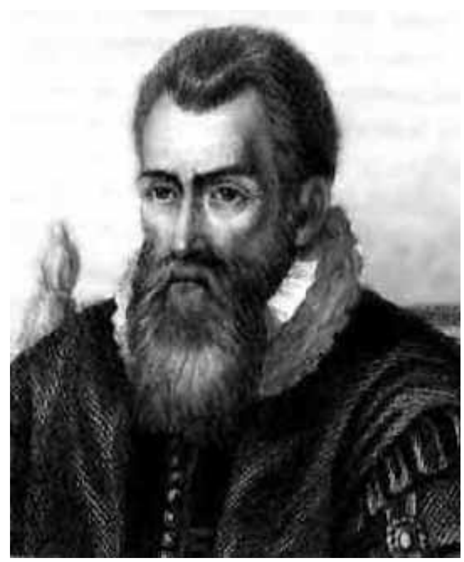
UNIDAD 4.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Propósitos:
Continuar el estudio de las funciones trascendentes con las funciones exponenciales y logarítmicas, cuya forma peculiar de variación, permite modelar diversas situaciones de crecimiento y decaimiento. Introducir la noción de función inversa. Reforzar la identificación de dominio y rango de una función, así como la relación entre los parámetros y su gráfica.

JOHN NAPIER

Nació en 1550 en Marchiston Castle, Edimburgo (Escocia).



Para él, estudiar matemáticas era un simple pasatiempo, y sus libros y publicaciones sobre el tema van siempre precedidos de una disculpa por lo poco profundo de sus argumentos. Pues decía que nunca tenía tiempo suficiente para dedicarse de lleno a esta disciplina.

Pero eso sólo lo pensaba él, pues pasó a la historia como un célebre matemático por la invención de los logaritmos y de varias contribuciones a distintas ramas de las matemáticas. Invento lo que se conoce como *regletas de Napier* que era un instrumento para multiplicar que luego se popularizó y que varios hombres del renacimiento usaron en toda Europa, como una herramienta de cálculo muy útil. También encontró expresiones exponenciales para funciones trigonométricas e introdujo la notación decimal para las fracciones. Sus tablas de logaritmos fueron publicadas en la obra titulada *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* en el año de 1614. Según nuestra notación de hoy, los logaritmos de Napier serían los logaritmos de base 1/e. Napier no pensaba en los logaritmos como entes algebraicos, ya que en su tiempo el álgebra no estaba suficientemente desarrollada. El mayor inconveniente de los logaritmos de Napier fue que el log1 no era cero. El cambio a los logaritmos con la propiedad log1=0 surgió de las discusiones entre Briggs y Napier. Hoy día Napier es recordado por haber hecho contribuciones al desarrollo de la ciencia que resultaron imprescindibles para la formulación de las teorías de Kepler y Newton.

4. PRESENTACIÓN

Los logaritmos se inventaron alrededor de 1590 por **John Napier** (1550-1617) y **Jobst Bürgi** (1552-1632) de manera independiente, aunque el trabajo de Napier tuvo mayor influencia. Su enfoque de los logaritmos era muy diferente al nuestro; se basaba en la relación entre secuencias aritméticas y geométricas y no como actualmente lo vemos, como función inversa (recíproca) de las funciones exponenciales. Las tablas de Napier, publicadas en 1614, contenían los llamados *logaritmos naturales* y eran algo difíciles de usar. Se Desarrollaron las tablas de logaritmos comunes publicadas en 1617, siendo estas una poderosa herramienta de cálculo hasta el advenimiento de las calculadoras manuales de bajo precio alrededor de 1972, lo que ha disminuido su importancia como instrumento de cálculo, pero no su importancia teórica. Un efecto colateral de la invención de los logaritmos fue la popularización de la notación del sistema decimal para los números reales.

Dentro de los aprendizajes en esta unidad se debe poner mucha atención y enfatizar en algunos conceptos clave como: función, dominio, rango, gráfica, función inversa, ceros, potencia y asíntota. Los cuales se van reforzando ya que se han abordado en los diferentes tipos de funciones estudiadas en las unidades anteriores.

4.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones que se forman haciendo uso de las cuatro operaciones fundamentales y la extracción de raíces se les llama **funciones algebraicas**. Si una función no es algebraica se dice que es **trascendente**.

En esta unidad se introducirán dos tipos de funciones trascendentes: **las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas**. Estas funciones aparecen cuando se estudian ecuaciones tales como: $4^x = 10$.

Sin embargo hay otras funciones trascendentes básicas que aparecen en trigonometría.

Las funciones logarítmicas y exponenciales tienen muchas aplicaciones, tales como: el crecimiento de bacterias, la intensidad del sonido, el interés compuesto, la presión atmosférica, el crecimiento de la población, el tiempo de vida media de los materiales radiactivos, la efectividad de la publicidad, la ley de enfriamiento de Newton y la escala de Richter de los terremotos de las cuales veremos algunas.

4.1.1 SITUACIONES QUE INVOLUCRAN CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL.

Aprendizajes:

- *Explora en una situación o fenómeno que presente crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza la forma en que varían los valores de la función respectiva.*
- *Reconoce que en este tipo de situaciones, para valores de **x** igualmente espaciados, son constantes las razones de los valores correspondientes de **f(x)**,*
- *Identifica que en la regla de correspondencia de las funciones que modelan este tipo de situaciones, la variable ocupa el lugar del exponente.*

- *Obtiene, mediante el análisis de las condiciones de una situación o problema o bien del estudio del comportamiento de algunos valores que obtenga, la expresión algebraica* $\boldsymbol{f(x) = ca^x}$ *que le corresponda.*

Existen varias situaciones en la vida real que son modeladas por medio de una función exponencial. Algunas de estas situaciones son: el crecimiento de bacterias en un cultivo, el crecimiento de la población de una ciudad, el tiempo que toma un objeto para llegar a cierta temperatura, etc.
Veamos algunos de estos por medio de las siguientes actividades, que pueden trabajarse en clase o de tarea para los alumnos.

Actividad 1) Una tarjeta de crédito común tiene un interés anual de 48% compuesto mensualmente. Si se realiza una compra de $ 400.00 y no se hace ningún pago durante un año, ¿cuál será la deuda al final del año?, ¿cuál será la deuda al cabo de t meses?

Interés

Interés compuesto es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente los intereses producidos. Así al final de cada periodo el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital durante dicho periodo.

Solución:
El interés anual es de _________ entonces el interés mensual será de __________
La cantidad gastada es de ___________, así que al terminar el primer mes la deuda(D) ya no es de $ 400.00 sino de: $D(1) = 400 + (\ \ )400 =$ ______________ = ________
Sacando como factor común a 400, nos queda que $D(1)= 400(1 + 0.04) = 400$ (____)
Al segundo mes la deuda asciende a $D(2) = D(1) + 0.04\, D(1) =$
Factorizando $D(1)$ $\qquad D(1)\ (\quad + \quad) =$
$400(\quad)(\quad) =$
$400\ (\quad)^2 =$

Y así sucesivamente la deuda crece hasta llegar a los 12 meses:

$D(3) = D(2)(\quad) = 400\ (\quad)^{(\ )} =$ $ 449.95 $\qquad D(8) =$ __________________________
$D(4) =$ ______________________________ $\qquad D(9) =$ __________________________
$D(5) =$ ______________________________ $\qquad D(10) =$ __________________________
$D(6) =$ ______________________________ $\qquad D(11) =$ __________________________
$D(7) =$ ______________________________ $\qquad D(12) =$ __________________________

La deuda al final del año será de ___________________

Ahora lo que nos piden es la deuda como función de los meses transcurridos, y como te habrás dado cuenta en el primer mes se multiplica 400 por 1.04, en el segundo mes multiplicamos 400 por 1.04 elevado al cuadrado, en el tercer mes obtuvimos la deuda al multiplicar 400 por 1.04 elevado al cubo y así sucesivamente por lo que la deuda en función de los meses transcurridos es:
$\boldsymbol{D(t)} =$ _______________

Si divides el valor de la deuda de cada mes entre la deuda del mes anterior que observas ____

Como puedes darte cuenta la variable independiente t ahora se encuentra como __________________

Actividad 2) Una sustancia radiactiva se desintegra de tal modo que al final de cada mes sólo hay la tercera parte de lo que había al principio. Si había 75 gramos de la sustancia al principio del año, ¿cuánto queda a mitad del año? ¿Cuánto queda al final de n meses?

