4.2 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Para iniciar el tema proponemos las siguientes situaciones que ilustran la variación logarítmica. En estas tratamos de que el alumno explore e incorpore los conceptos y las formas de representación que ha aprendido, de modo que le de sentido y adquiera una buena interpretación de la situación analizada. Después procederemos a un estudio más general y abstracto de este tipo de funciones.

4.2.1 SITUACIONES QUE DAN LUGAR A FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

Aprendizajes:

- *Representa por medio de funciones logarítmicas, algunas situaciones que se le presenten.*
- *Obtiene, mediante el análisis de las condiciones de una situación o problema o bien del estudio del comportamiento de algunos valores que obtenga, la expresión algebraica* $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ *que le corresponda.*

Cuando se pretende representar medidas que toman valores muy dispares, desde muy pequeños a muy grandes, se emplea la escala logarítmica. Algunos ejemplos en que se utiliza son:

• La escala Richter que mide la intensidad de los terremotos.
• La intensidad del sonido en belios o decibelios, o el mismo pentagrama.
• El ph de una sustancia
• La magnitud de las estrellas.
Etc. Etc.

1. Magnitud de un terremoto

La escala de Richter (diseñada por el científico norteamericano C. F. Richter en el año de 1935) es una forma de convertir las lecturas sismográficas en números que proporcionan una referencia sencilla para medir la magnitud **M** de un terremoto. Todos los terremotos se comparan con un **Terremoto de nivel cero** cuya lectura sismográfica mide 0.001 de milímetro a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un terremoto cuya lectura sismográfica mide x milímetros tiene una magnitud $\mathbf{M}(x)$ dada por: $\mathbf{M}(x) = log\left(\frac{x}{x_0}\right)$ donde "$x_0 = 10^{-3}$" es la lectura de un terremoto de nivel cero a la misma distancia del epicentro.

Richter estudió muchos terremotos ocurridos entre 1900 y 1950. El mayor, ocurrido en San Francisco en el año de 1906, tuvo una magnitud de 8.9 en la escala de Richter, y, el menor una magnitud de 0. Esto corresponde a una razón de intensidades de 800.000.000, así que, la escala de Richter proporciona números mucho más manejables para su trabajo.
Cada unidad de incremento en la magnitud de un terremoto en la escala de Richter, indica una intensidad 10 veces mayor. Así, por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es 10 veces mayor que un terremoto de magnitud 5. Uno de magnitud 8, es 10 x 10 x 10 = 1000 veces mayor (en intensidad) que uno de magnitud 5. En general, puede probarse que la intensidad relativa de dos terremotos se puede determinar elevando 10 a una potencia igual a la diferencia de sus lecturas en la escala de Richter.

Ejemplo 1) ¿Cuál es la magnitud de un terremoto cuya lectura sismográfica es de 0.1 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro?

Solución.
De acuerdo a la fórmula anterior, si x = 0.1, entonces la magnitud **M**(x) de este terremoto es: $\mathbf{M}(0.1) = log\left(\frac{x}{x_0}\right) = log\left(\frac{0.1}{0.001}\right) = log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-3}}\right) = log\ 10^2 = 2$

Lo que indica que el terremoto mide 2.0 en la escala de Richter.

Ejemplo 2) El devastador terremoto de San Francisco en 1906 midió 8.9 en la escala de Richter. ¿Cómo se compara este terremoto con el de Papúa, Nueva Guinea, en 1988, que midió 6.7 en la escala de Richter?

Solución.
Si x_1 y x_2 denotan respectivamente, las lecturas sismográficas de los terremotos de San Francisco y Papúa, usando la fórmula anterior tenemos:

$$8.9 = log\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \quad \text{y} \quad 6.7 = log\left(\frac{x_2}{x_0}\right)$$

Escribiéndolos en forma exponencial ($\boldsymbol{y = log_a(x)}$ si y sólo si $\boldsymbol{x = a^y}$) tenemos:

$$log\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = 8.9 \quad \text{si y sólo si} \quad 10^{8.9} = \frac{x_1}{x_0}$$

Esta relación nos indica que el terremoto de San Francisco fue $10^{8.9}$ mas intenso que uno de nivel cero.

$$log\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = 6.7 \quad \text{si y sólo si} \quad 10^{6.7} = \frac{x_2}{x_0}$$

Esta otra relación nos indica que el terremoto de Papúa fue $10^{6.7}$ mas intenso que uno de nivel cero.
Para comparar sus intensidades se divide x_1 entre x_2 , si se despeja cada una de estas variables y se dividen tenemos:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10^{8.9}x_0}{10^{6.7}x_0} = \frac{10^{8.9}}{10^{6.7}} = 10^{2.2} = 158.4893$$

Es decir $x_1 \approx 158x_2$ indica que el terremoto de San Francisco fue 158 veces mas intenso que el terremoto de Papúa.

Además de estos ejemplos, existe una gran variedad de situaciones en las que intervienen los logaritmos, como por ejemplo:
Los astrónomos para determinar una magnitud estelar de una estrella o planeta utilizan ciertos cálculos de carácter logarítmico. La ecuación logarítmica les permite determinar la brillantez y la magnitud.

En física la función logarítmica tiene muchas aplicaciones entre las cuales se puede mencionar el cálculo de la intensidad del sonido "L" en decibeles de un sólido, para el cual se emplea la siguiente ecuación L= 10 . Log(I/I_0) , donde I es la intensidad del sonido (la energía cayendo en una unidad de área por segundo), I_0 es la intensidad de sonido más baja que el oído humano puede oír (llamado umbral auditivo). Una conversación en voz alta tiene un ruido de fondo de 65 decibeles.

Nota para el profesor: Proponemos la siguiente actividad para que la resuelva el alumno y se involucre un poco más en el tema.

Actividad 1) Un esqueleto contiene la centésima parte de su cantidad original de carbono 14 (^{l4}C). Calcula la antigüedad del esqueleto, con precisión de1000 años. (La vida media del ^{14}C es de aproximadamente 5750)

Solución:

La vida media significa que la cantidad original A, tarda 5750 años en reducirse a la mitad, $A_0 = A/2$. La dependencia entre la cantidad de ^{14}C y el tiempo t se va reduciendo, entonces esta se representa por una función exponencial decreciente, así que la expresión que las relaciona es:

$A_0 = Ae^{kt}$ donde el valor de k es negativo

Pero no conocemos su valor, así que para determinarlo utilizamos lo de la vida media,

t = _________ años con A_0 = _______

$$\frac{A}{2} = Ae^{5750k}$$

Dividiendo entre A: $$\frac{1}{2} = e^{5750k}$$

Como todavía no sabemos despejar en este tipo de ecuaciones empecemos por darle valores y utiliza tu calculadora:

$e^{5750(-0.1)} \approx$ ___________ $e^{5750(-0.01)} \approx$ __________ $e^{5750(-0.001)} \approx$ ___________

$e^{5750(-0.0001)} \approx$ __________ $e^{5750(-0.00011)} \approx$ __________ $e^{5750(-0.00012)} \approx$ _________

Con estos cálculos podemos afirmar que el valor de $k \approx$ ________

Ahora sustituimos este valor para calcular la cantidad de carbono 14

$$A_0 = Ae^{-0.00012t}$$

Como el esqueleto contiene la centésima parte, entonces A_0 = _______

$$\frac{A}{100} = Ae^{-0.00012\,t}$$

y la ecuación que se tiene que resolver ahora es:

$$\frac{1}{100} = e^{-0.00012\,t} = 0.01$$

Nuevamente ahora démosle algunos valores a la variable que ahora es t.

$e^{-0.00012\,(100)} \approx$ ________ $e^{-0.00012\,(10000)} \approx$ _________ $e^{-0.00012\,(20000)} \approx$ __________

$e^{-0.00012\,(30000)} \approx$ _______ $e^{-0.00012\,(33000)} \approx$ _________ $e^{-0.00012\,(35000)} \approx$ __________

$e^{-0.00012\,(40000)} \approx$ ________ ya nos pasamos, hay que regresarnos

$e^{-0.00012\,(39000)} \approx$ _________ $e^{-0.00012\,(38000)} \approx$ __________ $e^{-0.00012\,(37000)} \approx$ _________

Así que podemos decir que el esqueleto tiene aproximadamente _________ años de antigüedad.

Este método de estar aproximando es muy tedioso, pero hay otra forma de hacerlo conociendo la función logaritmo, más adelante te darás cuenta.

4.2.2 LA FUNCIÓN LOGARITMO COMO INVERSA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL. NOCIÓN DE FUNCIÓN INVERSA.

Aprendizajes:

- *Explica verbalmente el significado de* $\log_a x$.
- *Construye la gráfica de* $f(x) = \log_a x$ *(para algún valor de* **a***) a partir de reflejar la gráfica de su inversa, en la recta* $y = x$.
- *Conoce la noción de función inversa y explica en sus propias palabras qué sucede cuando se aplica una después de la otra.*

Hemos comentado que la función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, pero, ¿que es la función inversa? y ¿qué es la función logarítmica?. Esta es una forma de iniciar estos conceptos, lo siguiente puede dejarse como una lectura a los alumnos para que en clase se aclaren las dudas. Esta lectura agiliza nuestra labor en forma grupal, obteniendo beneficios para todos.

FUNCIÓN INVERSA:

A la función inversa de f, se le llama f^{-1}, y se cumple que: **Si** $f(x)=b \rightarrow f^{-1}(b)= x$ siempre y cuando f sea uno a uno o biunívoca.

