Unidad 4.
Perímetros, áreas y volúmenes.

PROPÓSITO

✍ *Aplicar conocimientos algebraicos y geométricos adquiridos en unidades anteriores en la resolución de problemas sobre figuras y cuerpos que involucren exploraciones geométricas, deducciones y cálculos numéricos. Propiciar el desarrollo de la imaginación espacial.*

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

El núcleo central del curso de Matemáticas II, lo constituye el estudio de la geometría euclidiana, que ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo a sus formas, dimensiones y propiedades.

Las unidades correspondientes al eje de geometría euclidiana, contemplan las etapas de exploración, deducción y aplicación, mismas que permiten establecer un equilibrio entre lo axiomático y lo tradicional de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato.
En esta cuarta unidad, "Perímetros, Áreas y Volúmenes", se da paso a combinar y aplicar los diversos conceptos y resultados geométricos vistos en las unidades anteriores, y se reafirman los significados de perímetro, área y volumen mediante aplicaciones teóricas y prácticas de la geometría.
Esta unidad permite tanto al profesor como al alumno la aplicación y utilización de los conceptos geométricos aprendidos de tal forma que el alumno no se queda con la idea de que la geometría no sólo es trazos, propiedades y deducciones sobre estos, si no que su utilidad es muy amplia en todo nuestro entorno.
El enfoque para estos es que el alumno involucre su conocimiento anterior y el nuevo con una mejor reflexión, debe establecer relaciones lógicas entre los conceptos abstractos y las afirmaciones que se hacen en un problema determinado.

Esta unidad al igual que las anteriores, contiene una gran variedad de ejercicios tanto resueltos como para resolver, de tal forma que el profesor dispone de una gran variedad y decide cuáles utilizar según sea su metodología. Asimismo, algunas actividades que el profesor puede utilizar en sus clases, donde se promueve la reflexión, y que el alumno se enseñe a "pensar geométricamente".
Uno de los propósitos de este material es que el profesor disponga de varios ejercicios resueltos con detalles para que se los proporcione al alumno de tarea, esto es de gran ayuda ya que así avanzamos en buena forma para cubrir toda la unidad.

Como ya se mencionó, la presente guía intenta apoyar el trabajo de profesores y de alumnos, y como tal, ofrece un conjunto de sugerencias de estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo, diseñados con base a los aprendizajes estipulados en el Plan de Estudios de Matemáticas II U-4 del Colegio de Ciencias y Humanidades.

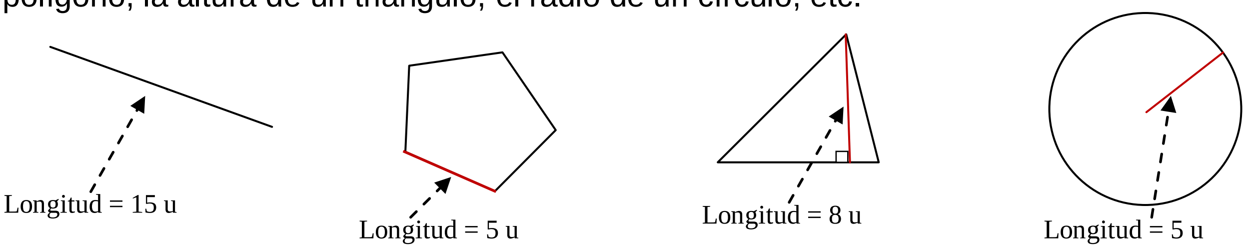
Conceptos clave: Medida, perímetro, área, polígono, poliedro, volumen.

4.1 MEDIDA EN GEOMETRÍA.

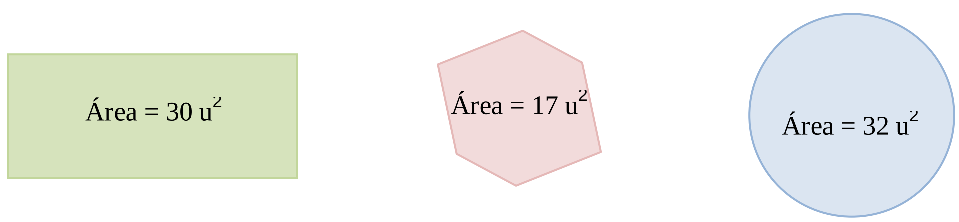
4.1.1 ¿Qué es medir longitudes, áreas y volúmenes?

Medir una cantidad es compararla con otra, esta otra cantidad es tomada como unidad de medida.
En geometría euclidiana medimos longitudes, áreas y volúmenes, para hacerlo, **comparamos** una magnitud con respecto a otra que llamamos unidad.

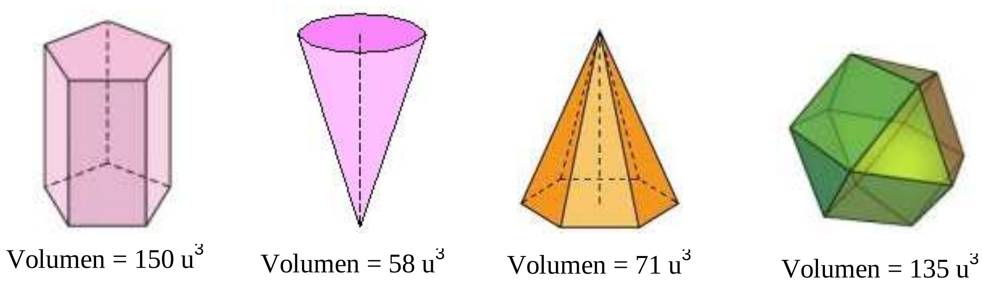
Para medir aquello que sólo tiene **longitud**, la unidad es lineal ya que sólo hay una dimensión. Por ejemplo, medir la longitud de un segmento, la longitud del lado de un polígono, la altura de un triángulo, el radio de un círculo, etc.



El **área** de una figura corresponde a la medida de la superficie que dicha figura ocupa.
Para medir áreas, se usan dos dimensiones: largo y ancho, por tal razón, la unidad de medida se eleva al cuadrado. Por ejemplo, medir la superficie o área de un rectángulo, de un polígono en general, de un círculo, etc.

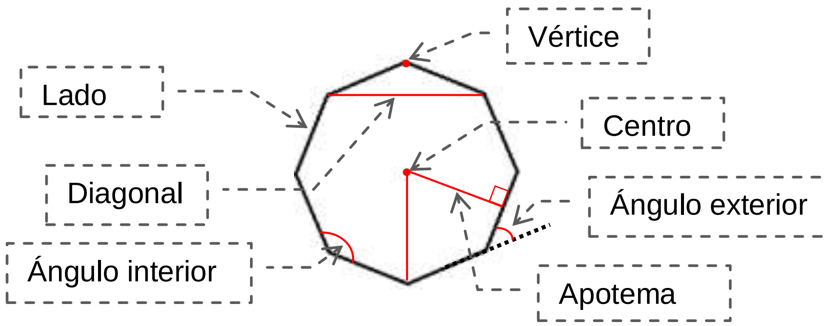


El **volumen** de un cuerpo geométrico es el espacio que ocupa.
En este caso, para medir un volumen se utilizan tres dimensiones: largo, ancho y altura, así, su unidad de medida se eleva al cubo. Por ejemplo, medir el volumen de un prisma, de un cono, de una pirámide o de un poliedro en general.



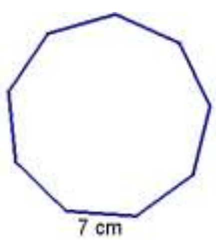
4.1.2 Perímetro de un polígono regular.

Recordemos que un Polígono es la superficie plana limitada por segmentos de recta, y un Polígono Regular es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales.
Sus características son:



El perímetro de todo polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados, pero en el caso de un Polígono Regular, al ser todos sus lados iguales, el perímetro es el número de lados multiplicado por la longitud del lado.
Es decir, si un Polígono Regular tiene "n" lados y la medida de cada lado es "d" unidades, entonces su perímetro será $n(d)$ unidades.

EJEMPLO 1. Calcular el perímetro del siguiente polígono regular.



Solución:
El polígono tiene 9 lados iguales y cada lado mide 7 cm.
Su perímetro es: 9(7) = 63 cm.

Respuesta: El perímetro es 63 cm.

EJEMPLO 2. Calcular la longitud de los lados de un polígono regular de 15 lados si su perímetro es 180 cm.

Solución:
Al ser polígono regular sus 15 lados son iguales, entonces cada lado mide:

$$\frac{180}{15} = 12 \text{ cm.}$$

Respuesta: La longitud de cada lado mide 12 cm.

EJEMPLO 3. El 12.5% de la cuarta parte del perímetro de un cuadrado es 2 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

Solución:
Suponiendo que el lado del cuadrado es x, su perímetro será $4x$.

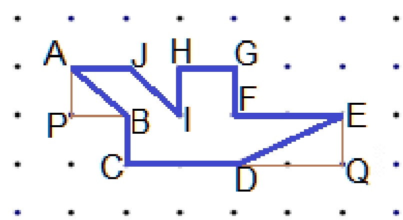
1º) La cuarta parte del perímetro es $\frac{4x}{4} = x$.

