _______.

Siguiendo el procedimiento sin justificación verbal, tenemos:

b) $y = 7x^2 + 14x$, hacemos:
$y = (\qquad\qquad)$
$y = 7(x^2 \qquad)$
$y = 7(x^2 + \quad x + (\quad)^2) - 7(\quad)^2$
$y = 7(x + \quad)^2 -$ _______
De aquí, se puede deducir que:
La concavidad es hacia ___________.
El vértice es (,)
Tiene punto ____________ en (,).
Y el eje de simetría es $x =$ _______.

c) $y = -5x^2 - 40x - 43$, hacemos:
$y = (\qquad\qquad) -$ _____
$y =$ ____$(x^2 \qquad) -$ _____
$y =$ ____$(x^2 + \quad x + (\quad)^2) -$_______
$y =$ ____$(x + \quad)^2$____________
De aquí, se puede deducir que:
La concavidad es hacia ___________.
El vértice es (,)
Tiene punto __________ en (,).
Y el eje de simetría es $x =$ _______.

d) $y = -4x^2 + 2x + 1$, hacemos:
$y = (\qquad\qquad) +$ _____
$y =$ ____$(x^2 \qquad) +$ _____

e) $y = 2x^2 + 5x - 15$, hacemos:
$y = (\qquad\qquad) -$ ______
$y =$ ____$(x^2 \qquad) -$ ______

$y =$ ____$(x^2$ $\quad$ $x + ($ $\quad$ $)^2)+$__________
$y =$ ____$(x$ $\quad$ $)^2$_________
De aquí, se puede deducir que:
La concavidad es hacia _____________.
El vértice es (,)
Tiene punto ____________ en (,).
Y el eje de simetría es $x =$ _______.

$y =$ ____$(x^2$ $\quad$ $x + ($ $\quad$ $)^2) -$______
$y =$ ____$(x$ $\quad$ $)^2$_________
De aquí, se puede deducir que:
La concavidad es hacia ___________.
El vértice es (,)
Tiene punto ____________ en (,).
Y el eje de simetría es $x =$ _______.

f) $y = -x^2 + 3$, se puede deducir que:
La concavidad es hacia ______________.
El vértice es (,), tiene punto ____________ en (,).
Y el eje de simetría es $x =$ _______.

Ejercicios 2.3

1. Determinar la concavidad; el vértice; el punto máximo o mínimo; su eje de simetría y bosqueja la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = x^2 + 2x - 7$ b) $y = -x^2 + 5x - 10$ c) $y = 2x^2 + 6x + 5$

d) $y = x^2 + 4$ e) $y = -4x^2 + 24x - 8$ f) $y = 3x^2 - 7x - 1$

g) $y = -x^2 - 9$ h) $y = 5x^2 - 3x$ i) $y = -7x^2 + 14x$

j) $y = -6x^2 - 48x + 9$

2. ¿Cuál es el vértice de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$?

2.4 Ceros de la función.

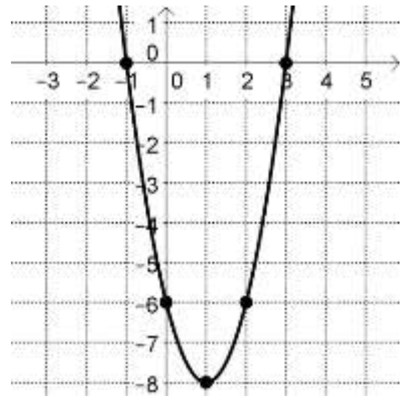
Actividad 1. Determina las soluciones o raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas y traza la gráfica de la función asociada a cada una.
a) $2x^2 - 4x - 6 = 0$
b) $-x^2 - 3x + 4 = 0$

Solución:
a) Utilizando cualquier método algebraico para resolverla (realiza tus procedimientos en tu cuaderno), las soluciones o raíces son: $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$

Para trazar la gráfica de la función asociada a una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se requiere convertir la ecuación a función, para ello, basta con sustituir al 0 por la y, esto es, $ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c$. Así, en el caso de la ecuación cuadrática $2x^2 - 4x - 6 = 0$ su función asociada es $y = 2x^2 - 4x - 6$, por lo que ya es posible trazar su gráfica, haciendo una breve tabulación y usando su simetría, tenemos:

x	$y = 2x^2 - 4x - 6$
-1	0
0	-6
1	-8
2	-6
3	0

$\longrightarrow$



Se obtuvieron dos raíces:
*reales diferentes*

b) Resolviendo con cualquier método algebraico, las soluciones o raíces son:

$x_1 =$

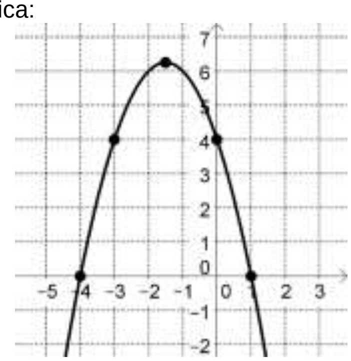
$x_2 =$

Se obtienen dos raíces:
*reales diferentes*

Tabla:

x	$y = -x^2 - 3x + 4$
-4	0
-3	4
-2	6
-1	6
0	4

Gráfica:



Nota: Puedes llevar a la forma estándar la función asociada para localizar el vértice.

Actividad 2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas y traza la gráfica de su función asociada. a) $x^2 + 6x + 9 = 0$ b) $-3x^2 + 12x - 12 = 0$

Solución:

a) Resolviendo con cualquier método algebraico, las soluciones o raíces son:

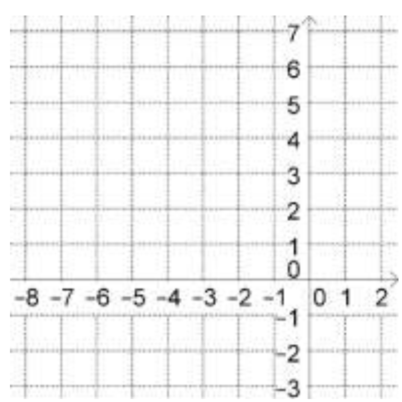
$x_1 =$

$x_2 =$

Tabla:

x	$y = x^2 + 6x + 9$
-5	4
-4	1
-3	0
-2	1
-1	4

Gráfica:



Se obtienen dos raíces que son: ________________

b)

Resolviendo con cualquier método algebraico, las soluciones o raíces son:

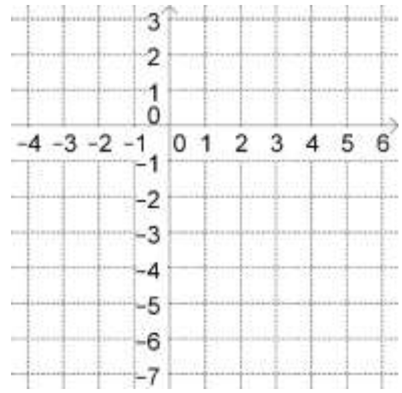
$x_1 =$

$x_2 =$

Tabla:

x	$y = -3x^2 + 12x - 12$
0	-12
1	-3
2	0
3	-3
4	-12

Gráfica:



Se obtienen dos raíces que son: ___________________

Actividad 3. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas y traza la gráfica de su función asociada. a) $3x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $-2x^2 - 8x - 9 = 0$

Solución:

a) Resolviendo con cualquier método algebraico, las soluciones o raíces son:

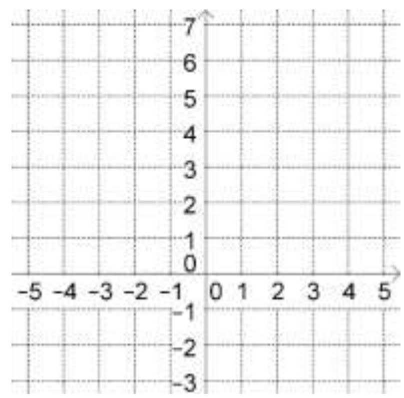
$x_1 =$

$x_2 =$

Tabla:

x	$y = 3x^2 - 6x + 5$
0	5
1	2
2	5

Gráfica:



Sus dos raíces son: ____________________

b) Resolviendo con cualquier método algebraico, las soluciones o raíces son:

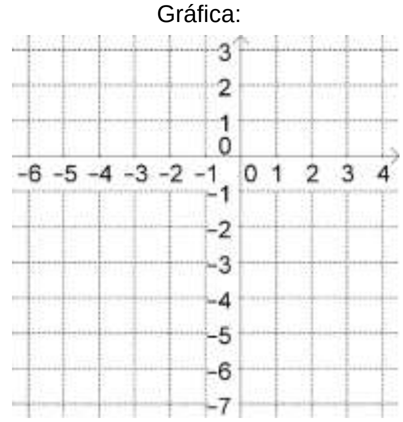
$x_1 =$

$x_2 =$

Tabla:

x	$y = -2x^2 - 8x - 9$
-3	-3
-2	-1
-1	-3

Gráfica:



Se obtienen dos raíces:

____

De acuerdo con las actividades 1, 2 y 3,

a) ¿Cuántas soluciones o raíces tiene una ecuación cuadrática? ____, que pueden ser ________________ ________________ ________________

b) ¿Observas las soluciones de cada ecuación en su respectiva gráfica?

____

c) ¿Qué relación hay entre las soluciones de una ecuación y la gráfica de su función asociada? ____

____

d) ¿Existe alguna relación entre el número de veces que la parábola "toca o corta" al eje x con el hecho de obtener "ceros" reales o complejos?

____

NOTA: A los puntos donde la gráfica de una función "toca o corta" al eje X se le llaman "ceros" de la función.

Con base a lo anterior, se puede concluir que:

Gráficamente, las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática son los valores donde la parábola ____

Si la parábola corta al eje X, decimos que tiene ______ ceros ______________.

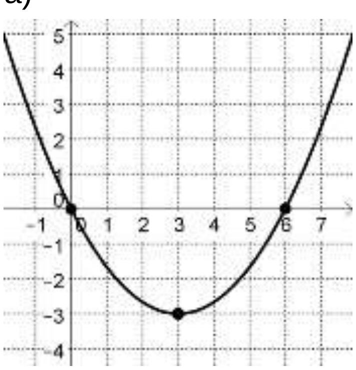
Si la parábola sólo toca al eje X, decimos que tiene ______ ceros ____________________.

Si la parábola no corta al eje X, decimos que no tiene ceros ___________, sus ceros son ______________.

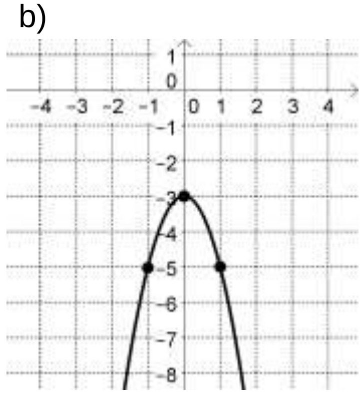
Actividad 4.

1. Encuentra los ceros de las siguientes funciones cuadráticas.

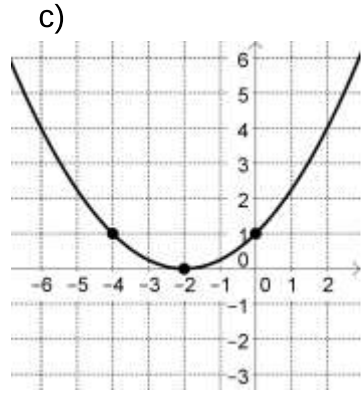
a)



b)



c)



a)
Los ceros de la función son:

$x_1 =$ $x_2 =$

Y las raíces de su ecuación asociada son:

$x_1 =$ $x_2 =$

b)
Los ceros de la función son:

$x_1 =$ $x_2 =$

Y las raíces de su ecuación asociada son:

$x_1 =$ $x_2 =$

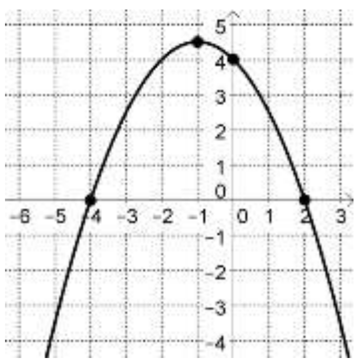
c)
Los ceros de la función son:

$x_1 =$ $x_2 =$

Y las raíces de su ecuación asociada son:

$x_1 =$ $x_2 =$

d)



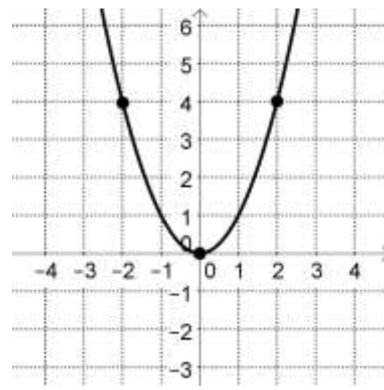
Los ceros de la función son:

$x_1 =$ $x_2 =$

Y las raíces de su ecuación asociada son:

$x_1 =$ $x_2 =$

e)



Los ceros de la función son:

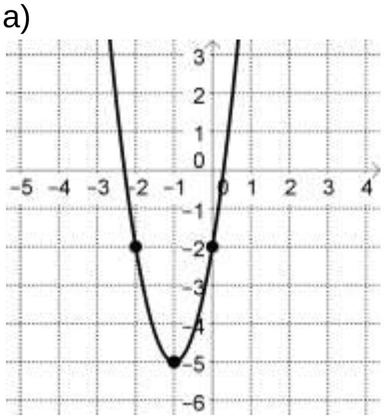
$x_1 =$ $x_2 =$

Y las raíces de su ecuación asociada son:

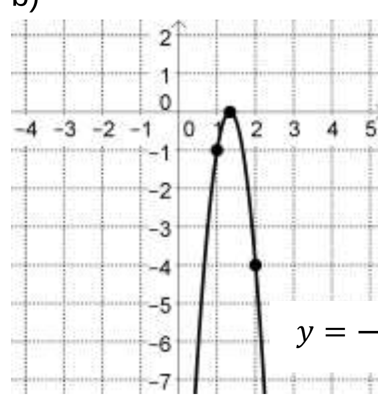
$x_1 =$ $x_2 =$

2. ¿Cuáles son los ceros de las siguientes funciones cuadráticas?

a)



b)



$y = -9x^2 + 24x - 16$

Solución:
Como te habrás dado cuenta, visualmente no es posible afirmar con precisión cuáles son sus ceros, para ello, es necesario resolver la ecuación asociada a la función.

a) Primero hay que encontrar la función que representa a la gráfica, la cual ya puedes hacer como se vio anteriormente. Así,

$y = a(x+1)^2 - 5$ Se sustituyen las coordenadas del vértice.

$-2 = a(0+1)^2 - 5$ Se sustituyen las coordenadas del punto (0,- 2) que pertenece a la parábola para encontrar el valor de a.

$-2 + 5 = 1a$

$a = 3$

Por lo tanto, la función que representa a la gráfica es $y = 3(x+1)^2 - 5$.

Segundo, hay que convertir la función a ecuación y resolverla, cuyas soluciones son los ceros de la función cuadrática:

$$y = 3(x+1)^2 - 5 \longrightarrow 3(x+1)^2 - 5 = 0$$
$$3(x+1)^2 = 5$$
$$(x+1)^2 = \frac{5}{3}$$
$$(x+1) = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ donde } \begin{array}{l} x_1 = 0.29 \\ x_2 = -2.29 \end{array}$$

Por lo tanto, los ceros de la función son: $x_1 = 0.291$ y $x_2 = -2.291$
Observación: la parábola corta dos veces al eje X.

b) En este caso ya conocemos la función de la parábola, sólo hay que convertirla a ecuación y resolverla, $y = -9x^2 + 24x - 16 \longrightarrow -9x^2 + 24x - 16 = 0$, cuyas soluciones son $x_{1,2} = \frac{4}{3}$ (Resuélvela en tu cuaderno).
Por lo tanto, los ceros de la función $y = -9x^2 + 24x - 16$ son iguales y estos son $x_{1,2} = \frac{4}{3}$.
Observación: la parábola toca al eje X y se regresa.