Por ejemplo:

1) Si $f(x) = x^2$ su inversa es $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$, ya que $f^{-1}(x^2) = +\sqrt{x^2} = x$

2) Si $f(x) = x+ 4$ su inversa es $f^{-1}(x) = x– 4$, ya que $f^{-1}(x+ 4) = (x+ 4) – 4 = x+ 4– 4 = x$

3) Si $f(x) = \tan (x)$ su inversa es $f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$, ya que $f^{-1}(\tan (x)) = \tan^{-1}(\tan (x)) = x$

4) Si $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ su inversa es $f^{-1}(x) = x^3 – 1$, ya que $f^{-1}(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 – 1 =$
$= x + 1 – 1 = x$

Estos ejemplos muestran que al hacer la composición de una función y su inversa el resultado es la función identidad que es $F(x) = x$. Las siguientes actividades hacen un análisis gráfico de la inversa de la función exponencial.

Ya vimos que la función exponencial era una función uno a uno o biunívoca, lo cuál quiere decir que su inversa también es una función. Y su gráfica la podemos obtener intercambiando los valores de x por los de y en sus pares ordenados, o lo que es lo mismo reflejando la gráfica de $y = a^x$ en la recta $y = x$, vamos hacerlo para cuando a > 1 (creciente) y cuando $0 < a < 1$.

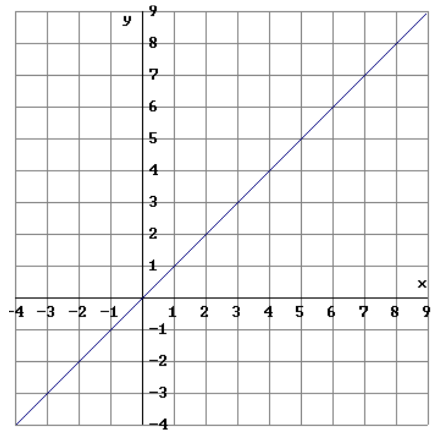
Actividad 1) Completa la siguiente tabla y traza las gráficas de la función $f(x) = 2^x$ y su inversa $f^{-1}(x)$.

Solución:

La tabla de $f(x)$ ya esta completa, así que intercambiamos los valores de x por los de y, completamos la tabla de su inversa, $f^{-1}(x)$, y localizamos los puntos sobre el siguiente plano delineando ambas funciones.

x	$f(x) = 2^x$
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$f^{-1}(x)$
0.125	-3



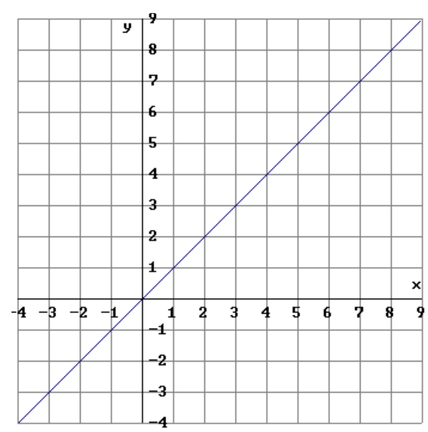
La función inversa de $f(x) = y = 2^x$, $f^{-1}(x)$, la podemos escribir como: $x = 2^y$, intercambiando los papeles de las variables

Actividad 2) En el siguiente plano trazar las gráficas de la función $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ y su inversa $g^{-1}(x)$, escribe la expresión que la representa.

Solución:
De la tabla de g intercambiamos los valores de x por los de y, para completar la tabla de la inversa de g (g^{-1}), para poder trazar las gráficas de ambas funciones.

x	$g(x)=(\frac{1}{2})^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125

x	$g^{-1}(x)$



La inversa de $g(x) = y = (\frac{1}{2})^x$, es $g^{-1}(x)$ y su ecuación es _____________

Observación: Podemos cambiar la base y para sacar la inversa simplemente intercambiamos las variables.

De acuerdo a lo anterior podemos decir que, si tenemos una función de la forma $y = a^x$ su inversa es una función cuya ecuación es $x = a^y$. Esta expresión recibe el nombre de *logaritmo de x* y se define como:

FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

La función logarítmica se escribe como $f(x)$ o $y = log_a(x)$ que se lee "$f(x)$ es igual al logaritmo base a, de x", donde $a > 0$ y diferente de 1, y es la función inversa de la función exponencial $y = a^x$.

Por tal razón el logaritmo se define como: $\boldsymbol{y = log_a(x)}$ si y sólo si $\boldsymbol{x = a^y}$
Es decir, la forma exponencial de $\boldsymbol{y = log_a(x)}$ es $\boldsymbol{x = a^y}$ y viceversa.

*Observación: La base del logaritmo es la base de la potencia. El resultado del logaritmo será el exponente de la potencia, y la **x** será el resultado de la potencia.*
Cuando la base sea 10, simplemente se escribe $log\ x$, el 10 no se pone. Y cuando la base sea $\boldsymbol{e}$, se le llama logaritmo natural o logaritmo neperiano y se escribe $ln\ x$.

En la siguiente sección haremos algunos ejemplos donde utilicemos esta definición.

PARA QUE EL ALUMNO REFUERZE LO APRENDIDO EN ESTA SECCIÓN SE RECOMIENDA QUEVEA LOS VIDEOS EN LAS SIGUIENTES PÁGINAS WEB:
http://www.youtube.com/watch?v=zRQdBeTzW3c&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=55GWmhgf9lE&feature=related

Ejercicio 4.2.2

1) Siguiendo el procedimiento gráfico usado anteriormente, en un mismo plano donde esté trazada la recta $y = x$, traza la gráfica de $f(x) = 3^x$ y su inversa $f^{-1}(x)$. Dar su expresión, su dominio y su rango, ¿Cuáles son sus ceros o raíces?

2) Siguiendo el procedimiento usado anteriormente, en un mismo plano donde esté trazada la recta $y = x$, traza la gráfica de $f(x) = (⅓)^x$ y su inversa $f^{-1}(x)$. Dar su expresión, su dominio y su rango, ¿Cuáles son sus ceros o raíces?

3) En un mismo plano traza la gráfica de $f(x) = 10^x$ y su inversa $f^{-1}(x) = log(x)$. Dar su dominio y su rango, ¿Cuáles son sus ceros o raíces?

4) En otro plano traza la gráfica de $h(x) = \boldsymbol{e}^x$ y de su inversa, $h^{-1}(x) = ln(x)$. Dar su dominio y su rango, ¿Cuáles son sus ceros o raíces?

5) En un mismo plano traza la gráfica de $f(x) = 5^x$ y su inversa $f^{-1}(x)$. Dar su dominio y su rango, ¿Cuáles son sus ceros o raíces?

4.2.3 EQUIVALENCIA DE LAS EXPRESIONES $y = a^x$ y $\log_a y = x$.

Aprendizajes:

- *Explica el porqué de la equivalencia entre las expresiones* $y = a^x$ *y* $\log_a y = x$.
- *Transita de una expresión a la otra.*

Nota para el profesor: Proponemos los siguientes ejemplos (que pueden dejarse para que los lea y complete el alumno en su casa), donde se aplica la definición de logaritmo para escribir expresiones logarítmicas a su forma exponencial y viceversa. También se desarrollan algunos ejemplos para calcular el logaritmo de un número en cualquier base.

Ejemplo 1) Escribe $\log_4 32 = 5/2$ en su forma exponencial.
Solución:
La base del logaritmo es ___, que será la base de la potencia. El resultado del logaritmo es ______ que será el exponente de la potencia, y el 32 será el resultado de la potencia. Así su forma exponencial es $32 = 4^{5/2}$.

Ejemplo 2) Escribe $\log_{64} 4 = 1/3$ en su forma exponencial
Solución:
La base del logaritmo es ___, que será la base de la potencia. El resultado del logaritmo es ______ que será el exponente de la potencia, y el 4 será el resultado de la potencia. Así su forma exponencial es $4 = (64)^{1/3}$.

Ejemplo 3) Escribe $6^{-2} = 1/36$ en su forma logarítmica.
Solución:
La base de la potencia es _____, el exponente es ____,que será el resultado del logaritmo y 1/36 será el número al cual se le saca logaritmo. Así que la forma logarítmica es $\log_6(1/36) = -2$

Ejemplo 4) Escribe $(1/8)^{-3} = 512$ en su forma logarítmica.
Solución:
La base de la potencia es _____, el exponente es ____, que será el resultado del logaritmo y ____ será el número al cual se le saca logaritmo. Así que la forma logarítmica es $\log_{1/8}(\quad) =$

Ejemplo 5) Evalúa o encuentra el resultado de la expresión $\log_8 16$.
Solución:
Se escribe la expresión en su forma exponencial, la base es 8 y el resultado que será el exponente no lo conocemos, lo llamaremos x. Así que $8^x = 16$ y resolvemos la ecuación.
Como $8 = 2^3$ y $16 = 2^4$, sustituyendo tenemos $(2^3)^x = 2^4$,

$2^{3x} = 2^4$

Se cumple $3x = 4$

Despejando $x = 4/3$

Finalmente $log_8 16 = 4/3$

Ejemplo 6) Evalúa o encuentra el resultado de la expresión $log_{49}343$.

Solución:

Escribe la expresión en su forma exponencial, la base es ______ y el resultado que será el exponente no lo conocemos, lo llamamos x. Así que $49^x = 343$ y se resuelve la ecuación.

Como $49 = 7^2$ y $343 = 7^3$, sustituyendo tenemos $(7^2)^x = 7^3$,

$7^{2x} = 7^3$

Entonces $2x = 3$

Despejando $x = 3/2$

Finalmente $log_{49} 343 = 3/2$

Para que los alumnos practiquen y refuercen lo anterior, se recomienda los siguientes ejercicios.