2º) El 12.5% de x es: $0.125x$

3º) Esta última expresión es igual a 2 cm. Tenemos la ecuación $0.125x = 2$, que al resolverla se obtiene $x = 16$.

Respuesta: El lado del cuadrado mide 16 cm.

EJEMPLO 4. Encuentra el perímetro del polígono ABCDEFGHIJ trazado en una retícula cuadrada. Donde la longitud de un punto a otro consecutivo ya sea horizontal o vertical mide 1 cm.



Solución:
Contamos los segmentos horizontales y los verticales, son 9, su longitud es 9 cm. Después, calculemos la medida de los segmentos inclinados AB = JI y el segmento DE. Para esto usaremos el teorema de Pitágoras.

El segmento AB es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABP, entonces: AB = $\sqrt{AP^2 + PB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

El segmento DE es la hipotenusa del triángulo rectángulo DEQ, entonces:
DE = $\sqrt{EQ^2 + DQ^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Respuesta: El perímetro del polígono mide $9 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} = 14.06$ cm

Video relacionado https://www.youtube.com/watch?v=E1uWLydHTqA

4.1.3 Medida aproximada de la longitud de la circunferencia. Obtención empírica de la fórmula.

SUGERENCIA. Para obtener empíricamente la fórmula de la longitud de una circunferencia, proponemos la siguiente actividad, la cual puedes trabajar de forma dinámica con la ayuda de algún software como Cabri, Geometer Sketchpad o Geogebra.

Actividad: Con un mismo radio de longitud (el que tú desees), trazar cinco polígonos regulares. Para cada uno de ellos calcular lo siguiente:

a) Su perímetro.
b) Desde su centro traza su radio y mide su longitud.
c) Divide el valor del perímetro entre 2 veces la longitud del radio, escribir cuatro decimales.

Anota tus resultados en la siguiente tabla:

Número de lados	8	15	25	60	90
Perímetro					
Longitud de 2r					
Perímetro/2r					

d) ¿A qué número se parece el resultado de "Perímetro/2r"? ________.

e) Si el número de lados del polígono regular fuera 300, a simple vista parece una _________________.

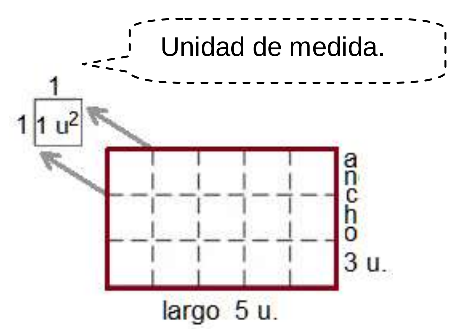
f) Si suponemos que p = Perímetro de un polígono regular, entonces podríamos afirmar que $\frac{p}{2r} \approx$ _______ (donde ≈ significa "aproximado").

g) Despejando p, tenemos: ____________. Si el número de lados del polígono es muy grande, el perímetro será muy aproximado al perímetro de una __________________.

4.1.4 Área del rectángulo.

Toda figura plana tiene dos dimensiones, largo y ancho.
La figura donde éstas dos dimensiones son muy claras es en el rectángulo, ya que es evidente su largo y su ancho.
El área del rectángulo es el producto de sus dos dimensiones, largo **x** ancho, ya que si tomamos como unidad un cuadrado de área 1u^2, esta unidad cubrirá todo el rectángulo colocando un total de "largo **x** ancho" cuadrados.

Por ejemplo, el área de un rectángulo de largo 5 unidades y de ancho 3 unidades es 5x3 = 15 u^2. Ya que para cubrir todo el rectángulo se necesitan 15 cuadrados, como se observa en la figura.

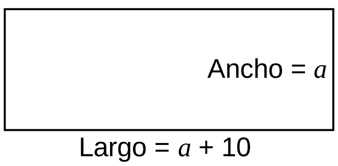


También se puede nombrar al largo del rectángulo “base” y a su ancho “altura”.

El cuadrado es un rectángulo con su ancho = largo, entonces su área es lado **x** lado.

EJEMPLO 1. En un rectángulo, el largo excede en 10 cm al ancho. Si el perímetro mide 80 cm ¿cuál es su área?

Solución:
Trazando una figura con los datos dados tenemos el siguiente rectángulo:



Perímetro = $2a + 2(a + 10)$, es decir, $2a + 2(a + 10) = 80$
Resolviendo la ecuación: $2a + 2a + 20 = 80$

$$4a = 80 - 20$$
$$a = 60/4 = 15$$

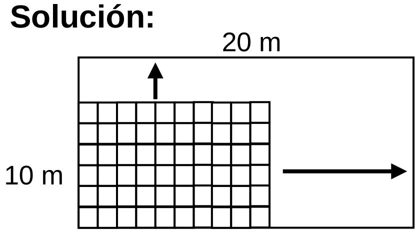
Entonces, el ancho del rectángulo es 15 cm.
Su área es: $a(a + 10) = 15(15 + 10) = 375$ cm^2.
Respuesta: El área del rectángulo es 375 cm^2.

EJEMPLO 2. Un rollo de tela de 2 m de ancho se ha usado para cortar 1050 pañuelos cuadrados de 20 cm de lado. ¿Qué longitud de tela había en el rollo si no ha faltado ni sobrado tela?

Solución:
Supongamos que el rollo de tela tiene forma de un rectángulo.
Si se cortan 1050 cuadrados de lado 20 cm, entonces, en el ancho caben 200/20 = 10 y en el largo caben 1050/10 = 105.
Es decir, la longitud de la tela es de 20(105) = 2100 cm = 210 m.
Respuesta: La longitud de la tela es de 210 m.

EJEMPLO 3. Se tiene que cubrir un piso rectangular en el patio interior de un edificio con losetas cuadradas de 30 cm de lado. Las medidas del patio son 10 m por 12 m. ¿Cuántas losetas se necesitarán?

Solución:



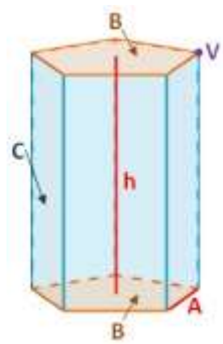
El área de cada loseta es: $(30)^2 = 900$ cm^2
Se convierten los metros a centímetros:
10 m = 1000 cm y 20 m = 2000 cm
El área del piso es: 1000 x 2000= 2000000 cm^2
Entonces, $\frac{2000000}{900} = 2222.22\overline{2}$

Respuesta: Se necesitan 2222 losetas enteras más $0.\overline{222}$ = 2/9 de una loseta.

4.1.5 Volumen de un prisma recto.

Un prisma recto es un cuerpo geométrico que tiene dos caras paralelas y congruentes llamadas bases, y cuyas caras laterales son rectángulos.

Elementos del prisma



En un **prisma** se pueden diferenciar los siguientes **elementos**:

- **Bases** (*B*): polígonos cualquiera. Cada prisma tiene dos bases, siendo ambas iguales y paralelas.
- **Caras** (*C*): los paralelogramos de los laterales y las bases.
- **Altura** (*h*): distancia entre las dos bases del prisma. En el caso del prisma recto la longitud de la altura h y la de las aristas de las caras laterales coinciden.
- **Vértices** (*V*): puntos donde confluyen las caras del prisma.
- **Aristas** (*A*): cada uno de los lados de las caras.
- Por el teorema de Euler, se puede saber el número de aristas (*A*) sabiendo el número de caras (*C*) y de vértices (*V*) mediante la fórmula A = C + V – 2

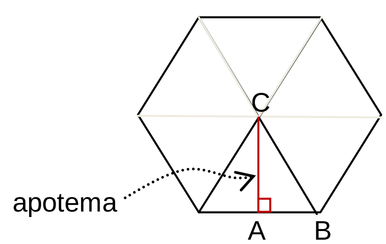
El volumen de un prisma es el producto del área de la base (A_b) por la altura del prisma (h), esto queda expresado por $V = A_b(h)$.

EJEMPLO 1. Determinar el volumen de un prisma recto de base hexagonal, cuya arista de la base mide 8 cm y su altura 24 cm.

Solución:

Su volumen es $V = A_b(h)$, al ser prisma recto, su altura es, h = 24. Necesitamos calcular A_b.

Las bases del prisma son hexágonos regulares, donde el área de cada uno es $A_b = \dfrac{\text{perímetro x apotema}}{2}$.



El apotema es la distancia que va del centro del polígono al punto medio de cualquiera de sus lados. Para obtener su medida, trazamos un triángulo como se ve en la figura, este triángulo es equilátero (demuéstralo), por lo que BC = 8.

Usando el teorema de Pitágoras en el ΔABC:

$AC^2 = BC^2 - AB^2$, es decir, apotema = $\sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ = 6.928 cm.

El perímetro del hexágono es 6(8) = 48 cm.