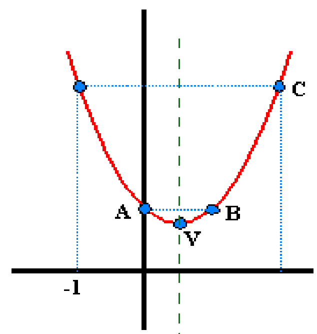
Actividad 5. Dada la función $y = -6x^2 - 3x + 15$, encuentra los puntos donde su gráfica corta al eje X y el punto donde interseca al eje Y.

Solución:

Las coordenadas donde corta una gráfica al eje X son de la forma (x , 0). Observa que la coordenada y es igual a cero, pero, hace falta la coordenada x. Para encontrarla basta con sustituir en la función dada y = 0, así, $-6x^2 - 3x + 15 = 0$ (es decir, la función se convierte en ecuación), donde al resolverla (hazlo en tu cuaderno) sus raíces son $x_1 \approx -1.8$, $x_2 \approx 1.3$. Por lo tanto, la gráfica de la función corta al eje X en los puntos (–1.8, 0) y (1.3, 0).

Ahora bien, un punto situado sobre el eje Y tiene coordenadas (0 , y). Aquí, la coordenada x es cero, falta encontrar la coordenada y. Para encontrarla basta con sustituir en la función x = 0, así, $y = -6(0)^2 - 3(0) + 15$, donde y = 15 (observa que este valor es el término independiente de la ecuación). Por lo tanto, la función corta al eje Y en el punto (0, 15).

Actividad 6. Dada la gráfica de la función $y = x^2 - x + 1$, determina con precisión las coordenadas de los puntos indicados.



Solución:

El punto *A* está situado sobre el eje Y, por lo que sus coordenadas son de la forma (,   ). Para encontrar la coordenada y se sustituye x = 0 en la función, obteniéndose y =_______ (resuelve en tu cuaderno). Entonces las coordenadas de *A* son, *A* = (,   ).

El punto *B* está a la misma altura que A, por lo que sus coordenadas son de la forma (,   ). Puesto que *B* pertenece a la gráfica, sustituimos el valor de la coordenada $y = 1$ en la función, así, $1 = x^2 - x + 1$, donde, las soluciones de esta ecuación (resuélvela en tu cuaderno) son $x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____. De estas dos soluciones descartamos x_1 = 0 por ser la abscisa de *A*, y consideramos $x_2 =$ _____ porque el punto B se encuentra a la derecha del origen, por lo tanto, *B* = (,   ).

El punto *V* es el vértice, su primera coordenada está situada en el punto medio del segmento *AB*, es decir en _______, por lo que sus coordenadas son (,   ). Puesto que *V* pertenece a la gráfica, para encontrar la coordenada y se sustituye el valor de la coordenada de x (ya conocido) en la función, así, y =_______ (resuelve en tu cuaderno). Por lo tanto, *V* = (,   ).

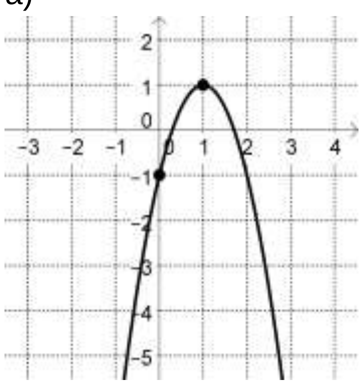
<u>El punto *C*</u>, se observa que por simetría de la parábola se puede calcular su primera coordenada, x =_____. Para encontrar la coordenada y, se sustituye el valor encontrado de x en la función, así, y =_____. Por lo tanto, *C* = (,   ).

Ejercicios 2.4

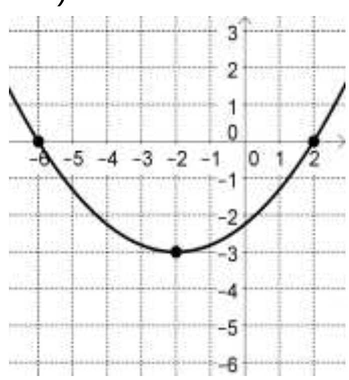
1) Realiza el bosquejo de una parábola que tenga:
 a) Dos ceros reales iguales b) Dos ceros reales diferentes c) Dos ceros complejos

2) Encuentra los ceros de las siguientes gráficas de funciones cuadráticas:

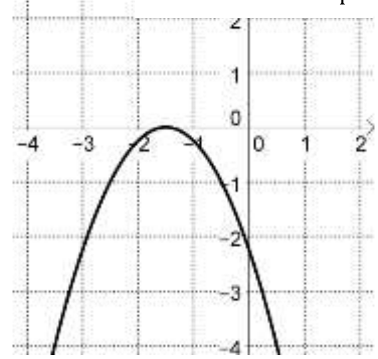
a)



b)

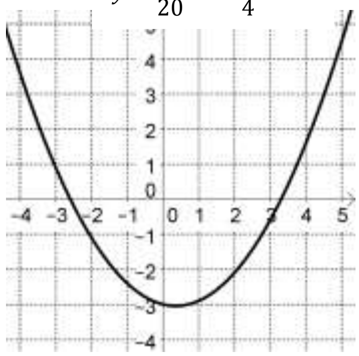


c) $y = -x^2 - 3x - \frac{9}{4}$

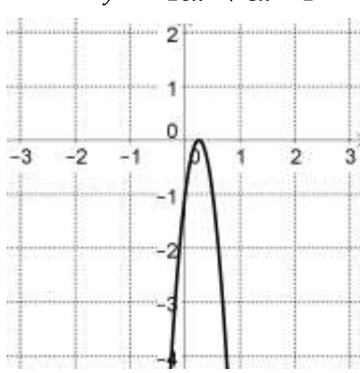


3) Para cada una de las siguientes gráficas de funciones cuadráticas, determina por donde corta al eje X y al eje Y:

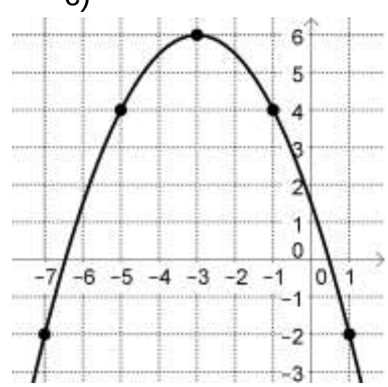
a) $y = \frac{7}{20}x^2 - \frac{1}{4}x - 3$



b) $y = -16x^2 + 8x - 1$

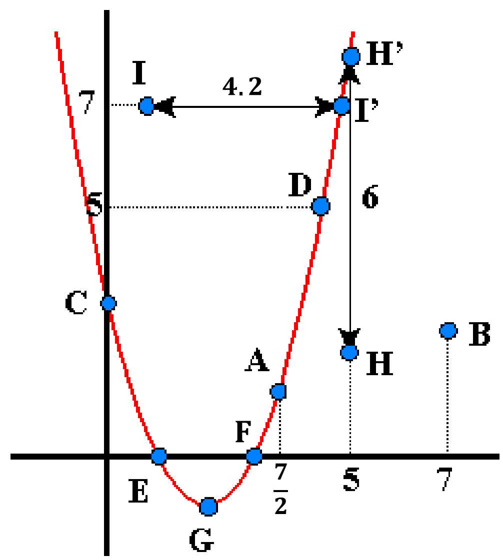


c)



4) a) Escribe la expresión de una función cuadrática que tenga dos ceros iguales y traza su gráfica.
   b) Escribe la expresión de una función cuadrática que tenga dos ceros diferentes y traza su gráfica.
   c) Escribe la expresión de una función cuadrática que no tenga ceros reales y traza su gráfica.