Ejercicio 4.2.3

1) Pasa de la forma exponencial a logarítmica o viceversa según sea el caso.

a) $17^0 = 1$ b) $log\ 0.0001 = -4$ c) $5^{-3} = 1/125$

d) $(36)^{3/2} = 216$ e) $log_7(1/2401) = -4$ f) $log_{\sqrt{2}} 2 = 2$

g) $3^7 = 2187$ h) $log_5(15625) = 6$ i) $\log_{\sqrt{7}} (1/343) = -6$

2) Calcula los valores de:

a) $log_5\ 625$ b) $log_{(2/3)}\ (8/27)$ c) $log\ (10000)$ d) $log_2\ (512)$

e) $log_4(4096)$ f) $log_{16}(128)$ g) $log_5(15625)$ h) $log_2\ (log_4\ 256)$

i) $log_3\ (log_2\ 512)$ j) $log_{25}\ (125)$ k) $log_{27}\ (243)$

4.2.4 LOGARITMOS CON BASE 10 Y NATURALES. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS INCLUYENDO LA EXPRESIÓN PARA CAMBIO DE BASE.

Aprendizajes:

- *Identifica que para una misma base **a**, la función exponencial y la función logaritmo respectiva, plantean situaciones inversas una de la otra.* ($\boldsymbol{\log_a a^x = x}$ y $\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}$)
- *Representa por medio de funciones logarítmicas, algunas situaciones que se le presenten, y aplica en ellas, cuando se requiera, las propiedades de los logaritmos.*
- *Menciona las ventajas de trabajar con los exponentes para efectuar cálculos y resolver problemas.*

Ya vimos que la función logarítmica y la función exponencial son inversas una de la otra. Y sus gráficas las obtenemos reflejando una, sobre la recta $y = x$ (función identidad), para obtener la otra. Esto quiere decir que sus composiciones producen la función identidad, este hecho hace que se cumplan las siguientes propiedades:

Si $y = log_a\, a^x$ (por def. de log) $a^y = a^x \Rightarrow y = x,$ por lo tanto, $log_a\, a^x = x$

Si $y = a^{\log_a x}$ (por def. de log) $log_a\, y = log_a\, x$, (al ser función uno a uno) $y = x$, por lo tanto, $a^{\log_a x} = x$

Por otro lado, como los logaritmos se pueden expresar como potencias, sus propiedades pueden obtenerse de las propiedades de los exponentes y se pueden verificar utilizando estas mismas reglas. Recordando que la base es mayor que cero y diferente de 1.

Supongamos que m y n son números positivos ($m > 0$, $n > 0$), a es un número positivo y distinto de 1 ($a > 0$ y $a \neq 1$) y p es cualquier número real: En este caso se cumple lo siguiente:		
Propiedad	Definición	Ejemplo
Producto	$log_a\, mn = log_a\, m + log_a\, n$	$log_5\, 7x = log_5\, 7 + log_5\, x$
Cociente	$log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a\, n$	$log_3 \frac{24.56}{3b} = log_3\, 24.56 - log_3\, 3b$
Potencia	$log_a\, m^p = p\, log_a\, m$	$log_6\, 9^7 = 7\, log_6\, 9$

Verifiquemos la propiedad del cociente y luego intenta verificar las otras dos.

Ejemplo 1) Probar la propiedad del cociente: $log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a\, n$

Solución: Asignémosle un valor a los logaritmos por separado

$log_a\, m = r$ y $log_a\, n = s$

Los escribimos en su forma exponencial: $m = a^r$ y $n = a^s$

Dividiendo las dos ecuaciones: $\frac{m}{n} = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ es decir $\frac{m}{n} = a^{r-s}$

Expresándolo en su forma logarítmica: $log_a \frac{m}{n} = r - s$

Sustituyendo el valor de r y s: $log_a \frac{m}{n} = log_a\, m - log_a\, n$

Esta es la expresión a la que se deseaba llegar.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar una determinada expresión.

Ejemplo 2) Usando las propiedades de los logaritmos, simplifica la expresión:

$$7\, log_a\, x - log_a\, 5 + log_a\, (x - 2)$$

a sólo un logaritmo de una expresión que contenga a la variable x.

Solución:

1º) $7\, log_a\, x = log_a\, x^7$ (Propiedad de la potencia)

Sustituyendo nos queda $7\, log_a\, x - log_a\, 5 + log_a\, (x - 2) = log_a\, x^7 - log_a\, 5 + log_a\, (x - 2)$

2º) $log_a\, x^7 - log_a\, 5 = log_a\, \dfrac{x^7}{5}$ (Propiedad del cociente)

Sustituyendo tenemos que $log_a\, x^7 - log_a\, 5 + log_a\, (x - 2) = log_a\, \dfrac{x^7}{5} + log_a\, (x - 2)$

3º) $log_a\, \dfrac{x^7}{5} + log_a\, (x - 2) = log_a\, (\dfrac{x^7}{5}\, (x - 2))$ (Propiedad del producto)

De nuevo sustituimos y tenemos que $log_a\, \dfrac{x^7}{5} + log_a\, (x - 2) = log_a\, (\dfrac{x^7}{5}\, (x - 2)) =$

$$log_a\, (\frac{x^7(x-2)}{5})$$

Es decir $7\, log_a\, x - log_a\, 5 + log_a\, (x - 2) = log_a\, (\dfrac{x^7(x-2)}{5})$

Ejemplo 3) Usando las propiedades de los logaritmos, simplifica la expresión:

$$\tfrac{1}{3}\, log_a(x - 1) + log_a 3 - log_a(x + 1)$$

a sólo un logaritmo de una expresión que contenga a la variable x.

Solución:

1º) $\dfrac{1}{3}\, log_a\, (x - 1) = log_a\, (x - 1)^{1/3}$ (Propiedad de la potencia)

Sustituimos: $\tfrac{1}{3}\, log_a(x - 1) + log_a 3 - log_a(x + 1) = log_a\, (x - 1)^{1/3} + log_a 3 - log_a(x + 1)$

2º) $log_a\, (x - 1)^{1/3} + log_a 3 = log_a\, ((x - 1)^{1/3}(3))$ (Propiedad del producto)

Sustituyendo: $log_a\, (x - 1)^{1/3} + log_a 3 - log_a(x + 1) = log_a\, ((x - 1)^{1/3}(3)) - log_a(x + 1)$

3º) $log_a\, ((x - 1)^{1/3}(3)) - log_a(x + 1) = log_a(\dfrac{3(x-1)^{1/3}}{x+1})$ (Propiedad del cociente)

pero como $(x - 1)^{1/3} = \sqrt[3]{x-1}$

Finalmente $\tfrac{1}{3}\, log_a(x - 1) + log_a 3 - log_a(x + 1) = log_a(\dfrac{3\sqrt[3]{x-1}}{x+1})$

Ejemplo 4) Usando las propiedades de los logaritmos, simplifica la expresión:

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{[}log_b(x^2 + 4x + 4) - log_b(x + 2)\mathbf{]}$$

a sólo un logaritmo de una expresión con la variable x.

Solución:

1º) $log_b(x^2 + 4x + 4) - log_b(x + 2) = log_b\left(\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right)$ Propiedad ________________

Al sustituir queda: $\frac{1}{2}[log_b(x^2 + 4x + 4) - log_b(x + 2)] = \frac{1}{2}\, log_b\left(\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right)$

2º) $\frac{1}{2}\, log_b\left(\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right) = log_b\left(\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right)^{1/2}$ Propiedad ____________________

Pero $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ entonces $\left(\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right)^{1/2} = \left(\frac{(x+2)^2}{x+2}\right)^{1/2} = (x + 2)^{1/2}$

$= \sqrt{x+2}$

Es decir $log_b\left(\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right)^{1/2} = log_b\sqrt{x+2}$

Finalmente $\frac{1}{2}[log_b(x^2 + 4x + 4) - log_b(x + 2)] = log_b\sqrt{x+2}$

Ejemplo 5) Usando las propiedades de los logaritmos, desarrolla la expresión

$$\textbf{log}\ [(\sqrt{5x})\left(\frac{3}{y^3}\right)].$$

Solución:

$\textbf{log}\ [(\sqrt{5x})\left(\frac{3}{y^3}\right)] = \textbf{log}\ (\sqrt{5x}) + \textbf{log}\left(\frac{3}{y^3}\right)$ Propiedad _________________

$= \textbf{log}\ (5x)^{1/2} + [\textbf{log}\ 3 - \textbf{log}\ (y^3)]$ Propiedad _________________

$= \frac{1}{2}\, \textbf{log}\ (5x) + \textbf{log}\ 3 - 3\ \textbf{log}\ y$ Propiedad _________________

$= \frac{1}{2}[\ \textbf{log}\ 5 + \textbf{log}\ x] + \textbf{log}\ 3 - 3\ \textbf{log}\ y$ Propiedad _________________

Entonces $\textbf{log}\ [(\sqrt{5x})\left(\frac{3}{y^3}\right)] = \frac{1}{2}\, \textbf{log}\ 5 + \frac{1}{2}\textbf{log}\ x + \textbf{log}\ 3 - 3\ \textbf{log}\ y$

Ejemplo 6) Usando las propiedades de los logaritmos, desarrolla la expresión

$$\textbf{log}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}\right)^3.$$

Solución:

$\textbf{log}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}\right)^3 = 3\ \textbf{log}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}\right)$ Propiedad ____________________

$= 3[\qquad\qquad - \qquad\qquad]$ Propiedad ____del cociente______

$= 3[\textbf{log}\ 3 + \textbf{log}\ x^2] - 3[\textbf{log}\ \sqrt{x}\ ]$ Propiedad del producto

$= 3\textbf{log}\ 3 + 3\textbf{log}\ x^2 - 3\textbf{log}\ x^{1/2}$

$= 3\textbf{log}\ 3 + 3(2\textbf{log}\ x) - 3(\frac{1}{2}\ \textbf{log}\ x)$ Propiedad ____________________

Finalmente $\log\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}\right)^3 = 3\log 3 + 6\log x - \frac{3}{2}\log x = 3\log 3 + \frac{9}{2}\log x$

Al final de esta sección proponemos una serie de ejercicios para que los alumnos reafirmen lo aprendido en esta parte.