Solución:

Al final de cada mes sólo hay la tercera parte de lo que había al inicio, así que completa la tabla:

Final de mes, n	0	Enero 1	Febrero 2	Marzo 3	Abril 4	Mayo 5	Junio 6
Cantidad de sustancia, C	75 gramos	25 gramos					

Para saber cuanta sustancia queda al final de enero simplemente se le saco tercera a 75, así que $C(1)$ = _______________, o sea 75 multiplicado por 1/3.

Al finalizar febrero la cantidad de sustancia que nos queda es $C(2)$ = _____________,

Al finalizar marzo tenemos $C(3) = C(2)(1/3) = C(1)(1/3)(1/3) = C(0)(1/3)(1/3)(1/3) = 75(1/3)^3$ = ____________

Así que la sustancia que queda al finalizar:

Abril: $C(4)$ = ___________________________________

Mayo: $C(5)$ = ___________________________________

Junio: $C(6)$ = ___________________________________

La cantidad de sustancia que queda a mitad del año es de: _________________

Y al final de n meses la sustancia que queda será: $\boldsymbol{C(n)}$ = ________________

Si divides la cantidad de sustancia al finalizar el mes entre la cantidad de sustancia al finalizar el mes anterior, obtienes el valor de _________ y la cantidad de sustancia va __________________ conforme transcurren los meses

La variable independiente _______ nuevamente se encuentra como ___________.

Actividad 3) Las amebas o amibas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Calcular el número de amebas que habrá según pasan las horas.

Tiempo (hrs)	1	2	3	4	5	6	7	...
Num. de amebas	2	4	8					...

El número total al cabo de x horas será: y = ________
Si al comienzo del proceso había k amebas, el número total sería: $y = k$ (____)

Actividad 4) Según estimaciones recientes de las Naciones Unidas, la población de la ciudad de Bombay (India) evolucionó en las últimas décadas del siguiente modo:

Año	1950	1960	1970	1980	1990
Población (en millones de habitantes)	2,9	4,1	5,8	8,1	11,2

Los porcentajes de aumento correspondientes a cada período fueron **aproximadamente**:

1950 a1960: ---- 1960 a1970: ----- 1970 a1980: ------ 1980 a1990: -----

La similitud entre estos porcentajes nos indica que podemos encontrar una función exponencial P(x) = ka^x que describa aproximadamente el crecimiento.
Si tomamos como valor inicial la población de 1950, entonces k = _________

Si consideramos como porcentaje de incremento por década el 40%, entonces

a = 1+0,40 = ______. Si llamamos P(x) a la población en x décadas a partir de 1950, la función es P(x) = ____________ Según este modelo, la proyección para el año 2020 es aproximadamente de ___________________________________

PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO EN ESTA SECCIÓN SE PUEDE VER LOS VIDEOS EN LAS SIGUIENTES PÁGINAS WEB: http://www.youtube.com/watch?v=jNU6m8J1Qgk
http://www.youtube.com/watch?v=bSgmlSW-RVY&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=mF-rTet6mMM&feature=related

Ejercicios 4.1.1

1) Cierto cultivo bacteriano crece duplicando su cantidad cada día. Al finalizar el primer día hay 1000 bacterias; ¿cuántas habrá después de diez días? ¿Cuántas después de n días?

2) El valor de un automóvil se deprecia el 10 % cada año, durante los primeros 5 años. ¿Cuánto vale después de 5 años si su precio original fue de $145 000.00? Determina su valor como una función del tiempo.

3) Si inviertes $1000.00 al 8% de interés anual compuesto trimestralmente, ¿cuánto tiempo tardará en convertirse en $ 1500.00?

4) Si en las vacaciones te ofrecen un trabajo de un mes, donde se te pagará bien. ¿Cuál de las formas de pago siguiente resulta más reditiable para ti?
a) Un millón de pesos al final del mes
b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercero y, en general, 2^n centavos el día n

5) Si se te pide que traces la gráfica de la función $f(x) = 2^x$ para x entre 0 y 10. Usando una escala de 10 unidades por centímetro para el eje Y, y 1 cm por cada unidad en el eje X. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitaras para trazar esta gráfica?

6) Un estudiante esta intentando determinar la vida media del yodo131 radiactivo. Mide la cantidad de yodo 131 en una solución muestra cada 8 horas. Los datos obtenidos se encuentran en la siguiente tabla.

Tiempo (t)	0	8	16	24	32	40	48
Cantidad (g)	4.80	4.66	4.51	4.39	4.29	4.14	4.04

a) Encuentra la función exponencial que representa la cantidad de yodo 131 en función del tiempo.
b) Localiza los puntos en el plano cartesiano y traza la gráfica de la función que encontraste en el inciso anterior
c) Utiliza tu modelo para determinar la vida media del yodo 131. (la vida media es el tiempo que se tarda la mitad de cierta cantidad de un elemento radiactivo en desintegrarse y transformarse en un nuevo elemento)

7) Una moneda rara de la colección de Jorge en la actualidad vale $450. El valor ha aumentado en 15% cada año. Si el valor continúa aumentando a este ritmo, ¿cuánto valdrá la moneda dentro de 11 años? Y ¿dentro de12 años?

8) En un pueblo con 15000 habitantes se propaga una epidemia de influenza. Después de **t** días el número de residentes infectados es:

$$N(\mathbf{t}) = 15000/ [\, 1 + 14999(10^{-0,13\mathbf{t}})]$$

a) Determine el número de personas infectados después de 5, 10 y 20 días

b) Determine cuántos días, después del inicio, las ¾ partes de la población esta infectada.

4.1.2 ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN EXPONENCIAL:

a) Papel que desempeña la variable.
b) Crecimiento y decaimiento.
c) Representación algebraica.
d) Contraste de comportamientos entre funciones exponenciales y funciones potencia.

Aprendizajes:

- *Explica por qué la base* ***a debe ser mayor que 1,*** *en las funciones del tipo* $f(x) = a^x$ *y* $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

- *Compara el comportamiento entre funciones exponenciales y funciones potencia. (* 2^x *con* x^2 *o con* x^3 *por ejemplo). Obtiene conclusiones al respecto.*
- *Identifica que en* ***f(x) = a^x^ (con a>1)*** *un exponente positivo indica crecimiento exponencial, mientras que uno negativo, habla de decaimiento. Interpreta este hecho tanto en la gráfica de la función como en el contexto de la situación dada.*

En los ejemplos anteriores la variable independiente se encuentra como un exponente, de ahí el nombre de funciones exponenciales. Para iniciar su análisis, primero se trabaja sobre funciones de la forma: $f(x) = a^x$
Donde a es un número real positivo (a>0) y diferente de 1 (a≠1), y hacer ver que es la base de la función exponencial.

Nota para el profesor: La base a se limita a los números positivos, puede plantearse a los alumnos la siguiente pregunta: ¿por qué no puede ser negativa?, y analizar grupalmente su respuesta haciendo una tabulación para algunos valores de x. Se puede proceder similarmente con la siguiente pregunta:
Si a = 1, ¿que pasa con la función resultante?

Para analizar el crecimiento o decaimiento de este tipo de funciones, es conveniente trazar las gráficas de algunas de ellas. A continuación se plantean algunas actividades que pueden usarse en clase o pueden dejarse de tarea.