5) Dada la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 3$, determina con precisión las coordenadas de los puntos indicados:

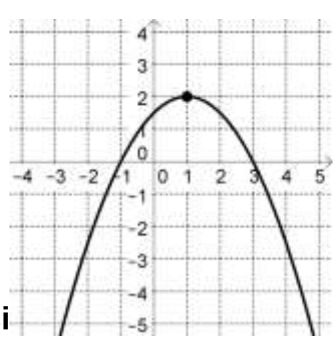


2.5 La función $y = ax^2 + bx + c$ y sus propiedades gráficas.

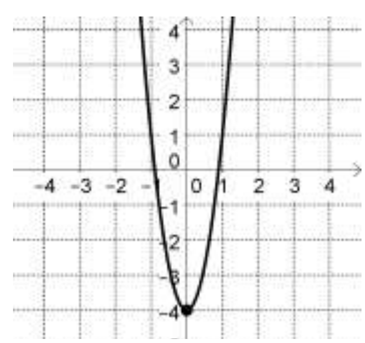
2.5.1 Simetría, concavidad, máximo o mínimo.

Actividad 1. Determina la concavidad, el vértice, el punto máximo o mínimo y el eje de simetría de las siguientes parábolas.

a)



b)



Soluci

a) La gráfica es cóncava hacia _________. En consecuencia, tiene punto ___________, cuyas coordenadas son (,   ).
Su vértice tiene coordenadas (,   ).
La ecuación del eje de simetría es __________.
b) La gráfica es cóncava hacia ___________. En consecuencia, tiene punto ______________, cuyas coordenadas son (,   ).
Su vértice tiene coordenadas (,   ). La ecuación del eje de simetría es _______.

Actividad 2. De las gráficas de la actividad anterior, ¿cuál es el valor máximo o mínimo que alcanza la parábola, y cuándo se obtiene este?

Solución:
Para a), el punto máximo es (1, 2), donde el valor máximo es 2 y se obtiene cuando x vale 1.
Para b), el punto mínimo es (0, –4), donde el valor mínimo es _______ y se obtiene cuando x vale _______.

Actividad 3. ¿Cuál es el valor máximo o mínimo que alcanzan las siguientes funciones cuadráticas, y cuándo se obtiene este?

a) $y = -(x+7)^2 + 2$ b) $y = \frac{1}{10}x^2$ c) $y = -0.2(x-5)^2$
d) $y = -8x^2 - 4$ e) $y = (x+3)^2$ f) $y = 10x^2 + 3x - 1$

Solución:
a) Tiene punto máximo porque es cóncava hacia abajo, y sus coordenadas son (–7, 2), así, su valor máximo es 2 que se obtiene cuando x vale –7.

b) Tiene punto ________ porque es ___________________ y sus coordenadas son ___________, así, su valor ________ es ____ que se obtiene cuando x vale _____.

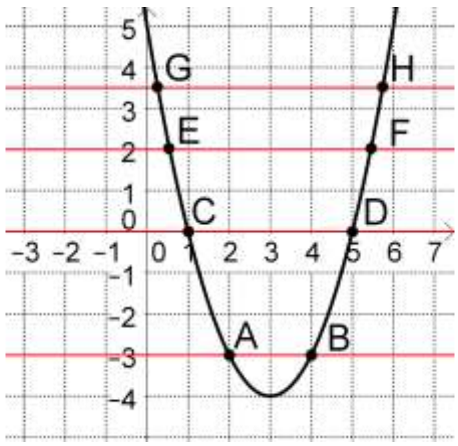
c) Tiene punto ________ porque es ___________________ y sus coordenadas son ___________, así, su valor ________ es ____ que se obtiene cuando x vale _____.

d) Tiene punto ________ porque es ___________________ y sus coordenadas son ___________, así, su valor ________ es ____ que se obtiene cuando x vale _____.

e) Tiene punto ________ porque es ___________________ y sus coordenadas son ___________, así, su valor ________ es ____ que se obtiene cuando x vale _____.

f) Tiene punto ________ porque es ___________________ y sus coordenadas son __________, así, su valor ________ es ____ que se obtiene cuando x vale _____.

Actividad 4. Determina qué puntos son simétricos de la siguiente parábola.



Solución:

Como recordarás la parábola tiene un eje de simetría, esto es, una recta que la divide en dos partes iguales. Si hacemos un dobles haciendo coincidir los puntos A con B, C con D, E con F y G con H, la marca obtenida será el eje de simetría. Entonces, podemos decir que los puntos mencionados son simétricos, porque coinciden al hacer el dobles, están a la misma distancia del eje de simetría y se encuentran sobre una misma recta horizontal como se muestra en la figura.

Actividad 5. Determina la expresión de la función cuadrática que cumpla con las siguientes condiciones:

a) Los puntos A(–2, 4) y B(6, 4) son simétricos; y el valor mínimo que alcanza es 3.

Solución:
Su valor mínimo nos indica que las coordenadas del punto mínimo son (x, 3). El valor de x nos dará la ecuación del eje de simetría, ya que este, es la recta vertical que se encuentra en medio de los dos puntos simétricos A y B. Este valor se calcula sumando las coordenadas x correspondientes de éstos puntos, las cuales son –2 y 6, y el resultado se divide entre dos, esto es, $\frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Entonces x = 2, es decir, las coordenadas del punto mínimo o vértice son (2, 3).
Ahora bien, la forma estándar de una función cuadrática es $y = a(x-h)^2 + k$, se sustituyen las coordenadas del vértice en ella, obteniéndose $y = a(x-2)^2 + 3$, sólo falta conocer el valor de a. Para esto, se sustituyen las coordenadas de cualquier punto dado en la función y se despeja a, por ejemplo, si se sustituye el punto (6, 4) se tiene 4 = $a(6-2)^2 + 3$ y despejando a, se obtiene $a = \frac{1}{16}$. Finalmente, la función que cumple con las condiciones dadas es $y = \frac{1}{16}(x-2)^2 + 3$.

b) Los ceros de la función son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$; el valor máximo que alcanza es 6.
Si trazas un plano cartesiano en tu cuaderno y en el localizas los datos dados, se te facilitará el contestar lo que se te pide a continuación.

Solución:
El punto medio entre los ceros es: _______. Por lo tanto, las coordenadas del punto máximo son (,   ).
Es cóncava hacia ____________. ¿Por qué? _____________________________
Con esta información, la función en su forma estándar queda como: y = __________
Donde el valor de a es igual a: ________.
Finalmente, la función cuadrática pedida es: y = ______________

c) Pasa por los puntos A(–2, –4) y B(4, –4); sus raíces son imaginarias; abre en un factor de alargamiento de $\frac{1}{3}$. En tu cuaderno trazar un plano cartesiano y en el trazar los datos dados.

Solución:
Los dos puntos tienen la misma ordenada, por lo que son _______________.
El punto medio entre los puntos A y B es: _______.
Su eje de simetría es la recta x = ______ y su vértice es (, k).
Es cóncava hacia __________. ¿Por qué? _______________________________.
Donde el valor de a es igual a: ________.
Con esta información, la función en su forma estándar queda como: y = __________
Donde el valor de k es: ________.
Por lo que la función pedida es: y = ______________.

d) Su eje de simetría es la recta x = – 2; pasa por el origen; abre en un factor de alargamiento (a) de 6 unidades; tiene punto máximo.

Solución:
Es cóncava hacia ____________. ¿Por qué? _____________________________
Por lo tanto, el valor de a es: _________.
Si el eje de simetría es x = – 2, entonces su vértice es (, k)
Con esta información, la función en su forma estándar queda como: y = ________
Donde el valor de k es: ________.
Por lo que la función pedida es: y = ______________

e) El eje de simetría es la recta $x = 3$; su gráfica corta al eje Y en 2; el valor mínimo que alcanza es –5 .