Ya familiarizados con las propiedades de los logaritmos, mostramos a nuestros alumnos la forma de calcular el logaritmo en cualquier base. Para esto es necesario enseñarles la forma de hacer un **cambio de base**. Para esto proponemos la siguiente forma de hacerlo que puede dejarse de lectura al alumno.

LECTURA:
Si nos piden calcular $\log 28$, usamos la calculadora y respondemos $\log 28 = 1.447158$.
Si nos piden calcular $\ln 97$, usamos la calculadora y respondemos $\ln 97 = 4.57471$.
Pero si nos piden calcular $\log_3 67$, la mayoría de las calculadoras no tiene el logaritmo base 3, ¿cómo haremos este cálculo?
Para contestar debemos de cambiar la base del logaritmo, ya sea a base 10 (***log***) o base ***e*** (***ln***) y así poder usar la calculadora.
Vamos hacer este cambio en general, no sólo para contestar el ejercicio propuesto anteriormente.

Si tenemos, $y = \log_a x$ su forma exponencial es: $a^y = x$
Sacando logaritmo base 10 de ambos lados nos queda: $\log a^y = \log x$
Aplicando la propiedad de potencia tenemos: $y \log a = \log x$
Despejamos a y, $y = \frac{\log(x)}{\log(a)}$

Cómo $y = \log_a x$ se concluye que $\log_a x = \frac{\log(x)}{\log(a)}$

Esta es la expresión para hacer el cálculo de un logaritmo de cualquier base, ya que el logaritmo en base 10 se encuentra en tu calculadora.

Similarmente se puede haber aplicado logaritmo natural y se llegaría a la expresión

---

Vamos a calcular logaritmos en cualquier base (mayor que cero y diferente de 1) utilizando la calculadora, continuando la numeración de los ejemplos anteriores.

Ejemplo 7) Calcular $\log_4 7$.

Solución:
Utilizando logaritmo natural (***ln***) y sustituyendo en la fórmula:

$$\log_4 7 = \frac{\ln 7}{\ln 4} = 1.403677461$$

Ejemplo 8) Calcular $log_{1/3}\,125$.

Solución:

Utilizando logaritmo base 10 (log) y sustituyendo en la fórmula:

$$log_{1/3}125 = \frac{log125}{log\,(1/3)} = -\,4.\,39492$$

Ejemplo 9) Calcular $log_{13}\,44$.

Solución:

Completa los espacios aplicando cualquiera de las dos fórmulas:

$$log_{13}\,44 = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO EN ESTA SECCIÓN RECOMENDAMOS VER LOS VIDEOS EN LAS SIGUIENTE PÁGINA WEB:
http://matematicasies.com/?Logaritmos-Especiales-Decimal-y
http://matematicasies.com/?Ejercicio-Logaritmos,1705

Nota para el profesor: Para que el alumno pueda resolver problemas donde se involucran funciones logarítmicas, debe de saber resolver ecuaciones logarítmicas. Por tal razón debemos mostrarle la forma de hacerlo, los siguientes ejemplos pueden ayudar a lograr esto.

Ecuaciones con logaritmos:

Ejemplo 10) Encuentra el valor de x en la ecuación $log_2\,(x+5) = 2\,log_2\,3$

Solución:

$log_2\,(x+5) = 2\,log_2\,3$

$log_2\,(x+5) = log_2\,3^2$ Propiedad ($log_a b^n = n\,log_a b$)

$(x+5) = 3^2$ Porque los dos logaritmos tienen la misma base

$x = 9 - 5$ Despejando a x

$x = 4$

Ejemplo 11) Encuentra el valor de x en la ecuación $2\,log_3\,x = log_3\,2 + log_3\,(4 - x)$

Solución:

$2\,log_3\,x = log_3\,2 + log_3\,(4 - x)$

$log_3\,x^2 = log_3\,2 + log_3\,(4 - x)$ Propiedad ________________________

$log_3\,x^2 = log_3\,[(2)(4 - x)]$ Propiedad ________________________

$x^2 = 2\,(4 - x)$ Porque los dos logaritmos tienen la misma base

$x^2 = 8 - 2x$ Resolviendo la ecuación.

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_1 = 2$ y $x_2 = -4$ Como el logaritmo no está definido para valores negativos, la solución de la ecuación logarítmica es $x = 2$.

Ejemplo 12) Encuentra el valor de x en la ecuación $log_7 4x - log_7 (x + 1) = (½)\ log_7 4$

Solución:

$log_7 4x - log_7 (x + 1) = (½)\ log_7 4$

$log_7 \left(\frac{4x}{x+1}\right) = log_7 4^{\frac{1}{2}}$ Propiedad ________________________

$\left(\frac{4x}{x+1}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ Porque los dos logaritmos tienen la misma base

$4x = 2(x + 1)$ Despejando a x

$4x = 2x + 2$

$2x = 2$

$x =$

Ejemplo 13) Resuelve la ecuación $5^x = 4^{x+3}$

Solución:

$5^x = 4^{x+3}$ aplicando logaritmo base 10 de ambos lados,

$log\ 5^x = log\ 4^{x+3}$ propiedad de la potencia

$x\ log\ 5 = (x + 3)\ log\ 4 = x\ log\ 4 + 3\ log\ 4$ despejamos x

$x\ log\ 5 - x\ log\ 4 = 3\ log\ 4$

$x(log\ 5 - log\ 4) = 3\ log\ 4$

$x = \frac{3 log 4}{log 5 - log 4}$ con ayuda de la calculadora

$x = 18.63770232$

Comprobación: $5^x =$ ________________ y $4^{x+3} =$ _________________

Mientras más decimales le des a x, estos dos valores se aproximan cada vez más.

Ejemplo 14) Resuelve la ecuación $e^{3x+5} = 100$

Solución:

$e^{3x+5} = 100$ Ahora apliquemos logaritmo natural o base e

$ln\ (e^{3x+5}) = ln 100$ Cómo $log_a a^x = x$

$3x + 5 = ln\ 100$ Despejamos a x

$3x = ln\ 100 - 5,$ $x = \frac{ln 100 - 5}{3}$ es decir $x = -0.131609938$

Ejercicios 4.2.4

1) Usando las propiedades de los logaritmos, simplificar cada una de las siguientes expresiones.

a) $log\ \sqrt{x}\ -\ 3\ log(x) =$ b) $ln(3)\ -\ ln(p)\ +\ ln(5) - 2\ ln(p)\ =$

c) $3log(x) + log(2) - log\ (x-1) =$ d) $\frac{1}{2}\ log_2(y + 1) + log_2(5) - 3log_2(y - 1) =$

e) $\frac{1}{4}\ log_3(y^3 + 1) + \frac{3}{4}\ log_3(y^2 + 1) =$ f) $ln\ (5) + \frac{1}{2}\ ln(w)\ - 2\ ln(w - 1) =$

g) $3ln(y) + 2ln(3)\ - 2\ ln(y + 2) =$ h) $\frac{1}{3}[ln(x^2 - 6x + 9)\ - ln(x - 3)] =$

i) $3(log\ z - log\ (z - 1)) +\ \frac{1}{2}\ log(z + 1) - log\ z =$ j) $log(x + 2) - log(5) - 3log(x + 2) =$

2) Aplicar las todas las propiedades de los logaritmos que puedas y desarrollar cada una de las siguientes expresiones.

a) $log\ \ (x^3\sqrt{y}) =$ b) $log\sqrt{x^3y^5}\ =$ c) $log_b\left[\frac{x}{y^2}\right]^5 =$

d) $log_b\ (w^3z)^5\ =$ e) $ln\ [\ x^3\left[\frac{x}{b^3}\right]^2\ ] =$ f) $log_b\ (zt^2)^5\ =$

g) $log_b\left(\frac{x^3}{y}\right)^5 =$ h) $log_a\ \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x-2)(x+2)^5} =$

i) $log_a\left(x\sqrt{x^2+3}\right)=$ j) $ln\ \ x^{2\sqrt{1-x}}$

3) Encuentra el valor de cada uno de los siguientes logaritmos.

a) $log_6\ 24 =$ b) $log_7\ 4 =$ c) $log_{0.5}\ 0.4 =$ d) $log_3\ 245 =$

e) $log_5\ 945 =$ f) $log_2\ 152 =$ g) $log_4\ 396 =$ h) $log_{3/5}\ \sqrt{371}\ =$

i) $log_{1/2}\ 5372 =$ j) $log_7\ \sqrt{489}\ =$

4) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $log_6\ (4x + 4) = log_6\ 64$ b) $2\ log_4\ 4 - \frac{1}{4}\ log_4\ 16 = log_4\ x$ c) $-2\ \log_4 x = \log_4 9$

d) $log_2\ (x - 1) + 2\,log_2\ 3 = 5$ e) $log_8\ 48 - log_8\ w = log_8\ 6$

f) $log_{11}\ x = \frac{1}{2}log_{11}9 + \frac{1}{3}log_{11}27$ g) $log_3\ (x + 4)\ - 3\,log_3\ 2 = 3$

h) $log_4\ (x^2 - 9)\ -\ log_3\ (x + 3) = 3$ i) $log_2\ (x^2) - log_2\ (x - 2) = 3$

j) $log_{1/3}\ (12x^2) - log_{1/3}\ (20x - 9) = -1$ k) $4e^x = 91$ l) $5^{x + 2} = 3^{2x + 1}$

m) $8(10^{3x}) = 12$ n) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ o) $6^{3x - 5}\ = 2^{7x}$ p) $6e^{1 - x} = 25$

q) $2^{2x + 1} = 4$ r) $3^{1 - 2x} = 4^x$ s) $2^{x + 1} = 5^{1 - 2x}$ t) $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$

4.2.5 GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS. SU RELACIÓN CON LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA MISMA BASE. SU DOMINIO Y RANGO.