Actividad 1) En el siguiente plano traza la gráfica de las siguientes funciones:

Potencia $g(x) = x^2$

Exponencial $f(x) = 2^x$

a) ¿Cuál es el dominio de cada una? ____________
____

b) ¿Cuál es su rango, de cada una? ______________
____

c) ¿Cuáles son sus ceros? ______________________

d) ¿En que intervalo es creciente $g(x)$?____________

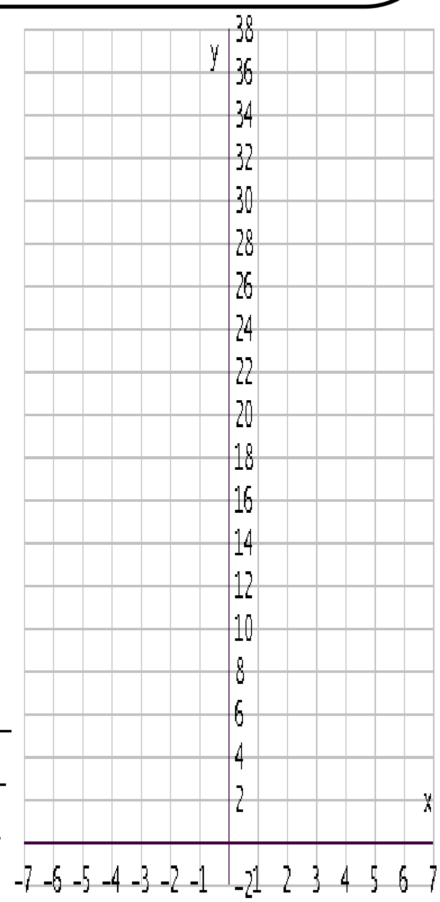
e) ¿En que intervalo es creciente $f(x)$?____________

f) ¿Cuál crece más rápido? _____________________

g) ¿En que intervalo es decreciente $g(x)$?___________

h) ¿En que intervalo es decreciente $f(x)$?___________

i) ¿Cuál de las dos tiene una asíntota horizontal? ____
____



j) En la función potencia, la que está cambiando de valor es ______________ y el exponente se mantiene fijo.

k) Mientras que en la función exponencial la que cambia de valor es ___________________ y la base se mantiene fija.

l) Al hacer estas comparaciones, ¿qué otra observación harías tú?

____

____

Actividad 2) Trazar las gráficas y hacer un análisis similar al anterior con las funciones $h(x) = x^3$ y $k(x) = 3^x$, al compararlas, ¿Qué conclusiones harías?

____

____

____

Actividad 3) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2^x$ b) $g(x) = 2^{-x}$

Recuerda que:
$2^{-x} = (½)^x$

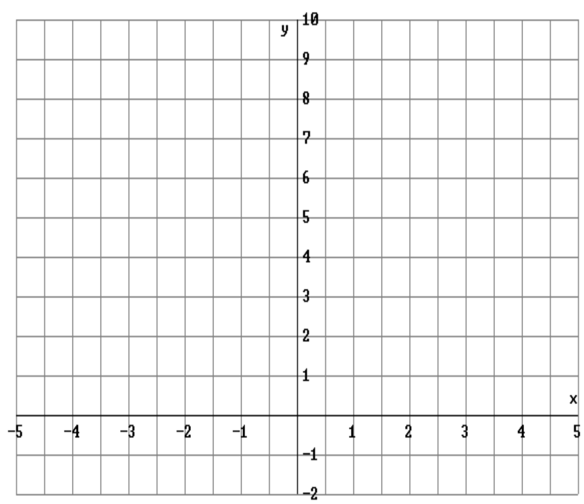
Solución:

Con ayuda de tu calculadora te puedes dar cuenta de que le podemos dar valores a x tanto positivos como negativos, así que la función siempre tiene un valor real para cualquier valor de x en los números reales, por lo que el dominio es:

D = ______________________________

Completa la siguiente tabla y localiza los puntos sobre el siguiente plano uniéndolos con una curva suave.

x	$f(x)=2^x$	$g(x)=(½)^x$	x	$f(x)=2^x$	$g(x)=(½)^x$	x	$f(x)=2^x$	$g(x)=(½)^x$
-15			-1.5			1		0.5
-10			-1			1.5		
-5		32	-0.5		1.4142	2		
-3	0.125		0	1		3		0.125
-2			0.5			10		



Si observas las dos gráficas te puedes dar cuenta que si reflejamos a f sobre el eje Y se obtiene la gráfica de g.

Los valores de ambas funciones siempre son ________________________, ambas funciones no tienen ceros y su rango es: R = ____________________________

Las dos funciones interceptan al eje Y en el punto ______________

Conforme x se extiende hacia los negativos los valores de f _________________ y los valores de g ________________

Conforme x se extiende hacia los positivos los valores de f _________________ y los valores de g __________________, por lo que podemos decir que la función $f(x) = 2^x$ es una función **creciente** y la función $g(x) = (½)^x$ es una función _______________, además el eje X es una asíntota _________________.

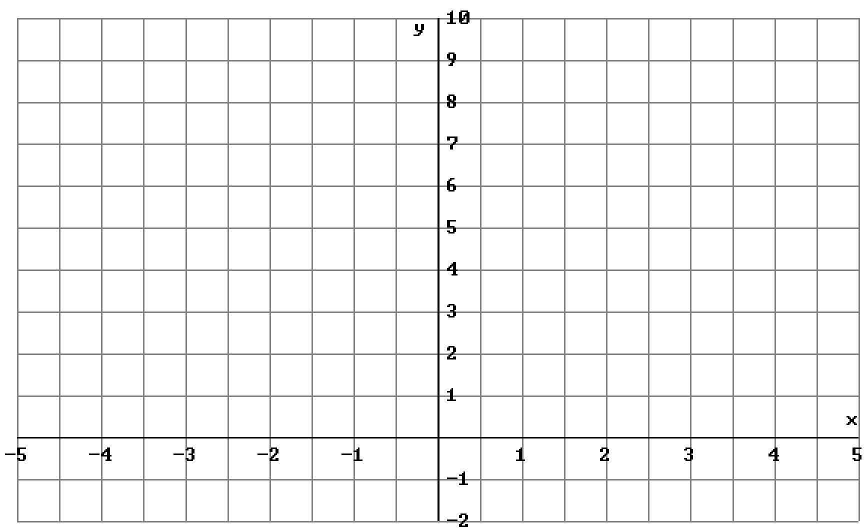
Ejercicio 4.1.2

1) Trazar la gráfica de las funciones $h(x) = 3^x$ y $k(x) = 3^{-x}$, ¿su comportamiento es similar al de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$? ¿En general, qué se podría afirmar acerca de las funciones $F(x) = a^x$ y $G(x) = a^{-x}$?

2) ¿La función $p(x) = 2^{-x}$ es la misma que $k(x) = -2^x$?, para justificar la respuesta trazar sus gráficas.

3) En el siguiente plano trazar las gráficas de la función exponencial para diferentes valores de la base a

$$F(x) = a^x, \quad \text{con } a = \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, 3, 4, 5.8 \text{ y } 10$$



Al compáralas, ¿qué puedes afirmar de éstas?

4) Observando el ejercicio anterior, ¿cuándo una función exponencial es creciente y cuando decreciente?

4.1.3 ESTUDIO ANALÍTICO Y GRÁFICO DEL COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES EXPONENCIALES DEL TIPO:

$$f(x) = ca^x \quad \text{con } a > 1 \text{ y } c \neq 0$$

$$f(x) = c\left(\frac{1}{a}\right)^x \quad \text{con } a > 1 \text{ y } c \neq 0$$

REVISIÓN DEL DOMINIO Y RANGO. PAPEL QUE DESEMPEÑA c.

Aprendizajes:

- *Proporciona el dominio y el rango de una función exponencial dada.*
- *Traza la gráfica de algunas funciones exponenciales como:* 2^x, 3^x, 10^x, e^x. *Les aplica las modificaciones pertinentes que produzcan, en la gráfica, traslaciones horizontales y verticales.*

Para analizar lo que sucede con las gráficas de estas funciones al aplicarles ciertas transformaciones como multiplicarlas por una constante (alargamiento o contracción), cambiarle de signo a la función o a la variable independiente (reflexiones sobre los ejes) así como sumar o restar una cantidad ya sea a la función o a la variable independiente (translaciones verticales y horizontales) y combinaciones de estas, se proponen las siguientes actividades.