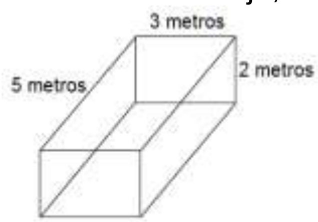
Entonces, el área de la base es $A_b = \dfrac{48 \times 4\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}$ cm^2.

Así, el volumen del prisma es $A_b(h) = 96\sqrt{3}(24) = 2304\sqrt{3}$ = 3990.645 cm^3.

Respuesta: El volumen del prisma es 3990.645 cm^2.

EJEMPLO 2. ¿Cuánto es el volumen de agua que contiene una cisterna que mide 5 metros de largo, 3 metros de ancho y 2 metros de profundidad?

Solución:
Haciendo un dibujo, tenemos el siguiente prisma recto:



Es un prisma rectangular cuyas medidas son:
Altura = 2 m.
Área de la base: 5(3) = 15 m^2
Volumen = 15(2) = 30 m^3
Para convertir a litros se hace la conversión usando:
1 dm^3 = 1 litro, es decir, 1 m^3 = 1000 litros,

Entonces, 30 m^3 es 30(1000) = 30000 litros.
Respuesta: El volumen de la cisterna es de 30000 litros.

EJERCICIOS 4.1

1) Halla el lado de un cuadrado cuyo perímetro mide 34 m.

2) El perímetro de un cuadrado es 45 cm, y si cada lado mide 3 + x, ¿cuánto vale x?

3) El perímetro de un rectángulo es 54 cm, si su base mide 2x – 1 y su ancho mide x + 5, ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

4) Determina el perímetro del rectángulo cuya área o superficie es 44 cm^2 y uno de sus lados mide 8 cm.

5) La cuarta parte de la superficie de un cuadrado es 7 cm^2. ¿Cuánto mide su lado?

6) Si el radio de una circunferencia es 9 cm. ¿Cuánto mide el perímetro del cuadrado circunscrito a ella?

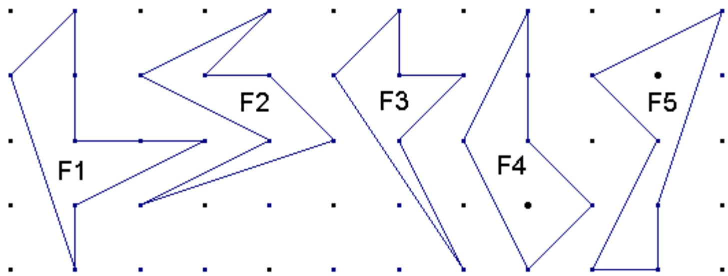
7) Determina la longitud de una circunferencia si el perímetro del cuadrado que la circunscribe es de 48 cm.

8) El perímetro de un triángulo isósceles es 37 cm. ¿Cuál es la medida de cada lado congruente si el lado no congruente mide 9 cm?

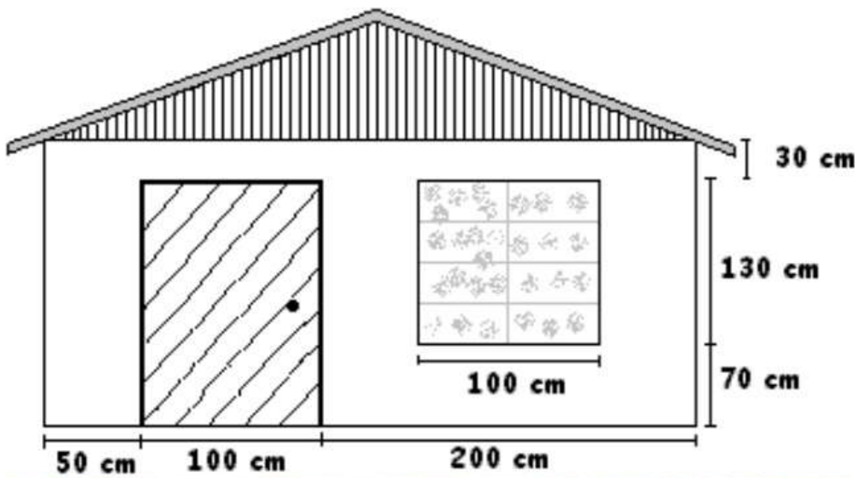
9) En un rectángulo, el largo excede en 12 cm al ancho. Si el perímetro mide 92 cm ¿Cuál es su área?

10) Si un cuadrado de 54 cm de perímetro, disminuye su lado en 4 cm. ¿Cuánto mide el área del nuevo cuadrado?

11) Calcular el perímetro de las siguientes figuras en una retícula cuadrada, donde la medida ya sea horizontal o vertical entre dos puntos consecutivos es 1 unidad.



12) Se tiene una cabaña cuyas medidas se indican en la siguiente figura:



a) ¿Cuál es el perímetro de la puerta?
b) ¿Cuál es el perímetro de la ventana?
c) El frente de la cabaña se pintará color beige ¿Cuánto mide la superficie a pintar?

13) Si el lado de un cuadrado aumenta al doble. ¿Qué ocurre con el área y su perímetro?

14) Si un cuadrado de lado n tiene un área de 121 m^2 ¿Qué área tendrá un cuadrado de lado $4n$?

15) Un cuadrado tiene igual perímetro que un rectángulo de 18 cm de largo y 15 cm de ancho. Calcula el lado del cuadrado.

16) El área de un cuadrado es 50 cm^2. ¿Cuál es el perímetro del triángulo equilátero construido sobre su diagonal?

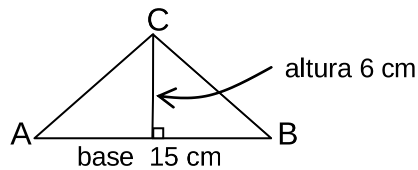
17) La diagonal de un cuadrado mide 9 metros. Calcula su área.

18) ¿Cuál es el perímetro de un rombo si su diagonal menor mide 10 cm y la mayor mide 18 cm?

19) El perímetro de un cuadrado de lado 13 cm es igual al de un rectángulo cuyo largo es el triple del ancho. ¿Cuál es la superficie del rectángulo?

20) Un cuadrado y un rectángulo tienen el mismo perímetro. Si el lado del cuadrado mide x cm y el ancho del rectángulo mide $x/3$. ¿Cuánto mide su largo?

21) Suponiendo que el triángulo ABC es isósceles, calcular su perímetro.



22) Los perímetros de dos cuadrados son 24 cm y 72 cm ¿Cuál es la razón entre sus lados?

23) Un terreno rectangular de 27 metros de ancho por 45 metros de largo se quiere cercar con 3 vueltas de alambre de púas. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar el terreno?

24) El Sr. López tiene un terreno rectangular de 150 m de largo y 95 m de ancho, y desea cercarlo con 3 líneas de alambre de púas. Si ya tiene colocados los troncos de madera a cada 5 m ¿Cuántos rollos de alambre requiere comprar, si cada rollo tiene 60 m de alambre?

25) ¿Cuántos metros recorre la rueda de una bicicleta en una vuelta, si el diámetro mide 28 centímetros?

26) La rueda de una máquina aplanadora mide 1.70 m de diámetro y 2 m de ancho, ¿cuál es el área de aplanado por vuelta de rueda?

27) ¿Cuántos sacos de cereal se obtienen al sembrar un lote de 25 metros por 35 metros si se estima que cada metro cuadrado produce 8 sacos?

28) Un piso de 5 metros por 3 metros se debe cubrir con baldosas de cerámicas. ¿Cuántas baldosas se necesitan si se sabe que 16 baldosas cubren 1 m^2?

29) Calcula el número de baldosas cuadradas de 10 cm de lado que se necesitan para enlosar una superficie rectangular de 4 m de base y 3 m de altura.

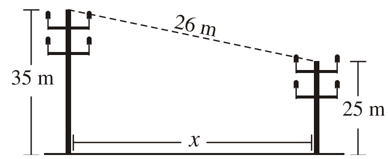
30) Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 4 m^2.

31) En el centro de un jardín cuadrado de 150 m de lado hay una piscina también cuadrada, de 25 m de largo. Calcula el área del jardín.

32) Calcula el área del cuadrado que resulta de unir los puntos medios de los lados de un rectángulo cuya base y altura miden 8 y 6 cm.

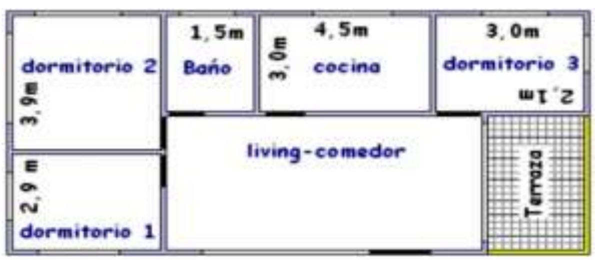
33) Un jardín rectangular tiene por dimensiones 30 m y 20 m. El jardín está atravesado por dos caminos perpendiculares que forman una cruz. Uno tiene un ancho de 8 dm y el otro 7 dm. Calcula el área del jardín.