Aprendizajes:

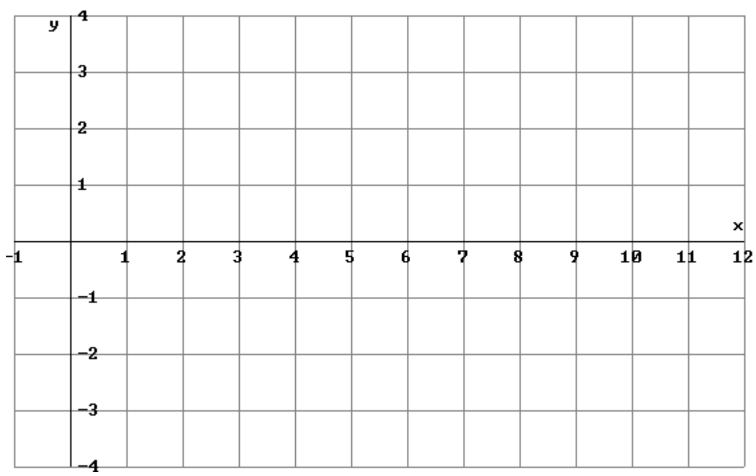
- *Construye la gráfica de algunas funciones logarítmicas, en particular de* **f(x) = log x** *y de* **f(x) = ln x.**

Empecemos por recordar las que ya hicimos en la sección 4.2.2, en esta sección trazamos la función logaritmo base 10 y base ***e*** de x, conociendo su inversa y reflejándola sobre la recta $y = x$ o sea invirtiendo los valores de x y y, también se trazaron otras más. Pero ya se pueden trazar con ayuda de la calculadora, evaluando en algunos valores de x y conociendo la forma, ya pueden delinear la gráfica de la función logaritmo en cualquier base e irlas analizando. Veamos algunas actividades donde interactúa el alumno.

Ejemplo 1) Trazar la función $f(x) = log\ x$ y analizarla.

Solución: La forma sencilla de hacerlo es utilizando la calculadora, se proponen algunos valores para x y se encuentran sus respectivas parejas y. Para esto, completa la siguiente tabla y localízalos puntos sobre el plano uniéndolos con una curva suave.

x	$y=f(x)$
– 1	
0	
0.003	
0.01	
0.5	
1	
2	
3	



La gráfica no cruza el eje Y, conforme los valores de x se acercan a cero se pega al eje ______ por lo que tiene una asíntota ____________ de ecuación ________

El rango y el dominio son:

D = ___________________, R = ____________________

Cruza al eje X en el punto ____, por lo tanto esta función tiene un cero real.

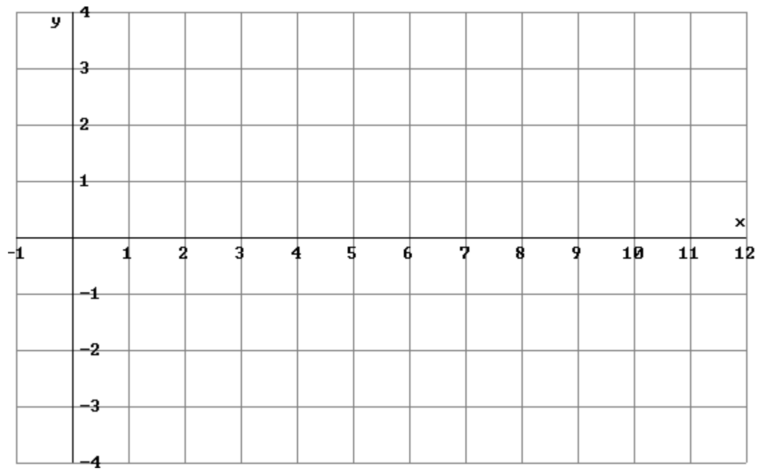
Conforme la x se extiende hacia los positivos la función ____________ y es cóncava hacia __________.

Como te puedes dar cuenta tiene la misma forma de las logarítmicas que ya trazaste con la base mayor que 1 (a > 1)

Ejemplo 2) Trazar la gráfica de $g(x) = ln\ x$ y analízala.

Solución: Usando la calculadora completa la siguiente tabla y marca los puntos en el plano dado.

x	$y=f(x)$
– 1	
0	
0.003	
0.01	
0.5	
1	
2	
3	

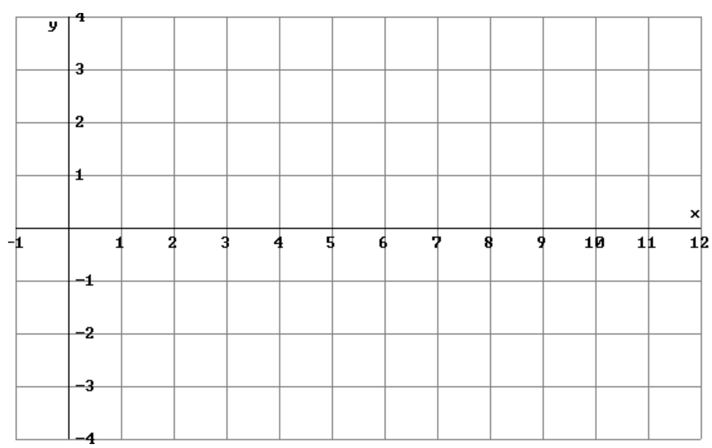


Su dominio y rango son: D = _____________, R = _____________
No cruza al eje Y así que tiene una asíntota __________, cuya ecuación es: _______________
Cruza al eje X en el punto ___________, por lo que tiene un ______________
Ahora la curva es cóncava hacia _____________.
También es una función uno a uno (biunívoca), ya que si trazamos rectas horizontales, sólo cruzan a la curva en un solo punto.

Ejemplo 3) Trazar la función $f(x) = log_3\ x$ y analizarla

Solución: Se puede trazar de dos formas, una es escribiéndola en su forma exponencial, y la otra es utilizando la fórmula para encontrar el $log_a n$. En ambos casos se le dan valores a y para encontrar los de x, usaremos la primer forma.
La función $y = log_3\ x$ en su forma exponencial es $x = 3^y$. En la siguiente tabla se proponen algunos valores para y, completarla con ayuda de la calculadora después localiza los puntos sobre el plano uniéndolos con una curva suave.

$x= 3^y$	$y =f(x)$
	–2
	–1
	0
	0.5
	1
	2
	3



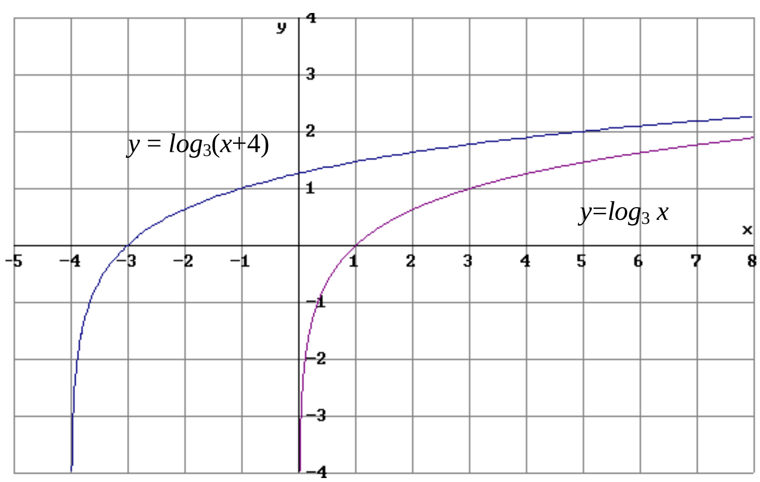
No cruza el eje Y, conforme los valores de x se acercan a cero se pega al eje ______ por lo que tiene una asíntota ____________ de ecuación ________________
El rango y el dominio son: D = _____________, R = _____________

Cruza al eje X en el punto _______, por lo tanto esta función tiene un cero real.
Conforme la x se extiende hacia los positivos la función ____________ y es cóncava hacia __________.
Como te puedes dar cuenta tiene la misma forma de las logarítmicas que ya trazaste con la base mayor que 1 (a > 1)

Ejemplo 4) Traza la gráfica de la función $h(x) = log_3\ (x + 4)$ y encuentra: su dominio, rango, ecuación de la asíntota vertical y las intersecciones con los ejes.

Solución:
El dominio de la función lo obtenemos resolviendo la desigualdad $x + 4 > 0$, ya que solo podemos sacar logaritmos de números positivos.
$x + 4 > 0$, $x > -4$, así que su dominio es: __________________

La ecuación de su asíntota vertical es ___________, márcala sobre la gráfica.
Como ya conocemos la gráfica de $y = log_3\ x$, la gráfica de h la podemos obtener desplazando hacia la izquierda 4 unidades esta gráfica (si a x le sumamos o le restamos una cantidad la gráfica se desplaza sobre el eje X a la izquierda o a la derecha respectivamente). Puedes darle algunos valores a y para encontrar x, pasando la expresión a su forma exponencial $x + 4 = 3^y$, es decir, $x = 3^y - 4$, para verificarlo compara tu trazo con la siguiente gráfica:



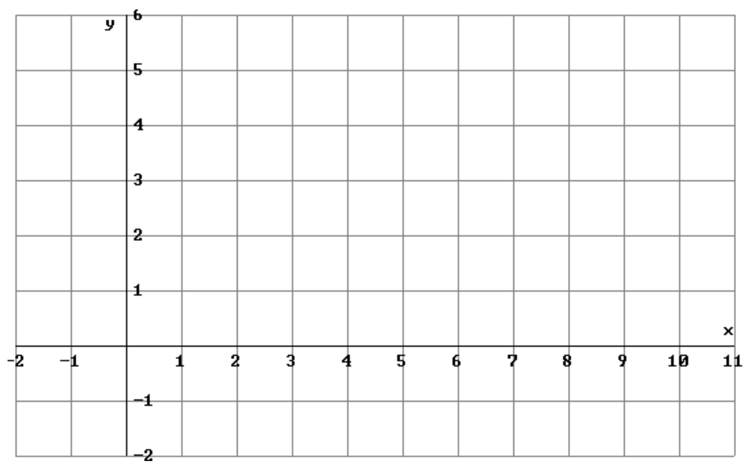
Su rango es: ___________________

Cruza al eje Y en el punto (resuelve la ecuación que resulta cuando $x = 0$): ______

Cruza al eje X en el punto (resuelve la ecuación que resulta cuando $y = 0$): ______

Ejemplo 5) Traza la gráfica de $y = 2 - \log x$ y analízala.