Solución:
Es cóncava hacia ____________, ya que, ________________________________

Si el eje de simetría es $x = 3$ y alcanza un valor mínimo de – 5 , entonces su vértice es:
(,   )
Con esta información, la función en su forma estándar queda como: y = ________
Donde el valor de a es: ________.
Finalmente, la función que cumple estas condiciones es: y = _______________

Ejercicios 2.5

1. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = -(x+5)^2 - 7$ b) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 3$ c) $y = 8(x-3)^2 + 11$

d) $y = 6x^2 + 4x - 7$ e) $y = -0.1(x-2)^2$ f) $y = (x+6)^2 + 2$

g) $y = -3x^2 + 4$ h) $y = 4x^2 - x$ i) $y = 2x^2$

j) $y = -2(x-1)^2 - 5$ k) $y = 3x^2 - 7x + 12$ l) $y = \frac{x^2}{4} + 3x - 5$

m) $y = 12x - 2x^2 - 17$ n) $y = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 3$

Determina:
- Su concavidad;
- Su vértice;
- El valor máximo o mínimo y cuándo se obtiene este;
- Su eje de simetría;
- Los ceros;
- La intersección con el eje y, y
- Bosqueja la gráfica.

2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$?

3. Determina la expresión de la función cuadrática que cumpla con las siguientes condiciones:

a) Su valor máximo es – 6; y pasa por los puntos (–1, –8) y (8, –8).
b) Tiene una raíz doble en (–7, 0) y corta al eje y en 5.
c) El valor mínimo que alcanza es 5, sus raíces son: $x_1 = -6$ y $x_2 = 3$
d) El eje de simetría es $x = -4$; es cóncava hacia abajo; abre en un factor de ½ ; pasa por el punto (2, –3).
e) Pasa por los puntos (–5, 3) y (6, 3); el valor mínimo que alcanza es –2.

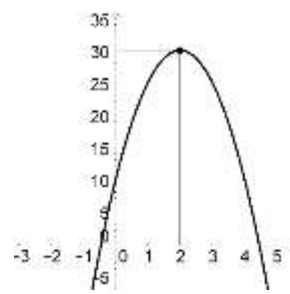
2.6 Problemas de aplicación.

A manera de concluir esta unidad, trabajarás algunos problemas que se pueden resolver por medio de las propiedades de las funciones cuadráticas. Con lo cual descubrirás un pequeño campo donde aplicar el conocimiento construido hasta el momento y darle significado.

Por ejemplo, con las funciones cuadráticas se pueden resolver situaciones como: evaluar para algún valor de la variable independiente o dependiente. Así como para determinar el máximo o mínimo, por ejemplo, ¿Qué altura tiene un objeto después de 5 segundos? ¿Cuál es la temperatura mínima que alcanza la taza de café? ¿Después de cuántos segundos alcanza la taza de café su temperatura mínima?
En este sentido, se sugieren los siguientes problemas:

Problema 1. Si se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, ésta sube hasta un cierto punto y luego empieza a caer. La relación que existe entre el tiempo t (en segundos) que la piedra lleva en el aire cuando se encuentra a una altura y (en metros) está dada por la función $y = -5t^2 + 20t + 10$. ¿Cuándo alcanzará el punto más alto y a qué altura está ese punto?

Solución:
Como se puede ver, se trata de encontrar la altura máxima y en qué tiempo ocurre esto, aspectos que se pueden obtener a partir de la función en su forma estándar.
Entonces, escribiremos la función $y = -5t^2 + 20t + 10$ en la forma estándar:
$y = (-5t^2 + 20t) + 10$ Agrupamos las x.
$y = -5(t^2 - 4t) + 10$ Se factoriza -5.
$y = -5(t^2 - 4t + (-2)^2) + 10 + 5(-2)^2$ Se completa el TCP para x.
$y = -5(t-2)^2 + 30$ Se factoriza el TCP y se suma $10 + 5(-2)^2$.

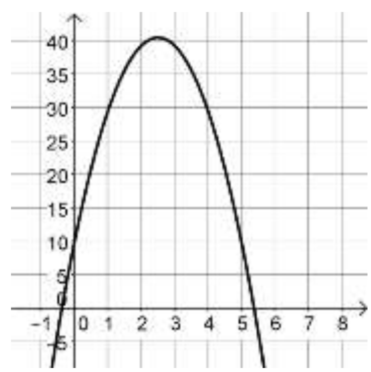


De la forma estándar, se puede deducir que tiene punto máximo cuyas coordenadas son (2, 30), es decir, la altura máxima es 30 m y se obtiene cuando han transcurrido 2 segundos.

Problema 2. Si un cañón se dispara a una altura de 9.8 metros desde el suelo, a cierto ángulo, la altura h de la bala con respecto al suelo, en el instante t, donde t es el tiempo en segundos, se determina por medio de la función: $h = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$.

a) Determina la altura máxima que alcanza la bala del cañon.
b) Determina el tiempo que transcurre para que la bala obtenga su altura máxima.
c) Determina el tiempo que transcurre para que la bala choque contra el suelo.

Solución:
Como se trata de encontrar el valor máximo, escribimos la función $y = h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$ a su forma estándar (escribe los procedimientos en tu cuaderno), esto es, $y = -4.9(t - 2.5)^2 + 40.425$. Y su gráfica es:

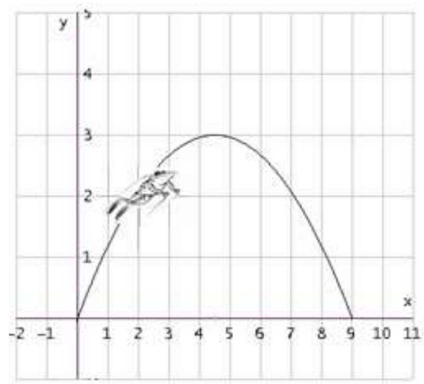


A partir de la forma estándar se deduce que el punto máximo es $(2.5, 40.425)$, por lo que:
a) La altura máxima que alcanza la bala es 40.425 m.

b) La cual se obtiene cuando han transcurrido 2.5 s.

c) Para determinar el tiempo que tarda en chocar contra el suelo, gráficamente será la intersección con el eje x, es decir, los "ceros". En este sentido, las raíces de su ecuación asociada (resuélvela en tu cuaderno) son: $x_1 \approx -0.37$, $x_2 \approx 5.37$, de las cuales la respuesta correcta es 5.37 s.

Problema 3. Algunos animales al saltar siguen trayectorias parabólicas. La siguiente figura muestra el salto de una rana superpuesta a un sistema coordenado rectangular. La longitud del salto es de 9 unidades y la altura máxima es de 3 unidades. Hallar una función cuadrática que especifique la trayectoria de la rana.



Solución:
Con base a la figura,

El vértice es: ____________.

El valor de a es: ___________.

Por lo tanto, la función cuadrática que especifica la trayectoria de la rana es: ____________________.

Problema 4. La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo vea una persona. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad *E* se mide en una escala de 0 a 10, entonces, la función que representa la efectividad es: $E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$ donde *n* es el número de veces que una persona ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿cuántas veces lo tiene que ver una persona?

Solución.
El punto máximo es: ______________. Escribe tus procedimientos en tu cuaderno.

Por lo tanto, la máxima efectividad se alcanza cuando lo ha visto ____ veces una persona.

Problema 5. Separar al número 18 en dos partes, tal que el producto de las partes sea máximo. Halla el valor de cada una de estas partes.

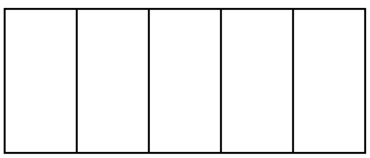
Solución:
La primera parte se puede escribir como: x
La segunda parte se puede escribir como: ______________.
Al multiplicar éstas dos partes resulta: __________________.