34) Se ha tendido un cable de 26 m de longitud uniendo los extremos de dos torres metálicas cuyas alturas son 25 m y 35 m, respectivamente. ¿Qué distancia separa los pies de ambas torres?



35) Queremos enmarcar un cuadro cuyas dimensiones totales son 95 cm de base por 68 cm de alto. ¿Qué longitud deberá tener la moldura que debemos usar? Si la moldura cuesta a $18 el metro, calcula el precio de dicho marco.

36) El plano de una casa está hecho como se muestra en la siguiente figura:

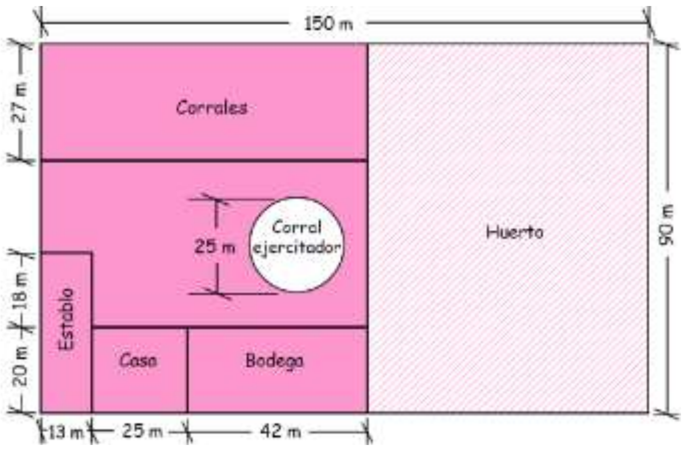


a) ¿Cual es el perímetro de la terraza?
b) Calcular el perímetro del living – comedor.
c) ¿Cuál es el área de la terraza?
d) Si se instala cerámica en el piso del baño y cocina. ¿Qué cantidad de metros cuadrados de cerámica se necesitan?
e) Si se instala cubre piso en los dormitorios, (donde el largo del dormitorio 1 y 2 es de 4 metros) y living - comedor. ¿Qué cantidad de metros cuadrados de cubre piso se necesitan?

37) Se necesita cercar un huerto rectangular de 180 m de longitud y 150 m de anchura, con tela metálica. El metro lineal de la malla cuesta $78. Al mismo tiempo, es necesario abonarlo con abono nitrogenado. El fabricante del abono recomienda 25 kg por hectárea (superficie de un cuadrado de 100m de lado).

a) Calcula la longitud de la tela metálica y el costo de la misma para cercar el huerto.
b) Calcula la cantidad de abono nitrogenado necesario para abonarlo.

38) Evaristo compró un rancho que tiene las medidas que se muestran en el plano:



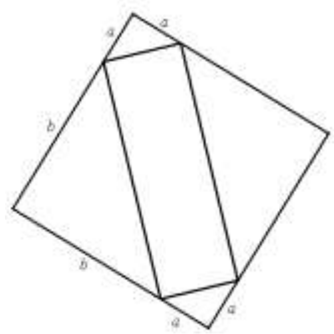
a) Colocará una cerca nueva en los corrales, en el corral ejercitador y en el establo. ¿Cuántos metros de tela metálica necesitará?

b) En la mitad del huerto plantará maíz, en la tercera parte de lo que resta plantará arroz y en lo que resta plantará trigo. ¿Qué superficie le corresponde a cada uno?

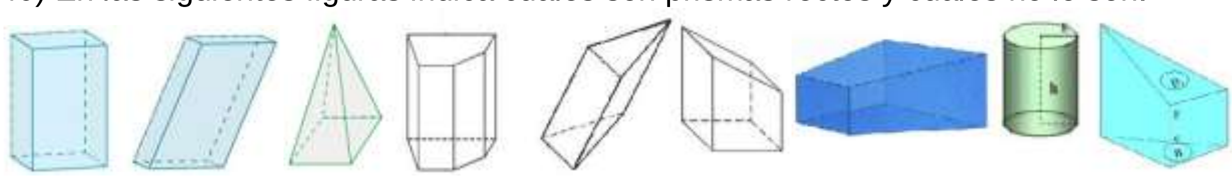
c) Si colocará piso nuevo en toda su casa, ¿cuántos m^2 debe de comprar?

d) Si Evaristo pagó por el rancho $2,800 000, ¿Cuánto pagó por cada m^2?

39) En la siguiente figura el lado del cuadrado ABCD mide $5\sqrt{2}$ cm, hallar el perímetro de la región rectangular.

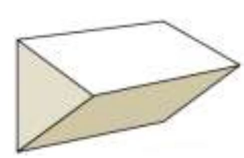


40) En las siguientes figuras indica cuáles son prismas rectos y cuáles no lo son.

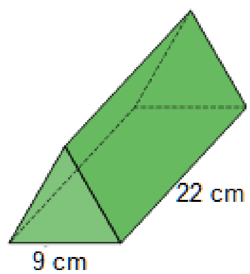


41) La siguiente figura muestra un prisma recto de base triangular.

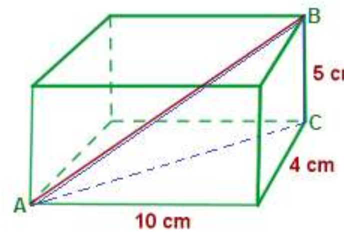
a) ¿Cuáles son las bases en este prisma recto?
b) ¿Cuántas caras rectangulares tiene este prisma recto?



42) Halla el volumen de este prisma recto cuyas bases son triángulos equiláteros:



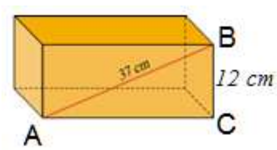
43) Calcular la longitud de la diagonal AB del siguiente prisma recto de 10 cm de largo, 4 cm de ancho y 5 cm de alto.



44) ¿Con cuántos metros cúbicos de agua se llena una piscina con forma de prisma rectangular de 19 m de largo, 8 metros de ancho y 1.5 metros de profundidad?

45) Una piscina tiene forma de prisma rectangular de dimensiones 25m x 15m x 3m. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenar los 4/5 de su volumen?

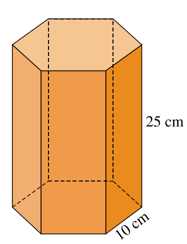
46) Halla el volumen de este prisma de base cuadrada, si AB = 37 cm y BC = 12 cm.



47) He rodeado con una cuerda un balón. A continuación he medido la longitud del trozo de cuerda que he utilizado para rodear el balón. ¿Cuál es el radio del balón, si el trozo de cuerda mide 94,20 cm de longitud?

48) Efectúa las mediciones que sean necesarias y calcula el volumen de uno de tus libros de texto.

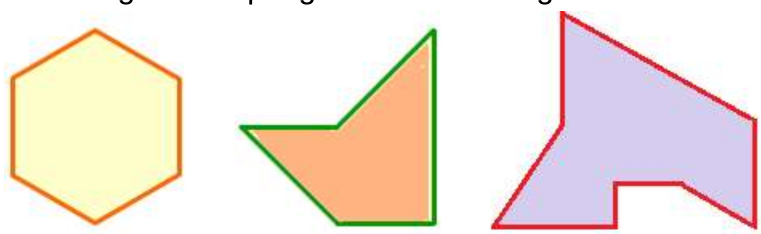
49) Halla el volumen del siguiente prisma recto hexagonal.



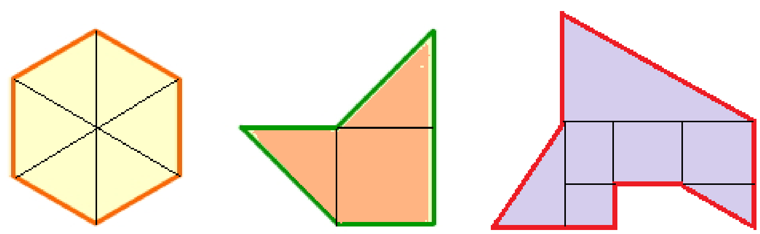
4.2 CÁLCULO DE ÁREAS POR DESCOMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN DE FIGURAS.

Cuando se tiene una figura plana donde su forma no permite calcular su área directamente mediante alguna fórmula, un método para calcular su área es **descomponerla** en otras figuras de áreas conocidas y que se puedan calcular fácilmente a partir de sus propiedades.

Actividad 1. Dividir los siguientes polígonos en otras figuras más sencillas.



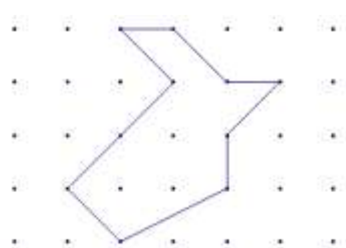
Una división podría ser:



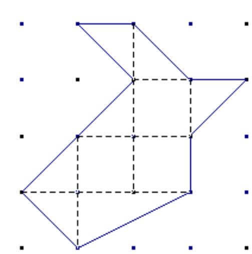
SUGERENCIA: Como se puede ver, lo ideal es descomponerla en triángulos y/o rectángulos.