Solución:
Como el término $\log x$ es negativo, esto hace que se refleje sobre el eje X. El 2 que se le suma a la función hace que la gráfica de $\log x$ suba 2 unidades, recordemos que la inversa de la función logaritmo en base 10 es 10^x, esta pasaba por $(-\frac{1}{2}, 10^{-1/2})$, (0, 1), $(\frac{1}{2}, 10^{1/2})$ y (1,10). Al invertir los valores de cada punto se obtiene los puntos: ______, ______, _______, ______ que serán los puntos por donde pasa la función $\log x$ (logaritmo base 10).
Primero traza la gráfica de la función $\log x$ (logaritmo base 10) y luego reflejando sobre el eje X y subiendo dos unidades debes de obtener la gráfica que se pide.



Puedes comprobar si es la correcta evaluando directamente en la calculadora.
La curva es cóncava hacia ________________
El dominio y su rango son: D= __________________, R = _______________

La ecuación de la asíntota vertical es: ___________

No cruza al eje Y, y al eje X lo cruza en el punto que resulta al resolver la ecuación:

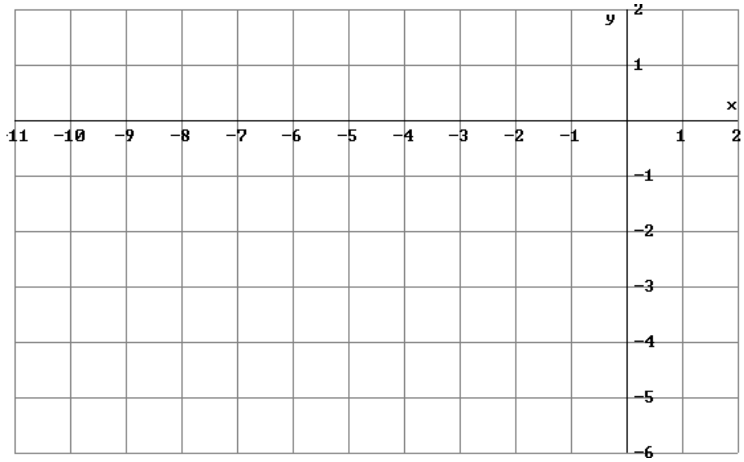
$$0 = 2 - \log x$$
$$2 = \log x$$
$$x = 10^2 = 100$$

Este punto es __________, son las coordenadas del un cero real de la función y.

Ejemplo 6) Traza la gráfica de $F(x) = \ln(-x) - 3$

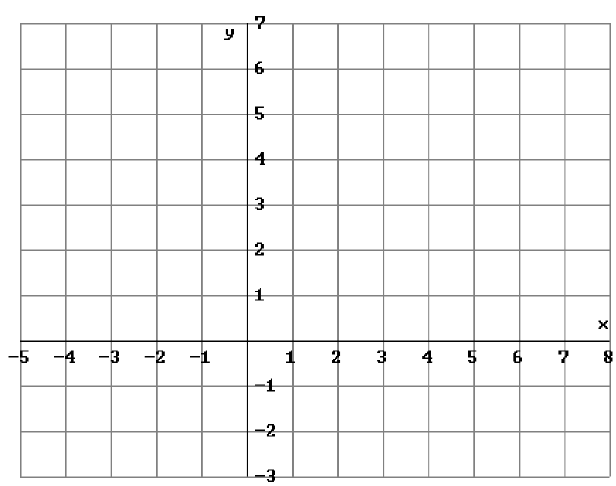
Solución:
Como no se puede evaluar el logaritmo de números negativos, x debe tomar valores negativos para que el signo negativo antes de x haga que el número al que se le saca logaritmo sea positivo, es decir, se refleja la función sobre el eje Y. La inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial $\boldsymbol{e}^x$ y esta pasa por los puntos $(-1, e^{-1})$, (0 , 1), (1 , e) (2 , e^2), al invertirlos se tendrán los puntos por donde pasa la función logaritmo natural que son: ________, _______, ________, ________. Como ya conocemos la forma de estas funciones, con estos puntos la podemos delinear.

Para trazar su grafica, se refleja la gráfica de e^x sobre el eje Y y se baja 3 unidades, trázala sobre el siguiente plano. Puedes comprobar tu trazo escribiendo la expresión en forma exponencial ___________ y dándole algunos valores a y para conocer x o evaluando directamente en tu calculadora.



La grafica de la función es _______________ y cóncava hacia ____________
La ecuación de su asíntota vertical es ______________
Su dominio y rango son: D:__________________, R:________________
Cruza al eje Y _______________ y al eje X lo cruza en el punto en donde y o F vale cero, así que las coordenadas de este punto son: ____________

Ejemplo 7) Traza la gráfica de la función $f(x) = log_5(5 – x) + 4$
Solución:
La inversa de la función logaritmo en base 5 pasa por (–1, 1/5), (0, 1), (0.5, $5^{1/2}$) (1, 5), así que la función logaritmo base 5 pasa por los puntos: _________, ________, ________, _________, conociendo su comportamiento con estos puntos se puede delinear la gráfica de la función. Esta se refleja sobre el eje Y debido a que x tiene un signo negativo; se recorre 5 unidades hacia la derecha ya que $5 – x > 0$, es decir, $5 > x$ (x menor que 5) y sube 4 unidades, trázala sobre el siguiente plano y comprueba evaluando en algunos valores de x, utilizando el cambio de base.



La ecuación de su asíntota vertical es: ____________
El dominio y el rango de la función son: D: _____________, R:______________
La gráfica es ________________ y cóncava hacia ____________
Cruza al eje Y en el punto ____________ y al eje X lo cruza en el punto _________

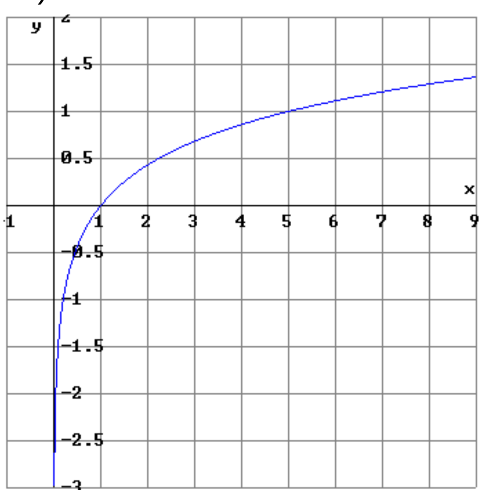
Ejercicio 4.2.5

I) Traza la gráfica de cada función y encuentra su dominio y rango, así como los puntos donde cruzan a los ejes.

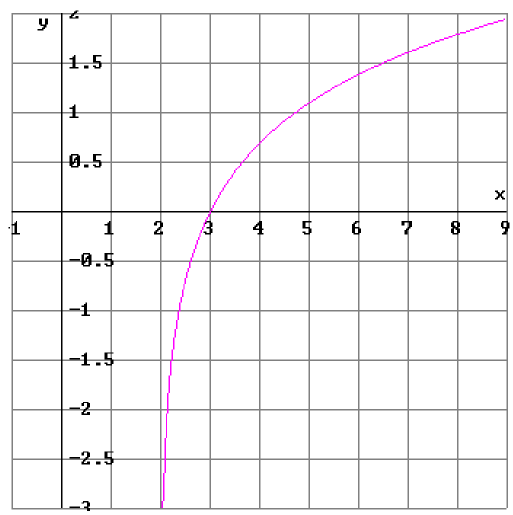
1) $f(x) = log_2(-x)$	2) $g(x) = -\, log_2\,(x + 6)$	3) $h(x) = log\,(\,3 - x)$
4) $k(x) = ln\,(x^2 + 1)$	5) $m(x) = \; log_{1/3}\,(2 - x)$	6) $n(x) = log_{\,4}\,(x - 3) - 2$
7) $p(x) = -\,2\;log_{1/2}\,(5 + x) + 3$	8) $q(x) =\!-\, ln\,(x - 4) + 2$	9) $F(x) = log\,(x - 5) - 4$

II) En cada una de las gráficas determina la función que representa.