Actividad 1) Con base a la gráfica de $f(x) = 2^x$, traza las gráficas de las siguientes funciones y analízalas: a) $g(x) = 3(2)^x$ b) $h(x) = (½)2^x$

Solución:

La base de la función es 2 (2 > 1) la función es creciente y ya la trazamos en un ejercicio anterior, pasa por los puntos (-1,½), (0,1), (1,2), (2,4), (3,8).........., con estos puntos traza la función f.

a) La función g es la función f multiplicada por 3 así que en cada punto por el que pasa f multiplicamos la ordenada por 3 (la gráfica se alarga), así g pasará por los puntos (-1, 3/2), (0,3), (1,6), (2,12), (3, 24), ... sigue creciendo y para valores negativos de x, esta función se acerca a cero. Tiene una asíntota horizontal que es el eje ______. Delinea la gráfica sobre el plano siguiente. Su dominio y su rango son: D = ________________, R = _________________
Cruza al eje Y en el punto _________

b) La función h ahora es la función f multiplicada por ½ (la gráfica se contrae) y en cada punto por el que pasa f cambiamos la ordenada multiplicándola por ½ y tenemos que h pasa por (-1, ¼), (0, ½), (1,1), (2, 2), (3, 4).......también sigue creciendo y cuando x se extiende hacia la izquierda, h se acerca a cero. La asíntota horizontal es _________, delinea la gráfica sobre el mismo plano. Su dominio y rango son: D = ________________, R =___________________
Cruza al eje y en el punto _________,

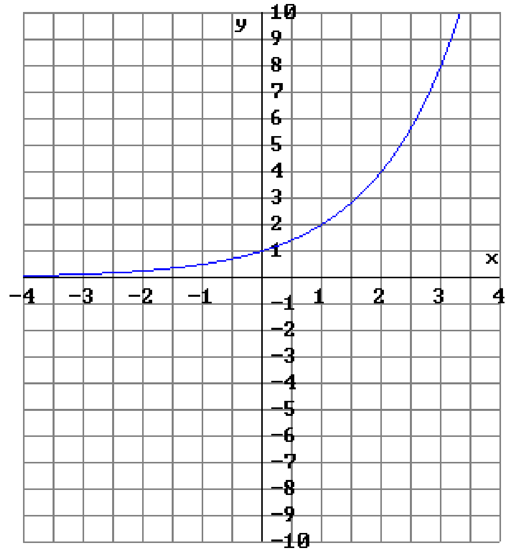
Tanto la función g y h tienen ceros _________, ¿por qué? ________________

____

Actividad 2) Usa la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones, analízalas a) $m(x) = -2^x$ b) $n(x) = 2^{-x}$

Solución:

Trazamos la función f sobre el plano siguiente



a) La función m es la función f multiplicada por –1, y recordando que cuando le cambiamos el signo a la función, esta se invierte o refleja sobre el eje _____. Así que la gráfica de la función m, la trazamos reflejando cada punto de f sobre el eje X. Ahora trázala, su dominio sigue siendo el mismo D = _____________
Y cambia su rango que ahora es:
R = ____________________
Conforme x se extiende hacia los negativos la gráfica se acerca a cero por _________, así que la asíntota ____________ sigue siendo el eje _______. Cruza al eje Y en el punto __________

b) En la función n ahora el signo negativo lo tiene la variable independiente o sea la x, así que recordando que cuando el exponente tiene un signo negativo, para tener exponentes positivos pasamos la expresión al denominador

$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

y la función n se convierte en la función f invertida sobre el eje Y, así que la gráfica de n la trazamos reflejando cada punto de f sobre el eje Y, ya la puedes trazar, su dominio y rango son: D = _________________, R = _______________

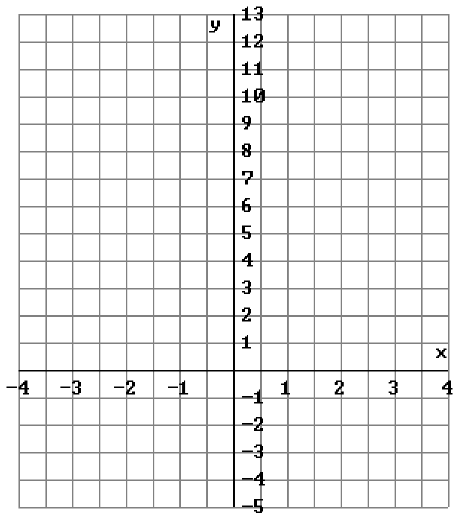
Cuando x se extiende hacia los positivos los valores de la función _____________

Tiene una asíntota ____________ y es el eje ________.

Mientras que f es creciente la función n es __________________, cruza el eje Y en el punto ___________.

Actividad 3) Utiliza la gráfica de $f(x) = 2^x$ para dibujar la gráfica y analizar a cada una de las funciones a) $R(x) = 3 + 2^x$ b) $T(x) = 2^{-x} - 3$

Solución:



a) La función R es la función f más 3 unidades, así que su gráfica la podemos obtener desplazando hacia arriba 3 unidades a la función f, cada punto de f a la ordenada le sumamos 3 (traza la gráfica) el dominio de esta función es:
D = ____________________
Y ahora conforme x se extiende hacia los negativos los valores de la función se ________________, por lo que la asíntota ____________ es _____________ y su rango esta dado por R = ______________
Sigue siendo una función _____________
Cruza al eje y en el punto ________

Dibujamos la gráfica de f sobre el plano

b) La función T tiene la misma base que f pero el exponente tiene un signo negativo, así que quedamos que el signo en el exponente refleja a f sobre ____________ y se convierte en una función __________, pero también se le restan 3 unidades, así que a cada punto de f lo reflejamos sobre el eje Y y le restamos 3 unidades (trázala sobre el mismo plano), nuevamente cambio la asíntota _________ que ahora es la recta de ecuación _________

Su dominio y rango son:

D = _____________________, R = ___________________

Cruza al eje Y en el punto __________ y al eje X lo cruza en el punto ________

Actividad 4) Usa la gráfica de $f(x) = 10^x$ para trazar la gráfica y analizar cada función

a) $G(x) = 10^{x+4}$ b) $H(x) = 10^{x-2}$

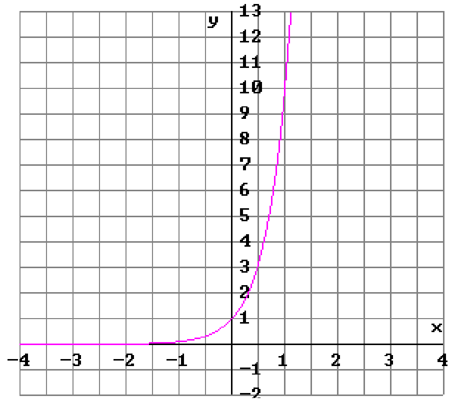
Solución:

Primero tracemos la gráfica de f que ya se muestra en el plano siguiente, marca algunos puntos sobre esta.

a) El exponente de la función G es $x + 4$, esto quiere decir que se tiene una traslación sobre el eje X o sea que la gráfica de la función G se obtiene trasladando la gráfica de la función f, 4 unidades hacia la izquierda. El punto (0, 1) se convierte en (– 4, 1), el punto (1, 10) se convierte en (–3, 10) y puedes hacer lo mismo con otros puntos sobre la gráfica, y trazar la gráfica de la función G

El dominio y rango de la función G son: D = ___________, R = ___________

La ecuación de la asíntota horizontal es: _______. Cruza al eje Y en el punto _________



b) En la función H el exponente ahora es x – 2, nuevamente se tiene una traslación sobre el eje X, ya que a la variable independiente le estamos restando 2 unidades. Por lo que la gráfica de la función H se obtiene trasladando todos los puntos de la función f, 2 unidades a la derecha. El punto (0 , 1) se convierte en (2 , 1) y el punto (1 , 10) se convierte en (3 , 10), ya puedes trazar su gráfica.