Ver el video en: http://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/areas-y-perimetros-calculo-de-areas-por-descomposi/9113480e-ac0f-4bd4-8c84-bc746694718e

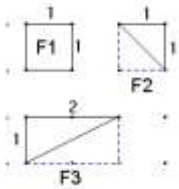
EJEMPLO: Calcular el área de la siguiente figura trazada en una retícula cuadrada, donde la medida ya sea horizontal o vertical entre dos puntos consecutivos es 1 unidad.



Solución:
Descomponemos la figura en otras más sencillas para facilitar el cálculo de sus áreas.

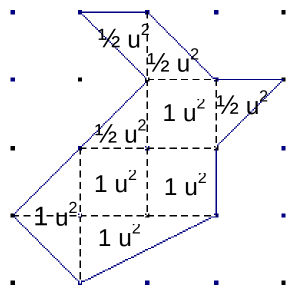


Ya descompuesta en figuras más sencillas, calcular el área de estas por separado y después sumarlas:



F1: Es un cuadrado de lado 1 unidad, su área es 1(1) = 1 u^2.
F2: Es un triángulo que es la mitad de la figura F1, entonces su área es ½ u^2.
F3: Es la mitad de un rectángulo de área 2 u^2, ya que su ancho es 1 u y de largo 2 u, entonces su área es 1 u^2.

Calculando cada área tenemos:



Sumando las áreas:

4(½) u^2 + 5 u^2 = 7 u^2.

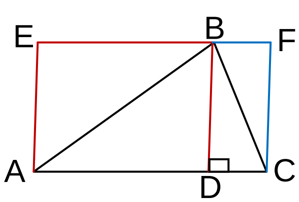
Respuesta: El área de la figura dada es 7 u^2.

4.2.1 Obtención de la fórmula del área del: triángulo, trapecio, rombo y paralelogramo.

a) Área de un triángulo:

En cualquier triángulo ABC, podemos hacer la siguiente construcción.

1º) Trazamos una altura BD.
2º) Sobre esa altura formamos los rectángulos BDAE y BDCF.



El rectángulo BDAE = ΔABE + ΔABD y como $\Delta ABE \cong \Delta ABD$, entonces el rectángulo BDAE = 2ΔABD.
Calculando sus áreas: área de BDAE = 2(área de ΔABD), es decir, $\overline{AD}(\overline{BD})$ = 2(área de ΔABD).

Despejando el área: área de ΔABD $= \dfrac{\overline{AD}(\overline{BD})}{2}$.

De forma similar se procede con el rectángulo BDCF y obtenemos:

$$\text{Área de } \Delta BDC = \frac{\overline{DC}(\overline{BD})}{2}$$

Como área ΔABC = área ΔABD + área ΔBDC.

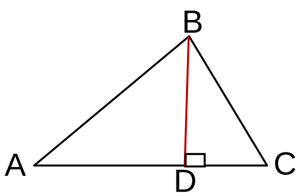
Esto es, área de $\Delta ABC = \dfrac{\overline{AD}(\overline{BD})}{2} + \dfrac{\overline{DC}(\overline{BD})}{2} = \dfrac{(\overline{AD}+\overline{DC})(\overline{BD})}{2} = \dfrac{\overline{AC}(\overline{BD})}{2}$

Conclusión: La fórmula del área de un triángulo es: $\dfrac{base \times altura}{2}$

EJEMPLO. Una vela triangular de una barca se ha estropeado y hay que sustituirla por otra. Para confeccionar la nueva vela nos cobran \$210 por m^2. ¿Cuánto costará esa nueva vela si debe tener 6 m de alto y 5 m de base?

Solución:

Forma de la nueva vela:

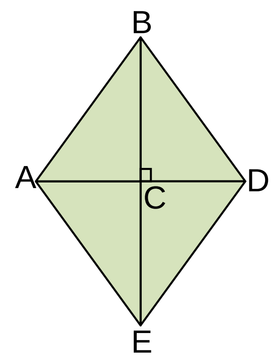


El área del $\Delta ABC = \frac{5\times 6}{2} = 15\ m^2$

Si el m^2 cuesta \$210, 15 m^2 costará 210(15) = 3150.

Respuesta: La nueva vela costará \$3150.

b) Área de un rombo.



En cualquier rombo se trazan sus diagonales y se divide en cuatro triángulos rectángulos congruentes.

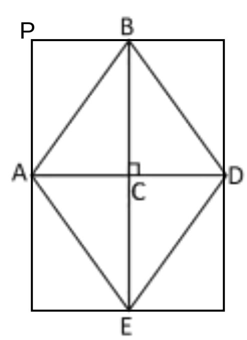
Entonces, área del rombo ABDE = 4(área del ΔABC) =

$$4\left(\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}\right) = \left(\frac{2\overline{AC}\cdot 2\overline{BC}}{2}\right) = \left(\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BE}}{2}\right)$$

Conclusión: La fórmula del área de un rombo es: $\frac{\textit{diagonal menor} \times \textit{diagonal mayor}}{2}$

EJEMPLO. Hemos fabricado una cometa con forma de rombo, cuyas diagonales miden 393 cm y 205 cm, respectivamente. Para ello, se ha usado una lámina plástica rectangular cuya longitud y anchura son las medidas de las diagonales del cometa. Calcula el área de la cometa y la de la lámina.

Solución:

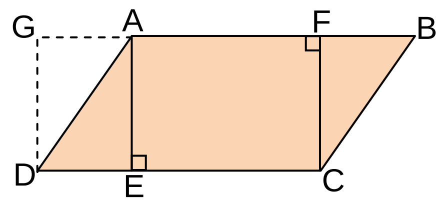


Haciendo un dibujo con los datos del problema, se obtiene un rombo inscrito en un rectángulo.
El ancho del rectángulo mide 205 cm y su largo mide 393 cm.
Su área es 205(393) = 80565 cm^2

Área del rombo = $\frac{205\times 393}{2} = 40282.5\ cm^2$

Respuesta: Área del cometa es 40282.5 cm^2 y área de la lámina 80565 cm^2.

c) Área de un paralelogramo.



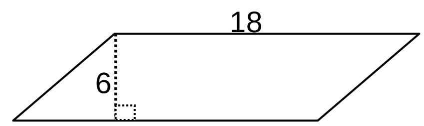
Dado cualquier paralelogramo ABCD, podemos hacer lo siguiente:
1º) Se trazan alturas desde A y desde C.
2º) Se traza el rectángulo con base DE y altura AE.
3º) Se puede mostrar que $\Delta DAG \cong \Delta DAE \cong \Delta BCF$.

Área del rectángulo GFCD = Área del paralelogramo ABCD.
Es decir, $\overline{DC}(\overline{AE})$ = Área del paralelogramo ABCD.

Conclusión: El área de un paralelogramo es $base \times altura$.

EJEMPLO. Calcular el área de un paralelogramo cuya altura mide 6 cm y su base mide 3 veces más que su altura.

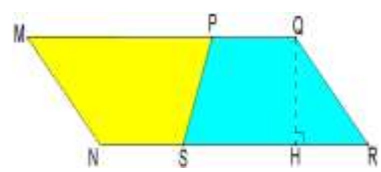
Solución:
Hagamos un dibujo con las condiciones dadas, que nos ayude a visualizar mejor el problema.
Si la altura mide 6 cm, y su base mide 3 veces más que su altura, entonces su base mide 3(6) = 18 cm.



Respuesta: El área del paralelogramo es 18(6) = 108 cm^2.

d) Área del trapecio.

Dado cualquier trapecio PQRS, podemos colocar el mismo trapecio invertido como se ve en la figura, y se forma el paralelogramo MQRN.



Como trapecio PQRS $\cong$ trapecio MPSN, entonces:
Área del paralelogramo MQRN = 2(Área del trapecio PQRS)
$\overline{NR}(\overline{QH})$ = 2(Área del trapecio PQRS)

Área del trapecio PQRS = $\dfrac{\overline{NR}(\overline{QH})}{2}$

Pero $\overline{NR} = \overline{NS} + \overline{SR}$, y $\overline{QH}$ es la altura tanto del paralelogramo como del trapecio.

Entonces, el área del trapecio PQRS = $\dfrac{(\overline{NS} + \overline{SR})(\overline{QH})}{2}$, donde $\overline{NS} = \overline{PQ}$.

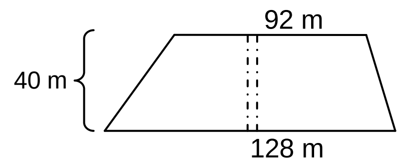
$\overline{PQ}$ es la base menor y $\overline{SR}$ es la base mayor del trapecio.

Conclusión: El área de un trapecio es: $\dfrac{(base\ menor + base\ mayor) \times altura}{2}$

EJEMPLO. Una zona boscosa tiene forma de trapecio, cuyas bases miden 128 m y 92 m. La anchura de la zona mide 40 m. Se construye un paseo de 4 m de ancho perpendicular a las dos bases. Calcula el área de la zona arbolada que queda.