Si a la expresión resultante se escribe como función resulta: _________________.
Donde su punto máximo es: __________.

El valor máximo del producto es: _________, y se obtiene cuando una de las partes vale ________.

Por lo tanto, el valor de cada una de las partes es: ______ y ______.

Problema 6. Un veterinario cuenta con 30 metros de tela de alambre y quiere construir cinco jaulas para perros, construyendo primero una cerca alrededor de una región rectangular y luego dividiendo la región en 5 rectángulos iguales mediante cuatro cercas paralelas a uno de los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de cada jaula con las que el área total es máxima?



Solución:

Si x es el ancho y y el largo de toda la región rectangular, su área es A = _______.

Y para cercar las 5 jaulas se necesitan ___x metros y 2y metros de tela de alambre, ocupándose los 30 metros, es decir, ___________ = 30

Expresando el largo (y) en términos del ancho (x), la expresión queda como ___________________________

Sustituyendo esta expresión en su área, obtenemos: $A(x)$ = _______________.

Esta expresión nos representa el área de la región rectangular en función del ancho, que al hacer el producto nos queda la función cuadrática $A(x)$ = _________________, la cual tiene un máximo, cuyas coordenadas son (,   ).

Por lo tanto, las dimensiones para cada una de las jaulas son: x =______ , y = _____

Problema 7. Se ha comprobado que cuando una pistola de señales es disparada verticalmente la altura del destello sobre la superficie es igual a $h = 51t - 0.85t^2$, donde t es el número de segundos que habrán transcurrido después del disparo. Si la pistola es disparada verticalmente, el destello puede verse desde un puesto de observación solamente cuando su altura es de 85 metros o más.

b) ¿Cuál será la altura máxima que alcanza?
a) ¿A los cuántos segundos alcanza el destello su altura máxima?
c) ¿Cuánto tiempo será visible el destello desde el puesto de observación?

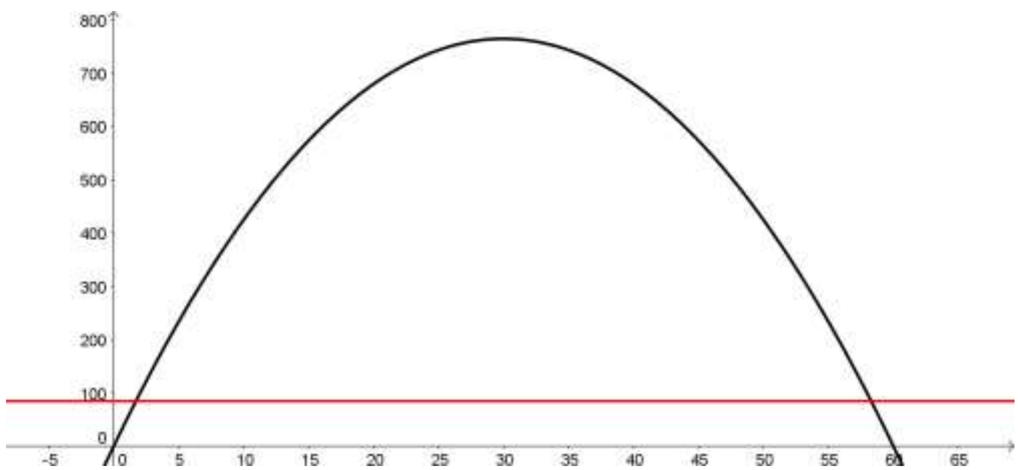
Solución:
La función $h = 51t - 0.85t^2$ escrita en su forma estándar es: ___________________.
Por lo que su punto máximo es: (,   )

a) Entonces, la altura máxima que alcanza es ________.

b) Y se obtiene cuando han transcurrido _________.

c) Los ceros de la función son: ________ y ________.

Al trazar la gráfica de esta función se obtiene:



¿Cuántos segundos han de transcurrir para obtener una altura de 85 m? Para saberlo, hay que sustituir $h = 85$ en la función, esto es, $85 = 51t - 0.85t^2$ con lo cual se obtiene $t_1 =$ ______ y $t_2 =$ ________. Por lo tanto, el tiempo transcurrido entre éstos valores es de: ___________, lo cual representa el tiempo que será visible el destello desde el puesto de observación.

Ejercicios 2.6

1) Determinar la expresión algebraica que representa la trayectoria del salto parabólico de un atleta que alcanza una altura máxima de 2 m y una longitud de 3.40 m.

2) La suma de dos números es 24. Encontrar dichos números con la condición de que su producto sea máximo.

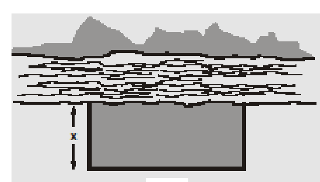
3) Encontrar dos números cuya suma es 56 y la suma de sus cuadrados es mínima.

4) El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresar el área del rectángulo en función del lado x de la base, y encuentra el valor de la base con el cual el área se hace máxima.

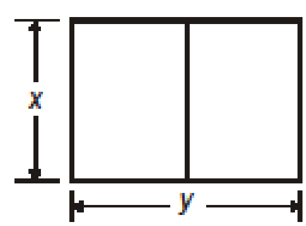
5) Si lanzamos una piedra al aire, un experimento señala que la trayectoria de la piedra está dada por la función $y = -5t^2 + 50t$, siendo t el tiempo en segundos, y y la altura en metros.
a) Calcular el segundo en que alcanza la máxima altura y cuál es la máxima altura.
b) ¿En qué segundo cae a tierra?
c) Representa gráficamente la función.

6) En un túnel de forma parabólica, dada por la función $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, se pide calcular:
a) La altura que alcanza a 2 m del pie del arco.
b) La altura máxima.
c) El ancho de la base del túnel.

7) Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por tres de sus lados, ya que el cuarto lado estará limitado por el cauce de un río. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?



8) Con un rollo de 270 metros de alambrada se deben construir dos corrales adyacentes idénticos, como se muestra en la figura. Calcular las dimensiones que debe tener el cercado para que el área abarcada sea máxima.



9) La temperatura Tº Celsius en un invernadero t horas después del anochecer (7 PM) está dada por: $T(t) = \frac{1}{4} t^2 - 5t + 30$, $(t \leq 20)$

a) ¿Cuál es la temperatura del invernadero al anochecer?
b) Un cierto tipo de geranios no sobrevive en temperaturas menores a 2ºC, ¿se pueden cultivar estas plantas en el invernadero? Explique.
c) ¿A qué hora la temperatura en el invernadero es de 9ºC?

10) En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los t años de haberlas dejado en la isla está dado por $N(t) = -t^2 + 22t + 112$ $(t > 0)$. Calcular:

a) La cantidad de años en los cuales la población de iguanas aumentó.
b) ¿En qué momento la población de iguanas se extingue?

11) Un bateador de béisbol conecta una pelota a una altura de 1.2 m, con una velocidad inicial cuya componente vertical es de 30 m/seg, ésta describe una trayectoria parabólica dada por la expresión $h(t) = -4.9t^2 + 30t + 1.2$. ¿Cuál es la altura máxima de la pelota? ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en alcanzar la máxima altura?

AUTOEVALUACIÓN

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.
Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1½ hora como máximo.

1) Para cada una de las siguientes funciones explica porque NO ó SI representa a una función cuadrática.
a) $y = 2x^2 + 5x^3 + 4$ b) $y = 2x - 3$ c) $y = -3x^2 y + 1$ d) $y = 2x - 3x^2$

2) Escribe hacia donde se abre cada una de las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas y di si tiene un mínimo o un máximo. (JUSTIFICA TU RESPUESTA)
a) $y = -\frac{3}{4}x^2$ b) $y = 2x - 8x^2 + 9$ c) $y = -3x + 18x^2$

3) Trazar un esbozo sin tabular, de las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas y escribe sus elementos. **a)** $y = \frac{3}{8}x^2 - 8$ **b)** $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$

4) Encuentra las coordenadas del punto extremo (vértice) de la función cuadrática $y = 5x^2 + 10x + 3$.