El dominio y rango de la función son: D = _____________, R = _____________

La ecuación de la asíntota horizontal es: _____________. Cruza al eje Y en el punto __________

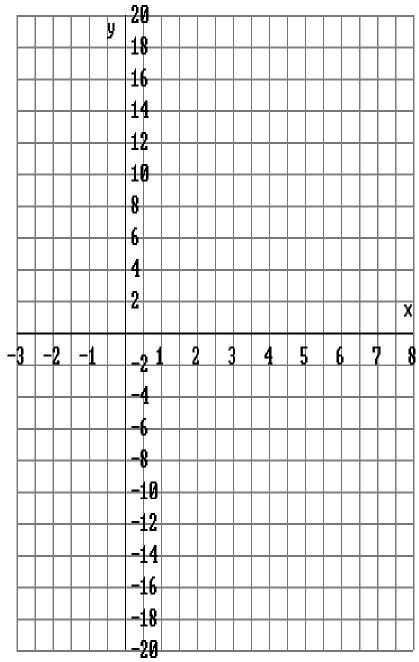
Actividad 5) Utiliza la gráfica de $f(x) = 3^x$ para trazar la gráfica y analizar la función

$$F(x) = 2 - 3^{(5-x)}$$

Solución:
Primero traza la gráfica de f dándole algunos valores a x y anótalos
Analicemos primero el exponente que es $5 - x$, como x tiene un signo negativo se tiene una reflexión sobre el eje ____, y el 5 hace que se traslade 5 unidades hacia la derecha ($5 - x = 0$, $x = 5$), antes de la base hay un signo negativo, por lo que se tiene una reflexión sobre el eje _____, el 2 nos da una traslación sobre el eje ___, la sube 2 unidades, así que primero hagamos las reflexiones y luego las traslaciones, las puedes marcar de diferente color o punteadas:

1) Reflejamos f sobre el eje Y.
2) La gráfica que resulta la reflejamos sobre el eje X.
3) Luego la recorremos 5 unidades hacia la derecha.
4) Después la subimos 2 unidades.

Comprueba dándole algunos valores a x para verificar que la última gráfica que trazamos es la correcta



El dominio y rango de la función son: D = ___________, R = ____________

La ecuación de la asíntota _____________, es: ___________

Cruza al eje Y en el punto __________

Cruza al eje X aproximadamente en ___________

Ejercicio 4.1.3

I) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones y determina el dominio y el rango, la asíntota horizontal y los puntos donde intercepta a los ejes.

1) $g(x) = 2^{x-3}$ 2) $h(x) = 10^{-x} + 4$ 3) $j(x) = 5^{x+4} - 4$

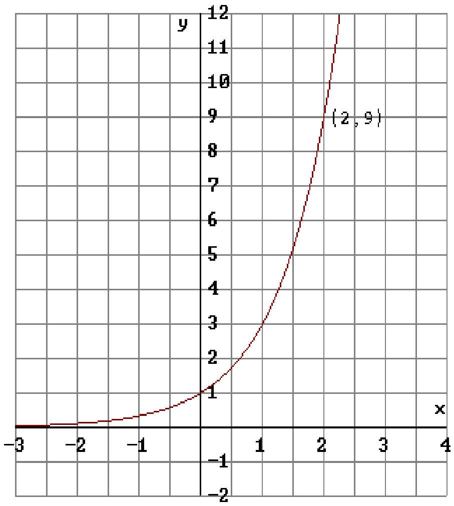
4) $k(x) = 2 - 3^{x-5}$ 5) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 6$ 6) $g(x) = 8 - 4^{3-x}$

7) $f(x) = 8^{x-2} + 3$ 8) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$ 9) $m(x) = \frac{1}{2}(3^{x+6})$

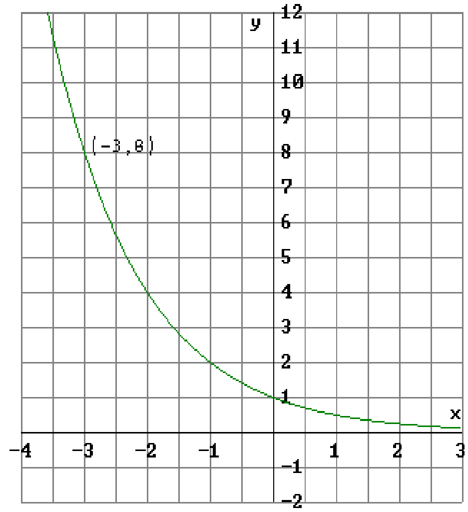
10) $k(x) = -4^{-x} + 2$

II) Determina la función exponencial que representa cada una de las siguientes gráficas.

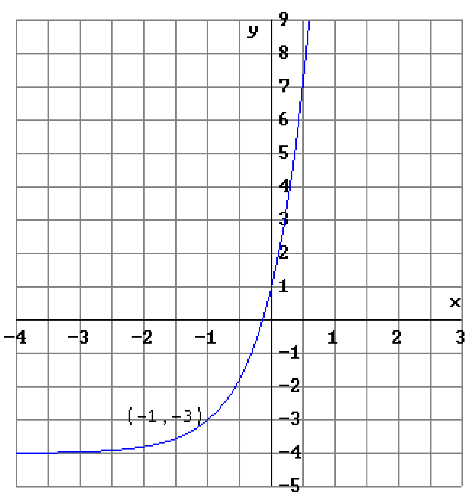
A)



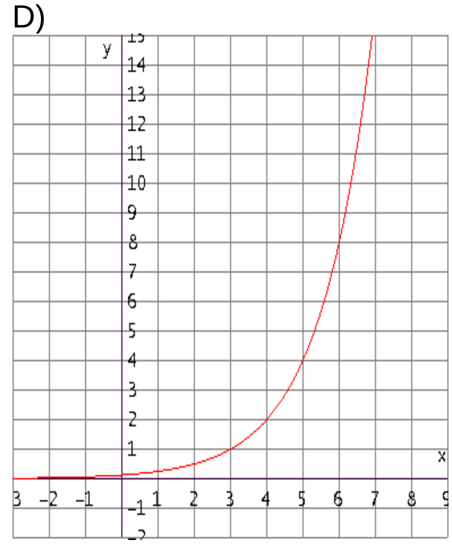
B)



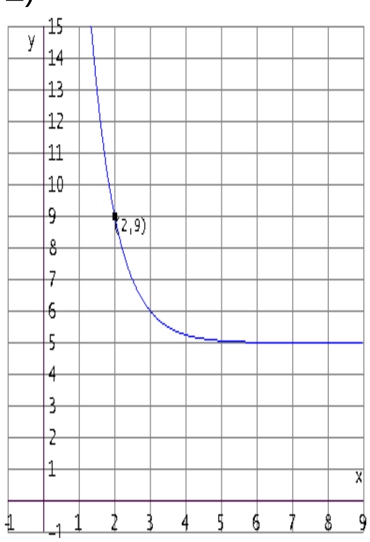
C)



D)



E)



PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO EN ESTA SECCIÓN SE PUEDE VER EL VIDEO EN LA SIGUIENTE PÁGINA WEB:
http://www.slideshare.net/mfatela/grficas-de-funciones-exponenciales-presentation

4.1.4 IMPORTANCIA Y CARACTERIZACIÓN DEL NÚMERO e.

Aprendizajes:

- *Conocer la caracterización del número* e, *reconocer su importancia y traza la gráfica de* e^x.

Nota para el profesor: Para lograr este aprendizaje sugerimos una lectura complementaria para el alumno, como puede ser la siguiente.

Lectura sobre la importancia y caracterización del número e.

El número e está definido como el valor al que tiende la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n se hace más y más grande, con n entero positivo.