Solución:

Hacer un dibujo con las condiciones dadas, nos ayudará a visualizar mejor el problema.
Área de la zona arbolada = área del trapecio – área del paseo.



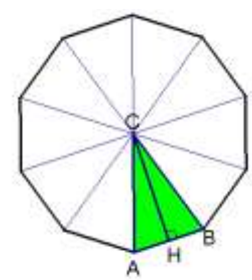
Área de la zona arbolada = $\frac{(128+92)40}{2}$ – 40(4) = 4400 – 160 = 4240 m^2.
Respuesta: El área de la zona arbolada que queda es 4240 m^2.

Para reforzar esta parte, se puede ver el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=DxE3bt-bUMg

4.2.2 Obtención de la fórmula del área de un polígono regular dado su apotema.

Todo polígono regular se puede dividir en triángulos congruentes, uniendo el centro del polígono con cada uno de los vértices. La altura de cada triángulo coincide con la apotema del polígono.
Entonces, área del polígono de "n" lados = n(Área del ΔABC)



Área del ΔABC = $\frac{base \times altura}{2}$ = $\frac{\overline{AB}\times\overline{CH}}{2}$, sustituyendo:

Área del polígono de "n" lados = $n\left(\frac{\overline{AB}\times\overline{CH}}{2}\right)$ = $\frac{n\times\overline{AB}\times\overline{CH}}{2}$ = $\frac{Perímetro\ del\ polígono\times\overline{CH}}{2}$

Ya que $n\times\overline{AB}$ es el perímetro del polígono regular, y $\overline{CH}$ es su apotema.

Conclusión: El área de un polígono regular es igual al producto de su perímetro por su apotema dividido por dos.

EJEMPLO. En las fiestas de un pueblo han montado una carpa para las verbenas, cuya forma es la de un polígono regular de 9 lados. La carpa está rodeada por una serie de focos que tiene una longitud total de 49.5 m. ¿Cuánto mide el lado de la carpa?

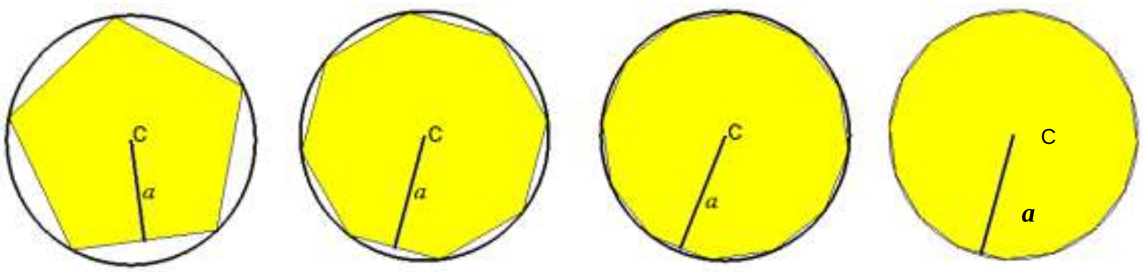
Solución:
Para conocer la medida del lado de la carpa, sabemos que es un polígono regular de 9 lados y su perímetro es una serie de focos cuya longitud es de 49.5 m.

Entonces, tenemos la ecuación $9l = 49.5$, despejando a l: $l = \frac{49.5}{9} = 5.5$

Respuesta: Cada lado de la carpa mide 5.5 m.

4.2.3 Cálculo aproximado del área del círculo. Obtención empírica de la fórmula.

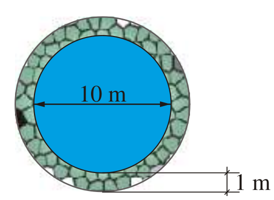
Inscribiendo algunos polígonos regulares en un círculo del mismo radio, quedan de la siguiente forma:



Donde C es el centro del polígono y del círculo, y ***a*** es la apotema del polígono regular.
Observa que entre mayor sea el número de lados del polígono, su apotema es de mayor longitud y el área del polígono se parece más al área del círculo. Además la medida de la apotema tiende a ser la del radio del círculo.
Con estas reflexiones nos atrevemos afirmar que un círculo es un polígono de una infinidad de lados.

Entonces, el área del círculo será: $\frac{perímetro \times apotema}{2} = \frac{2\pi\ r \times r}{2} = \pi r^2$

EJEMPLO. Una fuente circular está rodeada de un andador de mármol. El diámetro de la fuente es de 10 metros y el andador tiene un metro de ancho. ¿Cuál es la superficie recubierta por el mármol?



Solución:
El diámetro de la fuente junto con el andador es de 12 m, entonces el radio es de 6 m.
Y su área es $\pi(6)^2 = 36\pi$ m^2.
Mientras que el área de la fuente es $\pi(5)^2 = 25\pi$ m^2.
La superficie recubierta por el mármol es $36\pi - 25\pi = 11\pi = 34.557$ m^2.

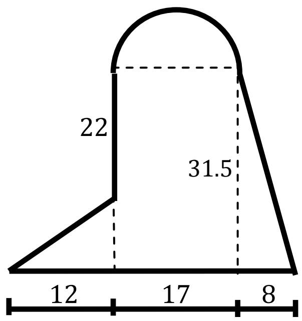
Respuesta: La superficie recubierta por el mármol es 34.557 m^2.

EJERCICIOS 4.2

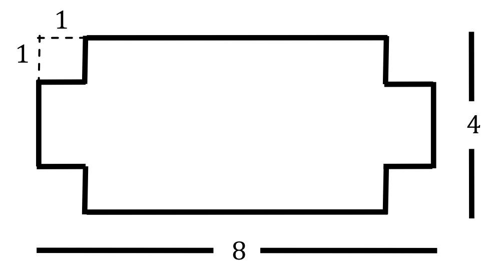
1) Calcular los perímetros de los triángulos según los casos siguientes:
   a) La mitad de la longitud de la base del triángulo isósceles es 3.5 cm y su área es de 63 cm^2.
   b) Un triángulo rectángulo con un cateto que mide 3m, y su área es $12m^2$.

2) Calcular el área y el perímetro de las siguientes figuras.

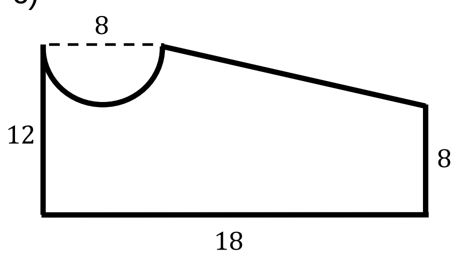
a)



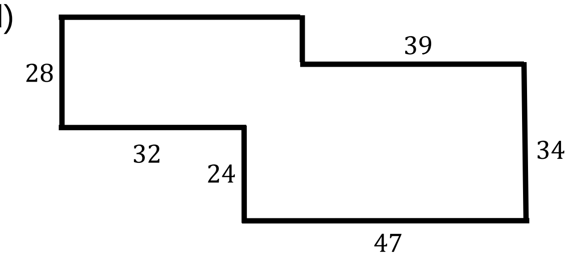
b)



c)



d)



3) Hallar el área de un triángulo rectángulo isósceles donde cada cateto mide 10 cm.

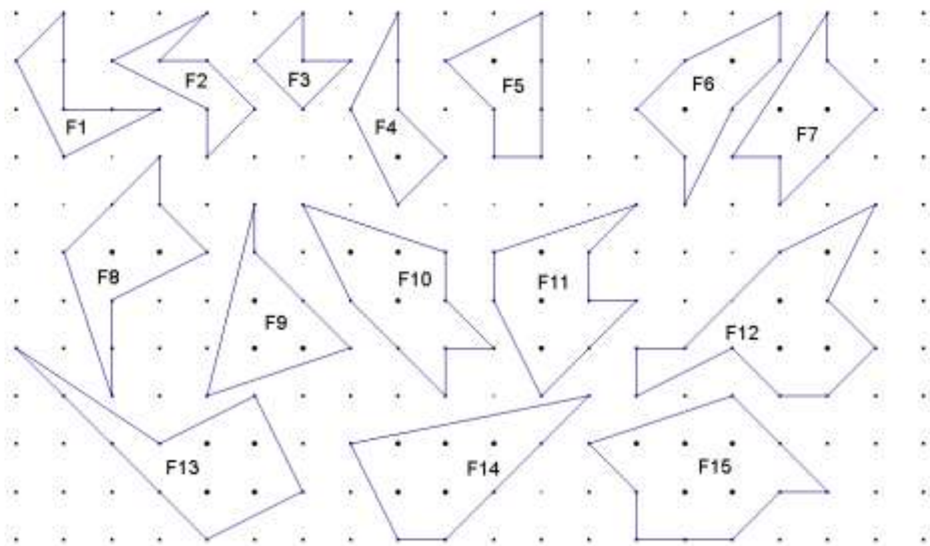
4) El área de un trapecio es 120 m^2, la altura 8 m, y la base menor mide 10 m. ¿Cuánto mide la otra base?