5) Encuentra los ceros de la función cuadrática anterior y trazar su gráfica.

6) En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los t años de haberlas dejado en la isla está dado por:

$$N(t) = -t^2 + 22t + 112 \quad (t > 0).$$

Calcula:

a) La cantidad de años en los cuales la población de iguanas aumentó.
b) ¿En qué momento la población de iguanas se extingue?

ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios.
Si resuelves bien 3 o menos, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, y hacer todos los ejercicios.
Si contestas bien 4 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 5 o 6 vas avanzando bien en tu estudio

BIBLIOGRAFÍA.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: visualización y pensamiento matemático. Pearson Educación, México.

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). *Geometría*. México: Pearson.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) *Geometría*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.

Popoca, MV. & Arellano F., (2014). Guía para el profesor de Matemáticas II. México: CCH Oriente, UNAM.

Santos, L., (2010). La función cuadrática: enfoque de resolución de problemas. Trillas, México.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Cengage

Citas de recursos electrónicos:

Función cuadrática, obtenido el 31 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=eIq654T4mcs&feature=related

Función cuadrática parte I, obtenido el 31 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=bEgkvB11A2A

Introducción a la Función cuadrática, obtenido el 31 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=sdWh5CnYIX4

Función cuadrática, parábolas, obtenido el 31 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=aK4d3RhTZsQ

Gráfica de una Función cuadrática, obtenido el 31 de septiembre de 2016, de http://www.math2me.com/playlist/pre-calculo/grafica-de-una-funcion-cuadratica

Análisis de una Función cuadrática, obtenido el 20 de octubre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=0pUnHF1FJ2s

Aplicaciones de la Función cuadrática, obtenido el 30 de octubre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=WUq7VBkvV1I

ANEXO: MEMORAMA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Al final del curso puedes jugar con 2, 3 o 4 de tus compañeros, el siguiente MEMORAMA.

Sacar una copia a las siguientes cartas y recortarlas.

Reglas del juego:

Se forman equipos de 2, 3 o 4 alumnos, las 15 cartas se colocan boca abajo **agrupando las que tienen la expresión algebraica de un lado, y las cartas con gráficas en otro lado**.

– Se debe decidir quién iniciará el juego. El primer jugador saca una carta del lado de las expresiones algebraicas y a continuación saca otra carta del lado de las gráficas.

– Si las dos cartas se corresponden, el jugador se lleva la pareja de cartas y de nuevo vuelve a jugar.

– Si las dos cartas no se corresponden, coloca las dos cartas en sus sitios. Para hacer más ágil el juego, las cartas pueden quedar mostrando la función y la gráfica (boca arriba) y continúa el siguiente jugador.

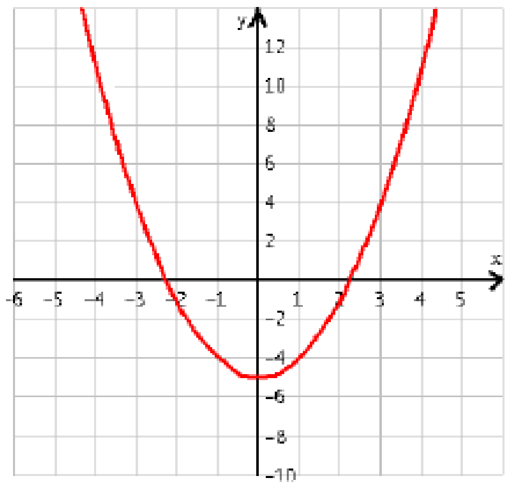
– El juego acaba cuando ya no quedan cartas sobre la mesa, es importante que primero se debe de tomar la carta con la expresión algebraica.

– Gana el jugador que ha conseguido más cartas.

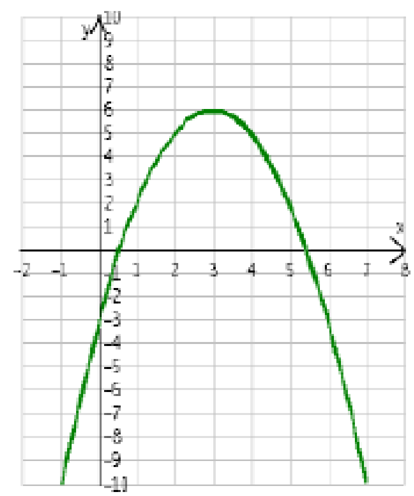
Para mejor motivación se le puede obsequiar un dulce o chocolate al ganador de cada equipo.

MEMORAMA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS
Para alumnos del 2º semestre del CCH