Con ayuda de tu calculadora dale valores a n para veas que tan grande tiene que ser para que nos aproximemos al valor de e. Este valor es un *número irracional* por lo que no tiene un valor exacto y su representación decimal es no repetitiva.
Busca en tu calculadora la tecla del número e, cuyo valor aproximado a 31 decimales es igual a 2.7182818284590452353602874713527

Otra forma de calcular el valor de e es con la suma de la serie infinita

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\cdots$$

Realiza algunos cálculos para que veas como esta suma se va aproximando al valor de e que muestra la calculadora.

La importancia de este valor radica en las aplicaciones que tiene, ya que existen diversas situaciones donde el número e es la mejor base posible. Por ejemplo, cuando se invierte continuamente con un interés compuesto, cuando se quieren estimar[1] poblaciones, para calcular edades de objetos antiguos por medio del carbono 14, para diagnosticar ciertas enfermedades por medio de sustancias radiactivas, para conocer como se difunde una determinada información, y muchas otras más.

Nota para el profesor: Para que el alumno trace la función de $f(x) = e^x$ (función exponencial con base e) y analice sus variaciones, se pueden trabajar actividades como las siguientes:

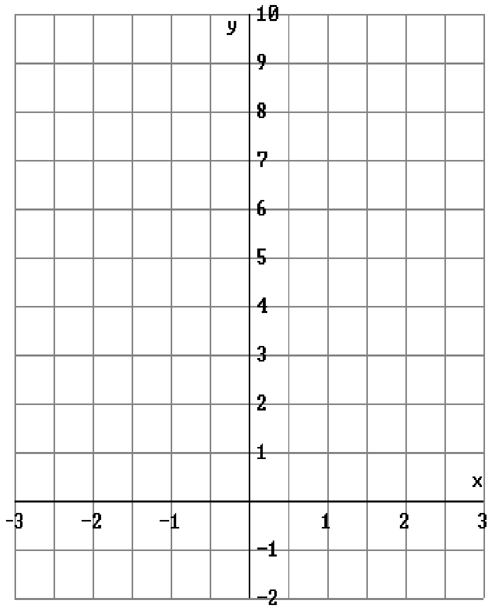
[1] Una estimación de población es una aproximación al número de población que reside en un área geográfica específica calculado utilizando una técnica analítica no censal ni muestral.

Actividad 1) Traza la gráfica de cada función y analízala

a) $f(x) = e^x$ b) $g(x) = e^{-x}$

Solución:

Con ayuda de la calculadora evalúa cada función en los valores que se indican en la siguiente tabla, localiza los puntos sobre el plano y traza ambas gráficas.



x	$f(x)= e^x$	$g(x) = e^{-x}$
-10		
-2		
-1.5		
-1		
-0.5		
0		
0.5		
1		
1.5		
2		
5		

La función f es _______________ y la función g es __________________ y nuevamente g se obtiene reflejando a f sobre el eje ________, El dominio y el rango tanto de f como de g es el ___________ D = ______________, R = _______________

Cruzan al eje Y en el punto __________, La ecuación de la asíntota _____________ es: ____________; no cruzan el eje _____, por lo que podemos decir que estas dos funciones no tienen ___________.

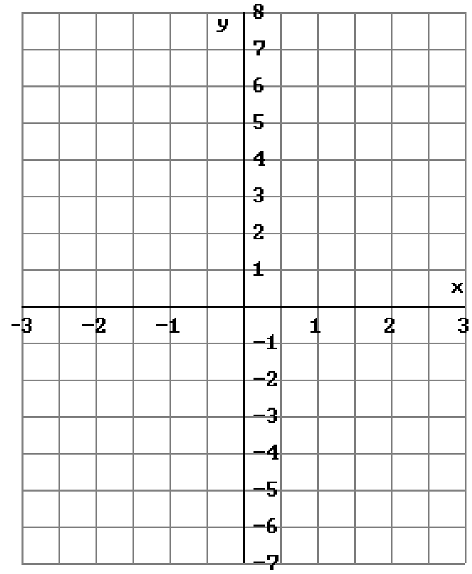
Actividad 2) Partiendo de la gráfica de $f(x) = e^x$ traza la gráfica de cada función y determina el dominio, rango, asíntota y el punto en donde cruzan a cada eje.

a) $g(x) = -\boldsymbol{e}^{-x} + 2$ b) $h(x) = \boldsymbol{e}^{(x-3)} - 4$

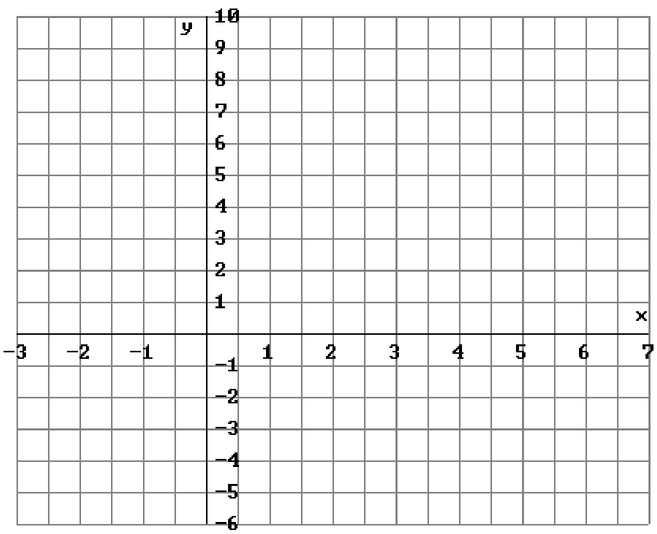
Solución:

a) Primero trazamos la gráfica de la función f sobre el siguiente plano

El primer término de la función g es negativo, así que este hace que su gráfica se refleje sobre el eje ______; y como el exponente de e es ___________, esto hace que la gráfica se reflejará sobre el eje _______.
El 2 que está sumando hará que la gráfica se traslade 2 unidades hacia arriba.
Ya puedes delinear la gráfica de g, donde su D = ___________, R =___________
La ecuación de la asíntota horizontal es: _________
Cruza al eje Y en el punto ___________
Cruza el eje X aproximadamente en el punto ____________



b) Trazamos la función f sobre el plano y aplicamos las transformaciones indicadas para delinear la función h.



El exponente de la función $h(x)$ es $x - 3$, esto hace que f se desplace 3 unidades a la derecha.

Como a la potencia se le resta 4, entonces la gráfica baja 4 unidades. Con estas dos traslaciones ya puedes delinear a la función h.
D = _________________,
R = _________________
La ecuación de la asíntota horizontal es _______________
Cruza al eje Y en el punto _________
Cruza al eje X aproximadamente en el punto _________

Ejercicios 4.1.4

Traza la gráfica y hacer un análisis similar a la de los ejemplos para cada una de las siguientes funciones

1) $f(x) = 2\,e^{x}$ 2) $g(x) = 3 - e^{x+2}$ 3) $h(x) = e^{x^2}$

4) $k(x) = e^{2-x} + 5$ 5) $m(x) = e^{-x^2}$ 6) $n(x) = e^{x-4} - 2$

7) $l(x) = e^{2x-1} - 3$ 8) $p(x) = -\ e^{x} + 1$

4.1.5 LAS PROPIEDADES: $a^x a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$.

Aprendizajes:

- *Recordar las leyes de los exponentes así como el significado de un exponente negativo, y lo utilizará para manejar la equivalencia entre* $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ *y* $f(x) = a^{-x}$
- *Conocerá la propiedad biunívoca de la función exponencial, ya que es indispensable para poder operar los exponentes y para trabajar su función inversa.*

Nota para el profesor: Recomendamos la siguiente actividad de tarea para que el alumno por si mismo recuerde las leyes de los exponentes. Esta, incluye ejemplos resueltos detalladamente y varios ejercicios para que reafirme estas leyes o propiedades.

ACTIVIDAD SOBRE LAS LEYES DE LOS EXPONENTES.

Leyes de los exponentes.

Una potencia es un número que se puede escribir en la forma a^m donde a es llamada la base y m el exponente.