5) El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m, respectivamente. Calcular la longitud de los lados no paralelos y el área.

6) Si los lados no paralelos de un trapecio isósceles se prolongan, quedaría formado un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Sabiendo que el trapecio tiene la mitad de la altura del triángulo, calcular el área del trapecio.

7) Dado el cuadrado ABCD de 4 m de lado, se une E, punto medio del segmento BC, con el vértice D. Calcular el área del trapecio formado.

8) En la siguiente retícula, la distancia de dos puntos consecutivos tanto horizontal como vertical es de 1 unidad, calcula el área de cada una de las siguientes figuras y completar la tabla:



	Puntos en el contorno	Puntos interiores	ÁREA
F1			
F2			
F3			
F4			
F5			
F6			
F7			
F8			
F9			
F10			
F11			
F12			
F13			
F14			
F15			
F16	14	6	
F17	20	9	

Fn	C	I	Área =

Si el resultado es correcto, esta fórmula se le conoce como la fórmula de Pick.

9) Los catetos de un triángulo inscrito en una semicircunferencia miden 22.2 cm y 29.6 cm, respectivamente. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

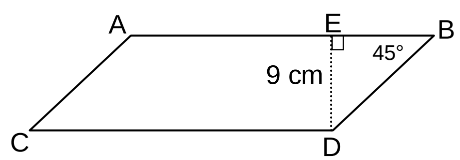
10) Sabiendo que el área de un triángulo con lados 3 y 4 es 6 u^2, hallar la longitud del tercer lado. ¿Qué tipo de triángulo es según sus ángulos?

11) ¿Cuánto es la diferencia entre las áreas de una circunferencia de 12 m de diámetro y otra de 8 m de radio?

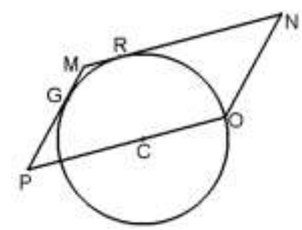
12) Si el área de una circunferencia es 6.25π cm². ¿Cuál es la medida de su radio?

13) Calcular la altura de un triángulo sabiendo que uno de sus lados mide 8 cm, la base mide el triple de ese lado y el área es 15 veces ese mismo lado.

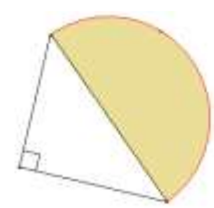
14) Calcular el área del paralelogramo ABCD, con AE = 17.



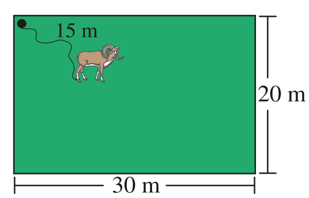
15) Calcular el área del paralelogramo MNOP, si se sabe que su perímetro es 30 cm, CO = 4 cm y ON = 5 cm. C es el centro del círculo, R y G son puntos de tangencia.



16) El cateto del triángulo rectángulo isósceles es 9 cm.
La parte sombreada es una semicircunferencia.
Calcular el perímetro de la figura sombreada

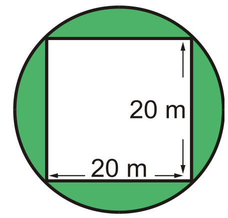


17) Se ha atado una cabra con una cuerda de 15 m de longitud en una de las esquinas de un prado rectangular de 20 x 30 m.



Calcular la superficie del prado en el que puede pastar la cabra y la superficie del prado en la que no puede pastar.

18) Se ha construido una pista de patinaje cuadrada sobre un terreno circular, como indica la figura. El resto del terreno se ha sembrado de césped. Calcular: a) La superficie del terreno. b) La superficie de la pista. c) La superficie que queda con césped.

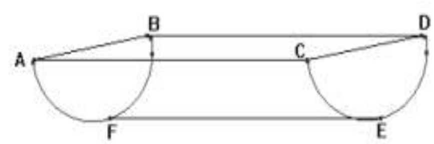


19) La torre de una antigua fortificación es de planta hexagonal. Se ha medido el área de la planta inferior obteniéndose un resultado de 166.27 m^2. Si cada una de sus paredes mide 8 m de anchura, ¿cuánto mide la apotema de la planta de dicha torre?

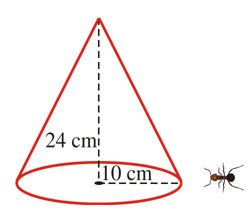
20) Una empresa fabrica sombrillas para la playa. Para ello, usa tela cortada en forma de polígono regular. Calcular la cantidad de tela que necesitará para fabricar 36 sombrillas de 10 lados, cuyo lado debe medir 173 cm y su apotema 266.21 cm.

21) Un salón de baile tiene forma de hexágono regular con perímetro de 48 m y apotema de 4.8 m ¿Cuántos metros cuadrados mide el salón?

22) En un rancho el agua se le coloca a los animales en una pieza como se muestra en la figura. Calcular el área del rectángulo ABCD sabiendo que el área de la semicircunferencia ABF es de 789.25 cm^2, el largo FE es de 42 cm y AB $\perp$ AC.



23) Un cucurucho tiene forma de cono. El radio de la base del cono mide 10 cm y la altura 24 cm. ¿Cuál es la mínima distancia que ha de recorrer una hormiga para subir desde el suelo hasta el pico del cucurucho?



24) El área de una moneda octagonal es de 6 cm^2 y su apotema mide 1.5 cm, ¿cuánto mide el lado de la moneda octagonal?

25) Determina el área que recorren cada una de las manecillas de un reloj, en un giro completo, si la manecilla que marca las horas mide 10 cm, el minutero tiene 14 cm de largo y el segundero mide 16 cm.

26) En un cuadrado de papel terciopelo de 40 cm de lado, Mireya trazó el círculo más grande que pudo y lo recortó. ¿Cuánto terciopelo no usó? (Sugerencia: determina el área de papel no utilizada)

27) La rueda de una máquina aplanadora mide 1.70 m de diámetro y 2 m de ancho, ¿cuál es el área de aplanado por vuelta de rueda?

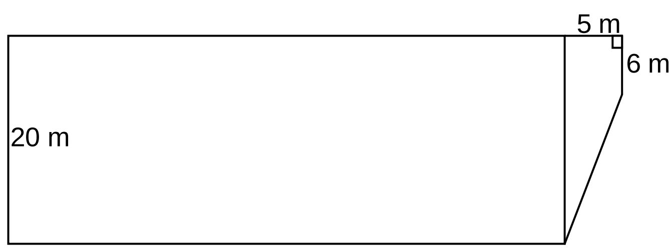
28) Calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

29) Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18.84 m.

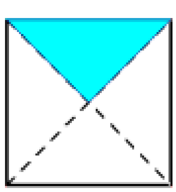
30) ¿Cuántos metros recorre la rueda de una bicicleta, si el diámetro de cada rueda mide 75 cm?

31) El diámetro de la glorieta de los Insurgentes mide aproximadamente 120 metros de diámetro, se desea colocar a su alrededor una serie de focos de colores separados por 50 cm. ¿Cuántos focos se necesitan para lograrlo?

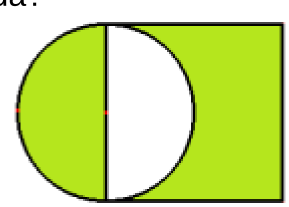
32) Una alberca tiene un área total de 765 m^2 y está formada por un rectángulo para los adultos y un trapecio para los niños como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de cada zona de la alberca? ¿Cuál es la longitud de la zona para adultos?



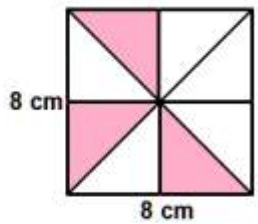
33) ¿Qué tanto por ciento del área del cuadrado es la parte sombreada?



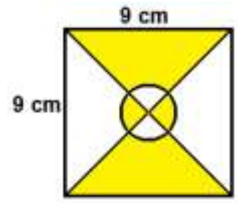
34) Si el lado del cuadrado mide 5 cm, ¿cuánto mide el área de la región sombreada?



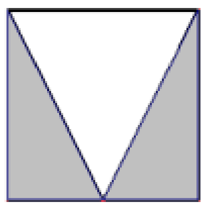
35) Hallar la región sombreada.



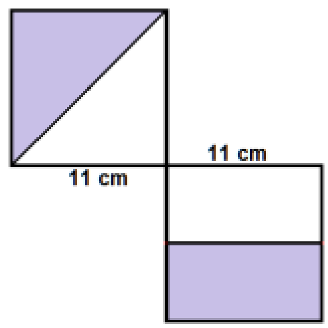
36) Hallar la región sombreada.



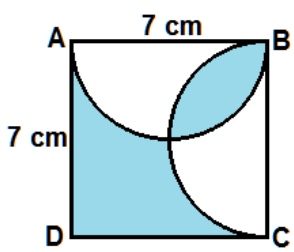
37) Si el área del cuadrado mide 49 cm^2, hallar la región sombreada.