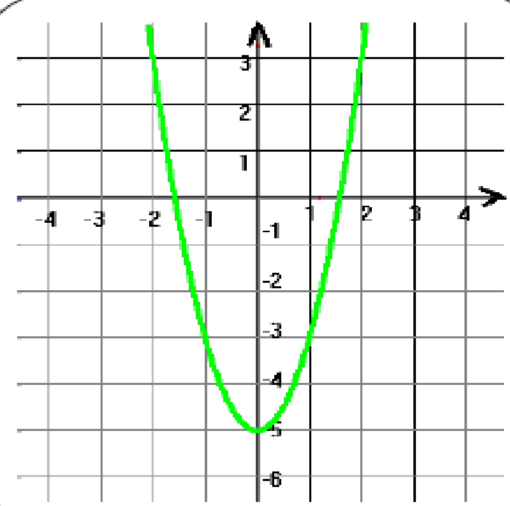
$$f(x) = x^2 - 5$$



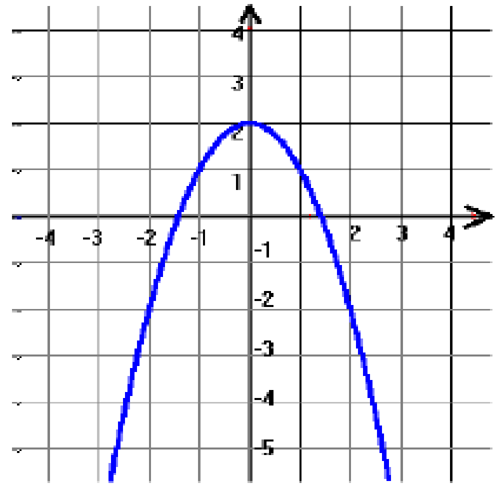
$$f(x) = -(x-3)^2 + 6$$



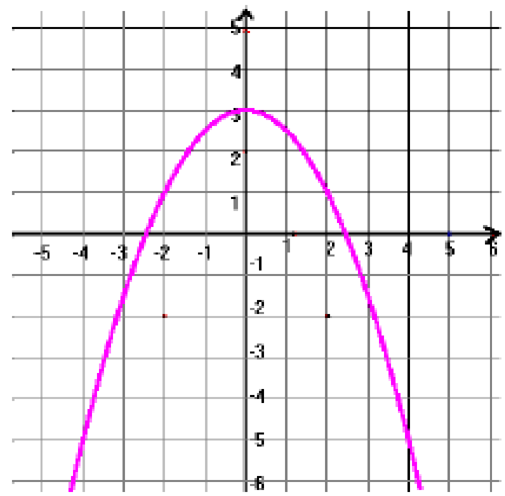
$$f(x) = 2x^2 - 5$$



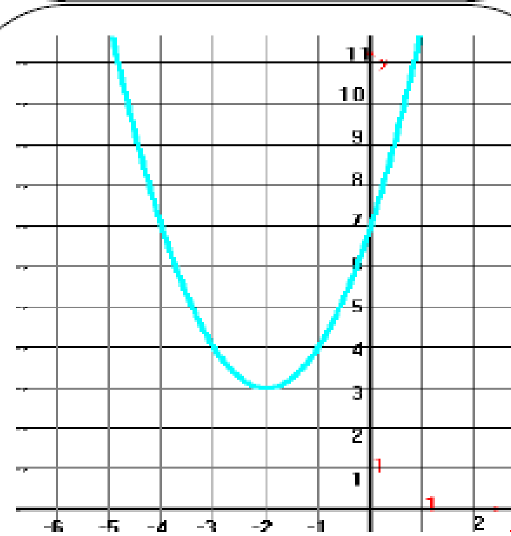
$$f(x) = -x^2 + 2$$



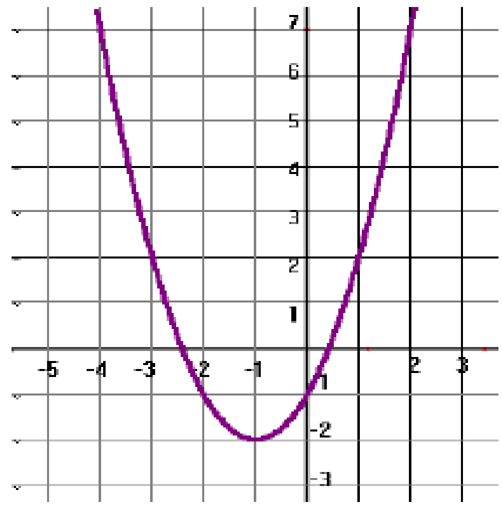
$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3$$



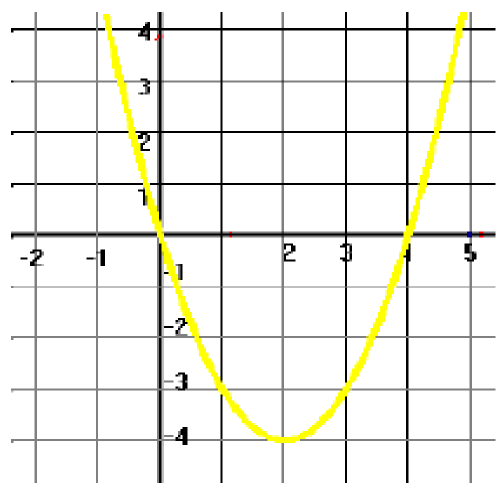
$$f(x) = (x+2)^2 + 3$$



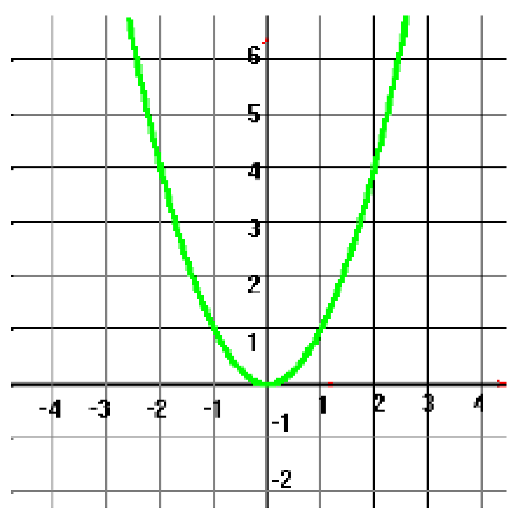
$$f(x)=(x+1)^2-2$$



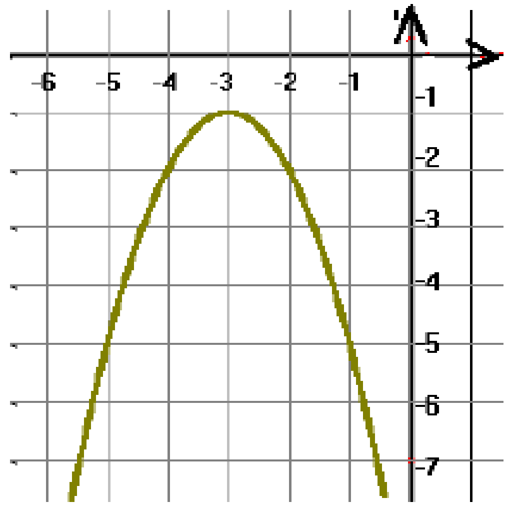
$$f(x)=(x-2)^2-4$$



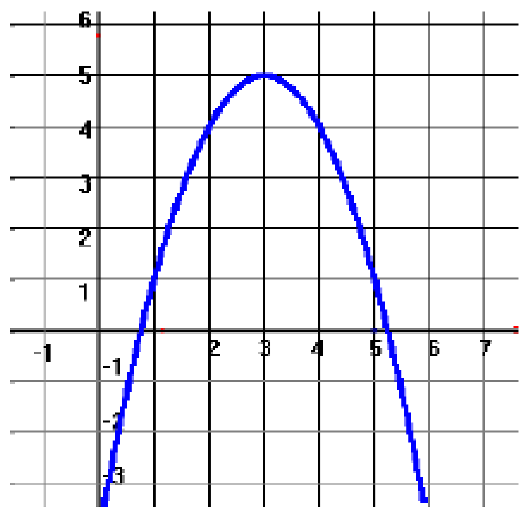
$$f(x) = x^2$$



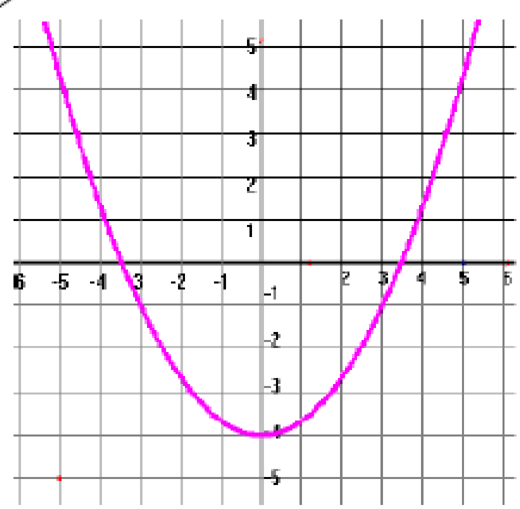
$$f(x) = -(x+3)^2 - 1$$



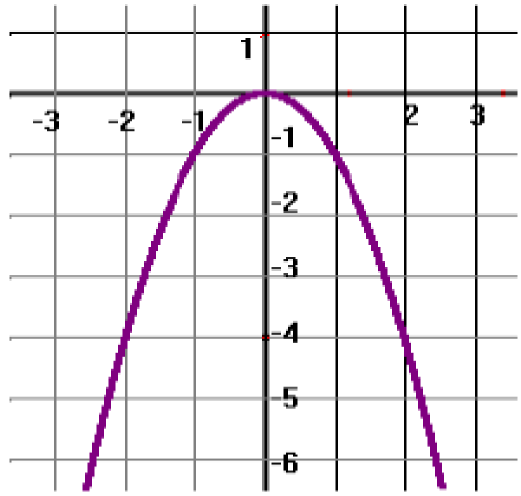
$$f(x) = -(x-3)^2 + 5$$



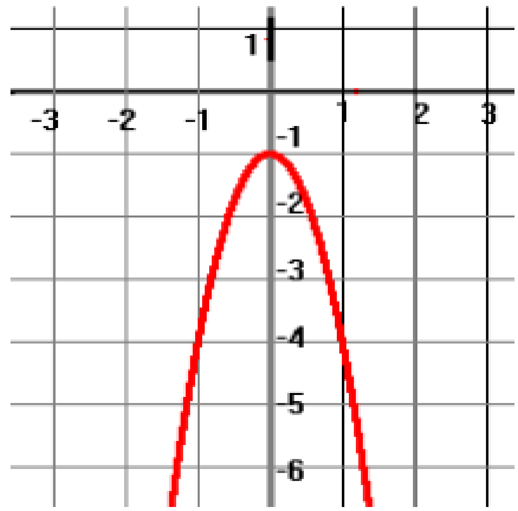
$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4$$



$$f(x) = -x^2$$



$$f(x) = -3x^2 - 1$$



$$f(x) = 2(x+5)^2$$