Recuerda que $a^m = \underbrace{(a)\,(a)\,(a)\,(a)\cdots\cdots(a)}_{m \text{ veces}}$ y $b^m = \underbrace{(b)\,(b)\,(b)\,(b)\cdots\cdots(b)}_{m \text{ veces}}$

Recordemos las leyes de los exponentes:

Considerando que podemos definir a^m y b^m para cualquier valor de m o n en los reales siempre y cuando tanto a como b solo tomen valores positivos se cumplen las siguientes leyes:

1) $a^m(a^n) = a^{m+n}$ 2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 3) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

4) $(ab)^m = a^m b^m$ 5) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^m$ 6) $1^m = 1$ 7) $a^0 = \mathbf{1}$

Ejemplos:

1) $3^5\, 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$ 2) $\dfrac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$ (observa que para que se cumplan estas dos leyes, deben de ser potencias con la misma base)

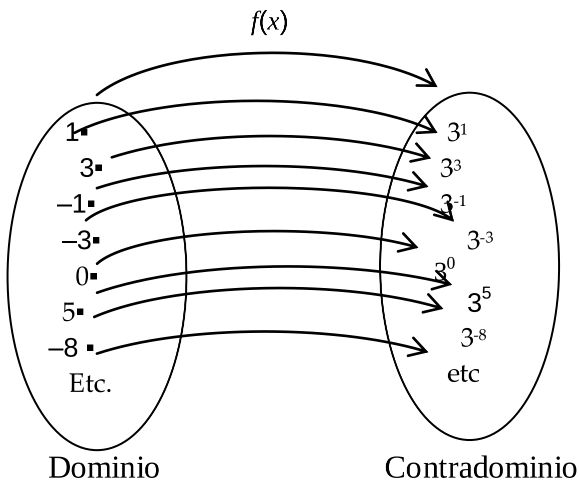
3) $(2^2)^4 = 2^{2\cdot 4} = 2^8 = 256$ 4) $(5\cdot 2)^3 = 5^3\, 2^3 = 125(8) = 1000$

5) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ 6) $1^5 = (1)\,(1)\,(1)\,(1)\,(1) = 1$ 7) $8^0 = 1$

Estas leyes las utilizaremos para resolver ecuaciones exponenciales en una variable, ya que recuerda que las soluciones o raíces de la ecuación serán los ceros de la función exponencial. Para esto, necesitamos conocer una propiedad de las funciones exponenciales y es la siguiente.

Propiedad biunívoca de la función exponencial

Con los ejercicios que has resuelto hasta aquí te habrás dado cuenta que cada valor de la función exponencial $f(x)$ es el resultado de un solo valor de x. Esto lo podemos probar gráficamente, trazando rectas paralelas al eje X, y estas solo cortan a la curva en un punto. Este procedimiento es similar a la definición de función "a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio", lo cuál se cumple por el hecho de que son funciones. El siguiente diagrama muestra estas dos afirmaciones:



Una función es uno a uno si a cada elemento del contradominio le corresponde solamente un elemento del dominio y a esto se refiere la propiedad biunívoca.

Con mayor formalidad, esto se expresa de la siguiente forma:

Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$

Aplicándolo a las exponenciales esto nos dice que:

Si $a^{x_1} = a^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$

Veamos algunos ejemplos de esta última propiedad:

1) Si $2^x = 2^5$ entonces $x = 5$.
2) Si $3^4 = 3^{2t}$ entonces $4 = 2t$.
3) Si $9^{3z-1} = 9^{2z}$ entonces $3z - 1 = 2z$

No olvides que esto se cumple porque las funciones exponenciales son biunívocas, es precisamente esta propiedad la que se requiere para que la "regla de inversión" sea una función. Es recomendable antes de tratar de hallar la inversa de una función, determinar si la función dada es uno a uno.

Ahora si podemos analizar algunos ejemplos donde apliquemos estas propiedades.

Ejemplo 1) Si $4^x = 7$, ¿a qué es igual 4^{-2x}?
Solución:
Vamos a tratar de expresar a 4^{-2x} en términos de 4^x, y ve completando el procedimiento:

$4^{-2x} = (4^x)^{-2}$ Propiedad usada $a^{mn} = (a^m)^n$

$= \dfrac{1}{(4^x)^2}$ Propiedad usada ___________________

sustituyendo el valor de $4^x = 7$, tenemos: $4^{-2x} = \_\_\_\_$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $3^{x-1} = 27$

Solución:
Primero escribimos a 27 en base 3, es decir, $27 = 3^3$

Así que, $3^{x-1} = 3^3$ (sustituimos 27 en base 3)

$x - 1 = 3$ Propiedad usada _________________

$x =$ Al despejar a x.

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $2^{x^2+x} = 4^{1+x}$

Solución:
Escribimos las dos expresiones en la misma base 2, es decir, sustituimos $4 = 2^2$:

$2^{x^2+x} = (2^2)^{1+x}$ ______________________

$2^{x^2+x} = (2)^{2(1+x)}$ ______________________

$2^{x^2+x} = 2^{2+2x}$ ______________________

$x^2 + x = 2 + 2x$ ______________________

$x^2 - x - 2 = 0$ Al resolver la ecuación, resulta que

$x_1 =$ ________ y $x_2 =$ ________

Comprueba tus resultados de los ejercicios anteriores.

Ejemplo 4) Muestra que $4^{y+2} - 4^y = 15(4^y)$

Solución:
Podemos escribir a 4^{y+2} como: $4^{y+2} = 4^y\,(4^2)$, esto lo permite la ley ______________.
Sustituimos en la expresión original y factorizamos,

$(\qquad) - 4^y = 4^y\,(\_\_\_\_\_\_\_) = 4^y\,(\_\_\_)$

así que;

$$4^{y+2} - 4^{y} = 15(4^{y})$$

Ejemplo 5) Muestra que $5^{t+2} + 3(5^{t+1}) - 40(5^{t}) = 0$

Solución:

Como $5^{t+2} = 5^{t}\,5^{2}$ y $5^{t+1} = 5^{t}\,5$ sustituyendo tenemos:

$5^{t+2} + 3(5^{t+1}) - 40(5^{t}) = 5^{t}\,5^{2} + 3(5^{t}\,5) - 40(5^{t})$ factorizando 5^{t} se tiene:

$= 5^{t}[\quad + \ 3(\quad) - 40(\quad)]$ ⟵ completar

$= 5^{t}[\qquad] = 0$

Es decir efectivamente $5^{t+2} + 3(5^{t+1}) - 40(5^{t}) = 0$

Ejercicio 4.1.5

1) Si $5^{-x} = 3$, ¿a qué es igual 5^{3x}?
2) Si $2^{x} = 3$, ¿a qué es igual 4^{-x} ?
3) Aplicando las leyes de los exponentes muestra que $3^{y+5} - 9(3^{y+3}) = 0$
4) Aplicando las leyes de los exponentes muestra que $4^{n} + 4^{n} = 2^{2n+1}$.
5) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $5^{4x-2} = 25^{x+1}$ b) $27^{5x-6} = 9^{7x+3}$ c) $(9^{3x})^{3} = 243$ d) $2^{2x} - 18(2^{x}) = -32$

PARA REPASAR LO APRENDIDO EN LAS SECCIONES ANTERIORES SE PUEDE VER EL VIDEO EN LA SIGUIENTE PÁGINA WEB:
http://www.slideshare.net/mfatela/grficas-de-funciones-exponenciales-presentation

4.1.6 PROBLEMAS DIVERSOS DE APLICACIÓN.

Aprendizajes:

Aplica los conocimientos adquiridos respecto a funciones exponenciales, para modelar algunas situaciones de diversos contextos.

Nota para el profesor: Proponemos la siguiente actividad dirigida al alumno para que logre los aprendizajes de esta sección. La intención es que el alumno interactúe con el texto para que se involucre en cada situación problemática y vaya reflexionando sobre esta.

Actividad 1) Si se tiene una inversión de __________ con un rendimiento anual del __________, si el tiempo del depósito es un año ($t = 1$), calcula el valor de la inversión en cada uno de los siguientes periodos de capitalización que se muestran en la tabla.