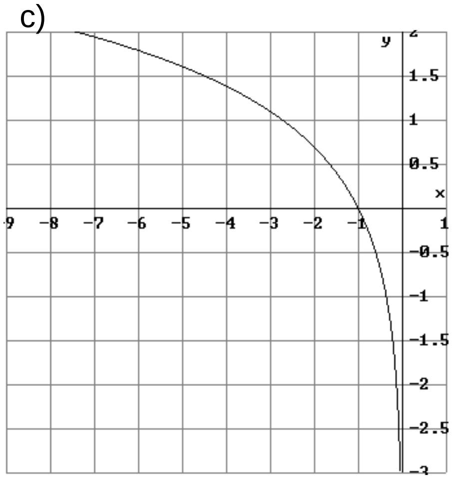
a)



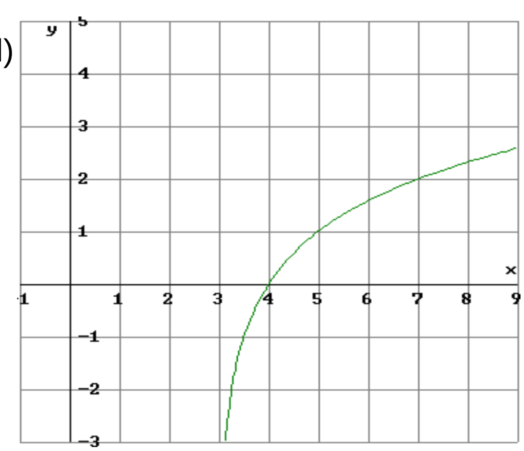
b)



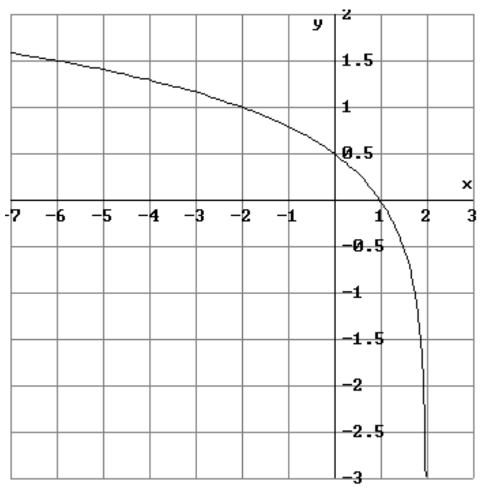
c)



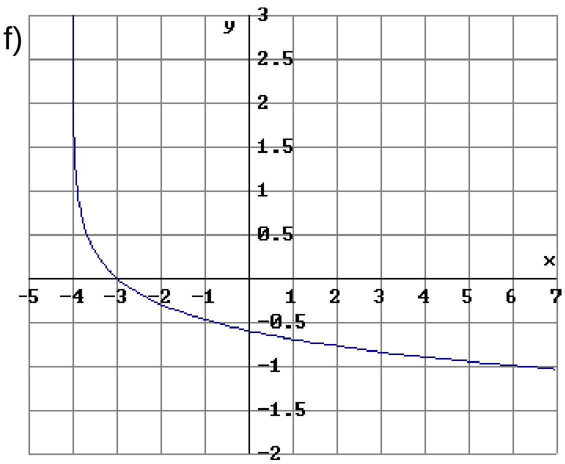
d)



e)



f)



Para que el alumno repase esta unidad puede consultar las diapositivas que se encuentran en la siguiente página electrónica, puede bajar el archivo:

PARA REPASAR LO APRENDIDO EN LAS SECCIONES ANTERIORES SE PUEDE VER UNA PRESENTACIÓN EN LA SIGUIENTE PÁGINA WEB:
http://www.slideboom.com/presentations/64625/Funciones-exponenciales-y-logar%C3%ADtmicas

4.2.6 PROBLEMAS DIVERSOS DE APLICACIÓN

Aprendizajes:

- *Reconoce a las funciones exponenciales y logarítmicas como una herramienta útil para representar y analizar diversas situaciones.*

Retomando el problema de la actividad 1 de la sección 4.2.1, con lo ya aprendido, veamos como se resuelve.

Actividad 1) Un esqueleto contiene la centésima parte de su cantidad original de carbono 14 (^{14}C). Calcula la antigüedad del esqueleto, con precisión de1000 años. (La vida media del ^{14}C es de aproximadamente 5750)

Solución:
Vimos que la expresión que relaciona la cantidad de carbono 14 y el tiempo es de la forma _____________ , y cuando t = _____________, entonces A = _____________

Con lo anterior podemos calcular el valor de k, despejándola de la ecuación _______

Dividiendo entre A_0 , obtenemos: _______________
Aplicando logaritmo natural de ambos lados, ln (1/2) = ______

Así que k = ——— = ——— = – 0. 000120547

Este valor de k es mucho más preciso que el que obtuvimos al inicio del estudio de los logaritmos por ensayo y error.
Para calcular la antigüedad del esqueleto sustituimos los valores encontrados de A y de k, y se despeja a t de la expresión _____________

Haciendo lo mismo que cuando despejamos a k, se llega a que:

t = ——— = ——— = ___________

Así que el esqueleto tiene una antigüedad de _________ años, pero el problema nos pide con una precisión de 1000 años, este valor esta más cercano a ____________

Actividad 2) La concentración del Ion de hidrógeno de una sustancia se relaciona con su acidez y basicidad. Debido a que las concentraciones del Ion de hidrógeno varían en un rango muy amplio, se usan logaritmos para crear una escala de pH comprimida, que se define como sigue: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, donde $[\mathrm{H}^+]$ es la concentración del ion de hidrógeno, en moles por litro. Calcula el pH de cada una de las siguientes sustancias e indica si es ácido o base. Calcula las respuestas con dos cifras decimales.
a) Agua de mar, 4.63×10^{-9} b) Vinagre, 9.33×10^{-4}
c) Leche, 2.83×10^{-2} d) La paja del cultivo, 3.78×10^{-6}
e) Si el agua de lluvia normal tiene un pH de 5.7, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno en moles por litro?

Solución:
En los primeros incisos solamente sustituimos la concentración de iones de hidrógeno que se nos da y las sustancias con un pH < 7 son ácidas, pH > 7 son bases.
a) $\mathrm{pH} = -\log[4.63 \times 10^{-9}]$ = ________, por lo tanto el agua de mar es ____________.
b) Para el vinagre, $\mathrm{pH} = -\log$ [_________] = _______, el vinagre es _____________
c) La leche tiene un pH = ________________= _________, por lo que es ________
d) La paja del cultivo tiene un pH = ______________ = _______, es ____________
e) Si el agua de lluvia normal tiene $\mathrm{pH} = 5.7 = -\log[\mathrm{H}^+]$, tenemos que despejar a la concentración, pasamos a la forma exponencial y tenemos

________________, por lo que H^+ = ______________
Así que la concentración de iones de hidrógeno es de 2×10^{-6} moles por litro.

Ejemplo 3) Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura T de un objeto en el tiempo t satisface la ecuación $\ln|T - T_0| = -kt + C$, donde T_0 es la temperatura del medio circundante y k y C son constantes. Si se tiene una taza de café con temperatura de 82 °C y se coloca en una habitación a 22 °C en el tiempo $t = 0$.

a) Determina el valor de C hasta el diezmilésimo más cercano.
b) Después de 2 minutos la temperatura del café ha descendido hasta 66 °C. Encuentra el valor de k hasta el diezmilésimo más cercano.
c) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la temperatura del café disminuya hasta 38°C?

Solución:

a) Sustituimos los valores de T = _______, t = ___ y T_0 = ______, en la ecuación dada $ln\,|T - T_0| = -kt + C$ y despejando a C se tiene que C = _______ = _______

b) Ahora en la misma ecuación sustituimos los valores t = ______, T = ______, T_0 sigue teniendo el mismo valor y C = ___________, y se obtiene

$ln\ 44$ = ____________ despejando a k se tiene:

$k = \frac{\qquad}{\qquad}$ = ____________

c) Nuevamente sustituimos los valores de T = _______, T_0 = _______,

C = ________ y k = ________ en la ecuación dada _________________

Despejando a t: $-0.1551\,t$ = _________________

$t = \frac{\qquad}{\qquad}$ = _________

Debe transcurrir _____ minutos para que la temperatura del café llegue hasta 38 °C.

Ejercicio 4.2.6

Resolver los siguientes problemas.

1) La intensidad de un sonido se indica a menudo en decibeles (dB). La intensidad de un sonido L en dB se define en términos de su intensidad I mediante la ecuación, $L = 10\,log\,\frac{I}{I_0}$, donde I_0 representa la intensidad mínima audible promedio para la persona (el "umbral de audición"), 1.0×10^{-12} W/m^2.
a) Un concierto de rock común puede tener una intensidad de 1 W/m^2. ¿Cuál es la intensidad en decibeles de un concierto de este tipo?
b) Un murmullo tiene una intensidad de 20 dB. ¿Cuál es su intensidad?

2) Una célula de leucemia que se inyecta en un ratón saludable, se dividirá en dos células en aproximadamente ½ día. Al finalizar el día estas dos células se dividirán en cuatro. La duplicación continuará hasta que se hayan formado mil millones de células; después el animal muere con el cuerpo invadido de células leucémicas.
a) Escribe una expresión que dé el número N de células leucémicas después de t días.
b) ¿Cuándo morirá el ratón? Aproxima al día más cercano.

3) El número de watts proporcionados por una batería de d días de vida de un satélite, esta dado por la fórmula, $w = 50\, e^{-0.004d}$

a) ¿Qué tiempo pasará para que la potencia disponible disminuya a 30 watts?

b) ¿Qué tiempo pasará para que la potencia disponible disminuya a sólo 5 watts?

4) Si usted invierte \$ 500.00 al 10 % de interés anual compuesto mensualmente, a)¿Cuánto tiempo tardará en convertirse \$ 875.00? b) ¿Cuánto tardará si la composición es continua?

5) La demanda para un nuevo producto crece rápidamente al principio y luego se nivela. El porcentaje P de compras reales de este producto después de que ha estado en el mercado t meses es, $P = 90 - 80\,(\frac{3}{4})^t$.

a) ¿Cuál es el porcentaje de compras del producto después de 5 meses?

b) ¿Cuál es el porcentaje de compras del producto después de 10 meses?

c) ¿Cuál es el porcentaje máximo de compras del producto?

d) ¿Cuántos meses deben pasar antes de tener 40 % de compras?

e) ¿Cuántos meses deben pasar antes de tener 70 % de compras?