Solución:

El valor de la inversión lo calculamos con la siguiente expresión que espero se te haga conocida $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ donde,

P = inversión inicial
r = tasa anual de interés
n = número de periodos anuales de capitalización
t = número de años de la inversión
A = valor de la inversión después de t años

Ahora ya puedes completar la siguiente tabla:

Periodo	n	Valor de la inversión al año
Anual		
Semestral		
Trimestral		
Mensual		
Semanal		
Diario		
Cada hora		
Continuo		$A = Pe^{rt}$

Si aumentamos los periodos de capitalización que es lo que sucede: ____

Actividad 2) La población de ranas en un pequeño estanque crece exponencialmente. La población actual es de 85 ranas, y la tasa de crecimiento relativo es de 18 % anual.

a) Determina una fórmula $N(t)$ para la población después de t años.
b) Determina la población proyectada después de 3 años.
c) Determina el número de años necesarios para que la población de ranas sea de 600.

Solución:

a) Como la población de ranas crece exponencialmente y nos dan la tasa de crecimiento relativo entonces la población $N(t)$ tiene la forma:

$$N(t) = N_0\, e^{r t}$$

donde r es la tasa de crecimiento = 0.18 y N_0 = población actual = _________

entonces $N(t)$ = __________

b) Utilizamos la expresión anterior con el valor de t = 3

$N(3)$ = ____________ = ____________

Así que después de 3 años habrá ___________ ranas en el estanque

c) Con la misma expresión donde la población después de t años es de 600 intenta con ayuda de tu calculadora encontrar un valor aproximado de t

$$600 = 85\,e^{0.18\,t}$$

primero con enteros, y luego ya que te des cuenta entre que enteros la expresión se aproxima a 600 sigue hasta centésimos.

Aproximadamente cuando t =________ se tendrán 600 ranas en el estanque.

Actividad 3) Supón que el valor de una computadora se deprecia a razón de 15 % al año. Determina el valor de una computadora lap-top dos años después de que se compró en $ 18500.00. Encuentra una expresión para su valor en función del tiempo y determina su valor después de 5 y 10 años

Solución:

El valor de la computadora disminuye 15 % de su valor, así que al finalizar el primer año su precio será de:

18500 – 18500(   ) = ___________________

18500(0.85) = ____________________

estas dos cantidades son iguales, así que vamos a utilizar la segunda, al finalizar el segundo año este valor se reducirá un 15 %, o sea que el precio de la lap-top será de:

18500(0.85) (0.85) = ______________

Si continuamos aumentando el valor de t, llegamos a la expresión:

$$P(t) = 18500(0.85)^t$$

Y para saber su valor después de 5 y 10 años sólo sustituimos, así:

$P(5) = 18500(0.85)^5$ = _______________

$P(10) = 18500(0.85)^{10}$ = ________________

Ejercicios 4.1.6

1) Cuando se purifica el keroseno para producir combustible para aviones, los contaminantes se eliminan al hacer pasar el keroseno a través de un filtro de arcilla especial. Supón que un filtro está embebido en una tubería de manera que 15 % de las impurezas se eliminan por cada pie que recorre el keroseno.

a) Escribe una función exponencial para representar el porcentaje de impurezas que quedan después que el keroseno recorre x pies.
b) Traza la gráfica de la función.
c) ¿Más o menos qué porcentaje de impurezas quedan después que el keroseno recorre 12 pies?
d) ¿Se eliminarán las impurezas por completo? Explica

2) Los científicos que estudian el salmón del Atlántico encontraron que el consumo de oxígeno del salmón primal O, está dado por la función $O = 100\left(3^{\frac{3s}{5}}\right)$ donde s es la velocidad a la que viaja el pez en pies por segundo.
a) ¿Cuál es el consumo de oxígeno de un pez que viaja a 5 pies por segundo?
b) Si un pez recorre 4.2 millas en una hora, ¿cuál es el consumo de oxígeno?

3) Un paracaidista deportivo salta desde una altura razonable. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se demuestra que la velocidad del paracaidista en el tiempo t está dada por $v(t) = 80(e^{-0.2t} - 1)$, donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).
a) Determina la velocidad inicial del paracaidista.
b) Determina la velocidad después de 5 s y después de 10 s.
c) Traza la gráfica de la función de la velocidad $v(t)$.
d) La velocidad máxima de un objeto en caída con resistencia del viento se conoce como velocidad terminal. A partir de la gráfica del inciso c), determina la velocidad terminal de este paracaidista.

4) Bajo condiciones ideales un cierto tipo de bacterias tiene una tasa de crecimiento relativo de 220 % por hora. Accidentalmente se introduce un determinado número de estas bacterias en un producto alimenticio. Dos horas después de la contaminación, un conteo bacterial muestra que existen aproximadamente 40 000 bacterias en el alimento.
a) Determina el número inicial de bacterias introducidas en el alimento.
b) Estima el número de bacterias en el alimento 3 horas después de la contaminación.

5) Los sociólogos han encontrado que la información se difunde entre una población a una tasa exponencial. Supón que la función $y = 525(1 - e^{-0.038t})$ representa el número de personas en un pueblo de 525 habitantes, quienes han escuchado las noticias de t horas a partir de su difusión.
a) ¿Cuántas personas han escuchado acerca de la inauguración de una nueva tienda de abarrotes dentro de las 24 horas a partir del anuncio?
b) Traza la gráfica de la función. ¿En qué momento el 90 % de la gente habrá escuchado acerca de la inauguración de la tienda de abarrotes?

6) Una persona desea depositar en el banco $10 000.00 y dejar ese depósito por 20 años. Se le presentan dos opciones: 5 % de interés anual compuesto semestralmente, y 4.5 % de interés anual compuesto trimestralmente. ¿Qué opción debe elegir esta persona?

7) Con el fin de entrenar trabajadores para armar tableros de circuitos se envió un grupo a una compañía de capacitación de personal. En una experiencia pasada se encontró que la curva de aprendizaje para el empleado medio está dada por $N = 40(1 - e^{-0.12t})$, donde N es el número de tableros armados por día después de t días de entrenamiento. Traza la gráfica de esta función para $0 \le t \le 30$. ¿Cuál es, en promedio, el máximo número de tableros que se espera produzca un empleado en un día?

8) El crecimiento de una colonia de mosquitos sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado con la siguiente ecuación $A(t) = A_0 e^{kt}$. Si inicialmente habían 1000 mosquitos y después de un día la población de éstos aumenta a 1800, ¿cuántos mosquitos habrán en la colonia después de 3 días? ¿Cuánto tiempo tendría que pasar para que la colonia tenga 10000 mosquitos?

9) El crecimiento de una colonia de abejas está determinado por la siguiente ecuación $P(t) = \dfrac{230}{1 + 56.5e^{-0.37t}}$. ¿Cuántas abejas habían inicialmente?¿Cuánto tiempo le tomará a las abejas tener una población igual a 180? ¿Cuál será la población de las abejas cuando $t \to \infty$?

10) Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10\,(0.8)^t$.
a) Calcule la cantidad del fármaco restante en el organismo 8 horas después de la ingestión inicial.
b) ¿Qué porcentaje del medicamento que está aún en el organismo se elimina cada hora?

11) En 1980 la población estimada de la India era de 651 millones y ha estado creciendo a una tasa de alrededor del 2% anual. La población $N(t)$, t años más tarde, puede aproximarse mediante $N(t) = 651e^{0.02t}$.
Suponiendo que esta tasa alta de crecimiento continúa, calcule la población de la India en el año 2010 y 2015. ¿Cuándo será de mil millones?

12) De acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton, un objeto se enfría en forma directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Si cierto objeto pasa de 125º a 100º en 30 minutos, cuando se encuentra rodeado por aire que tiene una temperatura de 75º, entonces puede mostrarse que su temperatura $f(t)$ después de t horas está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$. Si $t = 0$ corresponde a la 1 pm, aproxime la temperatura a las
a) 2 pm.
b) 3 pm.
c) 4 pm.
d) Trace la gráfica de f desde $t = 0$ hasta $t = 5$.