6) Si se agrega 10 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad $q(t)$ insoluta luego de t minutos está dada por $q(t) = 10(\frac{4}{5})^t$. a) Trazar una grafica que muestre el valor de $q(t)$ en el intervalo de desde $t = 0$, hasta $t = 10$. b) ¿Cuanta sal queda después de 3 minutos? c) ¿Cuanto tardará en quedar ½ gramo?

7) Una pizza cocida a 230°C se saca del horno a las 5:00 PM y se lleva a una habitación con temperatura constante de 21°C. Después de 5 minutos la pizza está a 148°C. ¿A qué hora estará la pizza a 57°C? (según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura T de un objeto en el tiempo t satisface la ecuación, $ln\,|T - T_0| = -kt + C$, donde T_0 es la temperatura del medio circundante y k y C son constantes)

8) La cara de una plancha doméstica se enfría de 125° a 100° en 30 minutos en un cuarto que permanece a una temperatura constante de 75°. Por cálculo integral, la temperatura $f(x)$ de la cara de la plancha, después de t horas de enfriamiento, está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$. a) Supón que t = 0, corresponde a la 1:00 pm, calcula la temperatura a las 2:00, 3:30 y 4:00 p.m.

9) Un circuito eléctrico sencillo que consta de un resistor y un inductor. La corriente I en el tiempo t está dada por $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L es la inductancia. Resolver esta ecuación para t.

10) Puede demostrarse que sí en cierto año se consume una cantidad de A_0 de petróleo, y si existe una tasa de crecimiento anual de consumo r, entonces la cantidad A de petróleo consumido en los siguientes t años está dada por.

$$A = \frac{A_9}{r}(e^{r \cdot t} - 1)$$

a) Despeja t.
b) En 1990 se estimó que las reservas de petróleo disponibles en el mundo eran de 983.4 miles de millones de barriles de petróleo y que en ese año se consumieron 21.3 miles de millones. Si existe una tasa anual de crecimiento del consumo de petróleo de 2.5 %, estima el año que pronostica la fórmula anterior que se terminará la reserva de 1990.

11) Dada la masa (m) medida en kg y la altura (h) medida en cm de una persona, los investigadores médicos utilizan la fórmula empírica

$$\log A = -2.144 + 0.425 \log m + 0.725 \log h$$

Para calcular el área (A) de la superficie de su cuerpo.

a) Calcula el área A de la superficie del cuerpo de una persona cuyo peso es de 75 kg y mide 180 cm.
b) Calcula el área de la superficie de tu cuerpo.

12) Utilizando la fórmula de la escala Richter $R = \log(\frac{I}{I_0})$, determine la magnitud de un sismo cuya intensidad es:
a) 100 veces I_0.
b) 10 000 veces I_0.
c) 100 000 veces I_0.
d) Los terremotos de mayor magnitud registrados han estado entre 7 y 9 en la escala de Richter. Calcule las intensidades correspondientes en términos de I_0.

13) La intensidad del sonido que percibe el oído humano tiene diferentes niveles. Una fórmula para hallar el nivel de intensidad α, en decibeles, que corresponde a intensidad de sonido I es: $\alpha = 10 \log(\frac{I}{I_0})$ donde I_0 es un valor especial de I que corresponde al sonido más débil que puede ser detectado por el oído, bajo ciertas condiciones.
Encuentre α en los casos siguientes:
a) I es 10 veces más grande que I_0 .
b) I es 1 000 veces más grande que I_0.
c) I es 10 000 veces más grande que I_0. (Este es el nivel de intensidad promedio de la voz).
d) Un nivel de intensidad del sonido de 141 decibeles produce dolor en un oído humano común. ¿Cuántas veces, aproximadamente, debe ser I más grande para que α alcance este nivel?

14) Los químicos usan un número denotado pH para describir cuantitativamente la acidez o la basicidad de ciertas soluciones. Por definición, pH = – log[H^+] donde [H^+] es la concentración de iones hidrógenos en moles por litros. Aproxime el pH de las siguientes soluciones dado sus correspondientes [H^+]:
a) Vinagre: [H^+] = 6.3×10^{-3}

b) Zanahoria: $[H^+] = 1.0 \times 10^{-5}$
c) Agua de mar: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-9}$

15) Aproxime la concentración de iones hidrógenos $[H^+]$ en cada una de las siguientes sustancias:
a) Manzana: pH=3.0
b) Cerveza: pH=4.2
c) Leche: pH=6.6

16) Las estrellas se clasifican en categorías de brillo llamadas magnitudes. A las estrellas más débiles (con flujo luminoso L_0) se les asigna magnitud 6. A las estrellas más brillantes se le asigna magnitud conforme a la fórmula: $m = 6 - 2.5\ log(\frac{L}{L_0})$, en donde L es el flujo luminoso de la estrella.

a) Determine m si $L = 10^{0.4}\, L_0$.
b) Resuelva la fórmula para evaluar L en términos de m y de L_0.

17) Si n es el número promedio de terremotos (en todo el mundo) en un año, cuya magnitud está entre R y R+1 (en la escala Richter), entonces $log\ n = 7.7 - 0.9R$.
a) Resuelva para evaluar n en términos de R.
b) Calcule n si $R = 4$; $R = 5$ y $R = 6$.

18) La energía E (en ergs) liberada durante un terremoto de magnitud R está dada por la fórmula $log\ E = 1.4 + 1.5\ R$.
a) Despeje R en términos de E.
b) Calcule la energía liberada durante el famoso terremoto de Alaska de 1964, que registró 8.4 en la escala Richter.

19) El número N de bacterias en un cierto cultivo en el tiempo t, esta dado por $N(t) = 10^4 3^t$. Use logaritmo de base 3 para determinar t en función de N.

PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO EN TODA ESTA UNIDAD SE PUEDE VER EL VIDEO EN LA SIGUIENTE PÁGINA WEB:
http://www.youtube.com/watch?v=NDYtaTWa8Mk&feature=channel

AUTOEVALUACIÓN

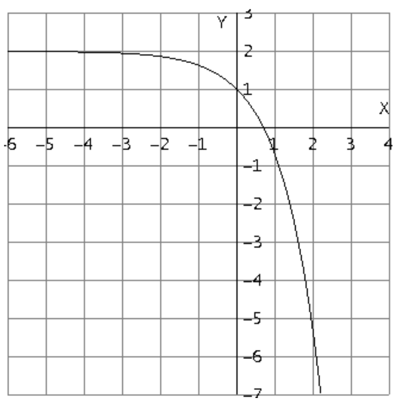
Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para probar esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas un breve resumen de la unidad que puedes consultar. Esperamos que esta autoevaluación la termines en 2 horas como máximo.

Traza las gráficas de las siguientes funciones, di cuál es el dominio, el rango, las asíntotas y sus ceros.

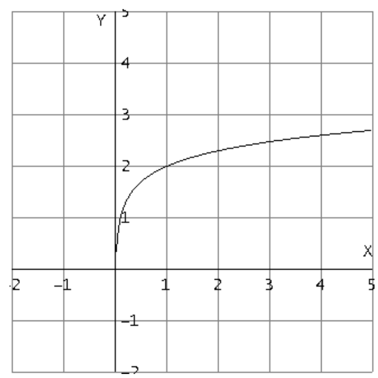
1) $F(x) = (\mathbf{1/3})^x - 3$ **2)** $M(x) = -3\,\mathbf{ln}\,(x) + 1$

Encuentra la regla de correspondencia para cada gráfica, da su dominio, rango, asíntotas y sus ceros.

3)



4)



Puedes elegir entre: $J(x) = \mathbf{ln}\,(x) + 2$ $K(x) = \mathbf{log}\,(x) + 2$ $L(x) = -10^x + 2$ $M(x) = -\mathbf{log}\,(x) + 2$ $N(x) = -\boldsymbol{e}^x + 2$ $P(x) = -\mathbf{ln}\,(x) + 2$

Determina la solución de las siguientes ecuaciones:

5) $2^{x+1} = 5^{1-2x}$ **6)** $2\,log\,x = log\,2 + log\,(3x-4)$

7) Los psicólogos usan a veces la función $L(t) = A(1 - e^{-kt})$
para medir la cantidad L aprendida en el tiempo t. El número A representa la cantidad por aprender y el número k mide la razón de aprendizaje. Suponga que un estudiante tiene una cantidad A de 200 palabras de vocabulario por aprender. Un psicólogo determina que el estudiante aprendió 20 palabras después de 5 minutos.

a) Determine la razón de aprendizaje k.
b) ¿Cuántas palabras aproximadamente habrá aprendido el estudiante después de 10 minutos?
c) ¿Qué tiempo le tomará al estudiante aprender 180 palabras?

ESCALA: Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3 y 4 pero no has logrado todos los objetivos, SÓLO LOS BÁSICOS. Si resuelves también la 6 y 7 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 8, ¡FELICIDADES!, lograste todos los objetivos de la unidad y has terminado con éxito tu curso de matemáticas IV. Si resuelves menos de 4 preguntas, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad y hacer todos los ejercicios propuestos.

DOMINÓ DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Proponemos este juego para reafirmar los conceptos vistos en esta unidad.

- Las reglas del juego son las mismas que las de un dominó normal, se puede trabajar con equipos de hasta 4 alumnos.
- Ya que el alumno tenga sus fichas correspondientes, es recomendable que en una hoja escriba las principales características de cada función o gráfica contenida en sus fichas, esto es con el objetivo de que el juego sea dinámico.
- Las características que se deben tomar en cuenta son: expresión algebraica o ecuación, gráfica, dominio, rango, intersecciones con los ejes, asíntotas y algunos puntos sencillos de identificar.
- El profesor decide los beneficios para los ganadores de cada equipo.
- Para utilizar este juego se fotocopian las imágenes del dominó en papel de preferencia grueso, se pueden pegar en fomi y recortarse para tener el juego de fichas que se le proporciona a cada equipo.
- Se recomienda que el profesor apoye en lo que sea necesario durante el juego.