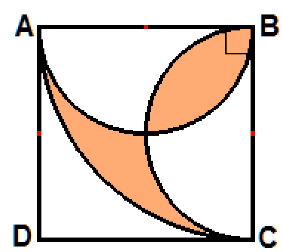
38) Hallar el área de la región sombreada, si se tienen dos cuadrados congruentes.



39) Hallar el área de la región sombreada, si AB y BC son diámetros.



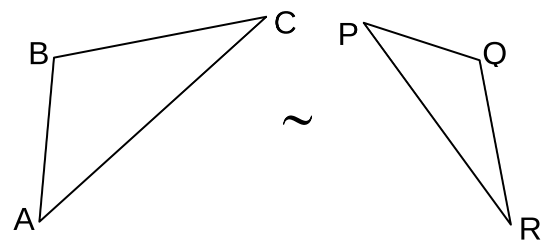
40) Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 10 cm, además, AB y BC son diámetros.



4.3 RAZÓN ENTRE PERÍMETROS Y ENTRE ÁREAS DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Suponiendo que los triángulos ΔABC y ΔPQR son semejantes y la razón de semejanza es r, entonces:

$$r=\frac{\text{AB}}{\text{PQ}}=\frac{\text{BC}}{\text{QR}}=\frac{\text{CA}}{\text{RP}}=\frac{\text{AB}+\text{BC}+\text{CA}}{\text{PQ}+\text{QR}+\text{RP}}=\frac{Perímetro\ \Delta\text{ABC}}{Perímetro\ \Delta\text{PQR}}$$



Conclusión: La razón de los perímetros de los triángulos semejantes es igual a su razón de semejanza.

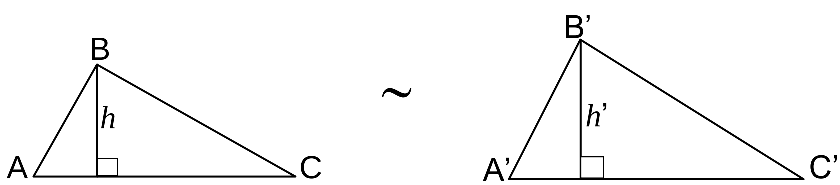
EJEMPLO. Los perímetros de dos triángulos semejantes son 40 y 104 cm ¿cuál es la razón de un par de lados homólogos?

Solución:
La razón de un par de lados homólogos = razón entre sus perímetros.

Entonces, $\frac{40}{104}=\frac{5}{13}$

Respuesta: La razón de un par de lados homólogos es $\frac{5}{13}$.

Cuando dos triángulos son semejantes la razón de sus alturas es igual a la razón de semejanza r, es decir, en la siguiente figura: $\frac{h}{h'}=r$



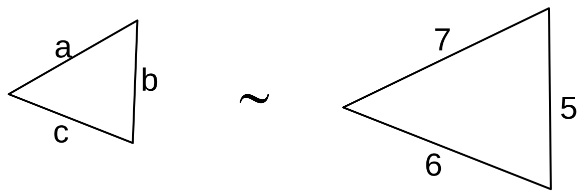
Área de ΔABC = $\frac{\overline{\text{AC}}\,h}{2}$ y Área de ΔA’B’C’ = $\frac{\overline{\text{A'C'}}\,h'}{2}$

Haciendo el cociente: $$\frac{\frac{\overline{\text{AC}}\,h}{2}}{\frac{\overline{\text{A'C'}}\,h'}{2}}=\frac{2\,\overline{\text{AC}}\,h}{2\,\overline{\text{A'C'}}\,h'}=\frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{A'C'}}}\cdot\frac{h}{h'}=r\bullet r=r^2$$

Conclusión: La razón de las áreas de los triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

En esta parte, se puede sugerir el siguiente video para reforzar estas propiedades: https://www.youtube.com/watch?v=mFFnbaJt2B0

EJEMPLO. Si dos triángulos son semejantes con la razón entre sus áreas del primero respecto del segundo es 4/7. Hallar la medida de cada lado del primer triángulo.



Solución:
La razón de un par de lados homólogos = $\sqrt{\text{razón entre sus áreas}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$
Entonces:

$\frac{a}{7} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, despejando **a** = $\frac{14}{\sqrt{7}} \approx 5.2915$

$\frac{b}{5} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, despejando **b** = $\frac{10}{\sqrt{7}} \approx 3.7796$

$\frac{c}{6} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, despejando **c** = $\frac{12}{\sqrt{7}} \approx 4.5355$

Respuesta: a = 5.2915, b = 3.7796 y c = 4.5355.

EJERCICIOS 4.3

1) Los perímetros de dos triángulos semejantes son 28 y 105 cm ¿cuál es la razón de un par de lados homólogos?

2) Los lados de un triángulo miden 8,12 y 16 cm. Calcula los lados de otro triángulo semejante al dado sabiendo que su perímetro es de 108 cm.

3) Los lados de un triángulo tienen longitudes de 18, 21 y 31 cm. Un triángulo semejante tiene un perímetro de 48 cm ¿cuáles son las longitudes de los lados de este triángulo?

4) Un lado de un triángulo tiene 4 veces el largo del lado correspondiente de uno semejante. El perímetro del triángulo menor es 18 m. ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo mayor?

5) Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 4,5 cm. El perímetro de otro triángulo semejante es 23. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto miden los lados del segundo triángulo?

6) El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo mayor y el menor?

7) La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm^2, ¿cuál es el área del menor?

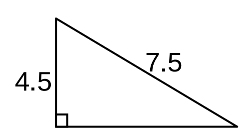
8) Dos triángulos semejantes tienen una superficie de 25 cm^2 y 35 cm^2, respectivamente. Determina la razón de semejanza de los dos triángulos.

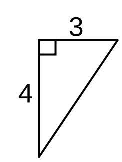
9) Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2, ¿cuál es el área del segundo?

10) El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m. Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

11) Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m^2 y 108 m^2. Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?

12) Considerando los siguientes triángulos.





a) Determinar si los triángulos son semejantes.
b) En caso de ser semejantes, hallar la razón de semejanza del primero respecto del segundo; y la razón entre sus áreas.
c) Sea T un tercer triángulo semejante a los dos triángulos dados, tal que la razón entre las áreas del primero respecto del tercero es 4/9. Hallar la medida de cada lado del tercer triángulo.

13) Sean T1 y T2 dos triángulos semejantes tal que la razón de semejanza de T1 y T2 es 2:3.
a) Si el perímetro de T1 es 18 cm, hallar el perímetro de T2.
b) Si el área de T2 es 48 cm^2, hallar el área de T1.

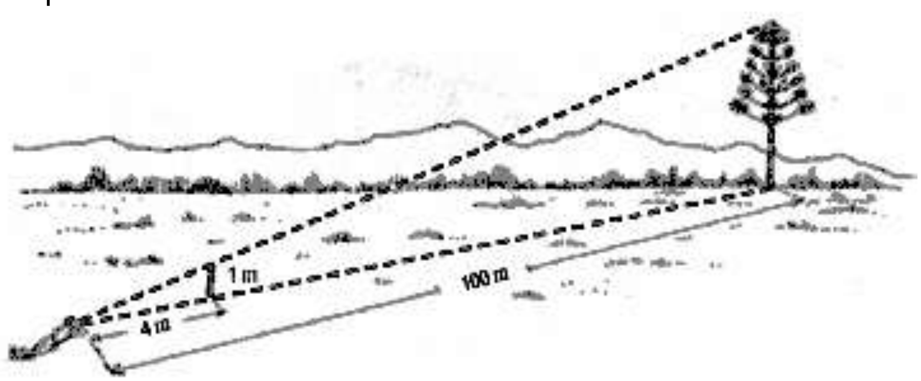
14) Un rectángulo tiene una diagonal de 75 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 m y 48 m.

15) Las áreas de dos triángulos semejantes tienen como medida 196 cm^2 y 36 cm^2. Determina la altura del triángulo de menor área cuando la altura correspondiente del triángulo de área mayor es de 14 cm.

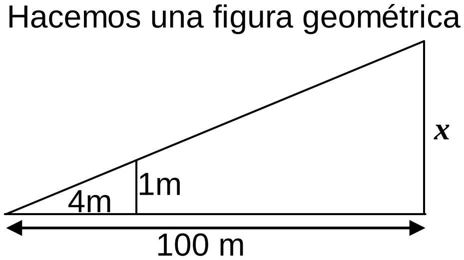
16) Si el área de dos triángulos equiláteros es 5 cm^2 y 25 cm^2, respectivamente. ¿Son semejantes? ¿Por qué? En caso afirmativo calcula la razón de semejanza.

4.4 PROBLEMAS DE LONGITUDES Y ÁREAS QUE INVOLUCREN SEMEJANZA, CONGRUENCIA Y TEOREMA DE PITÁGORAS.

PROBLEMA 1. Calcular la altura del árbol con los datos de la figura, suponiendo que la vara de 1 m es paralela al árbol.



Solución:
Hacemos una figura geométrica de la situación:

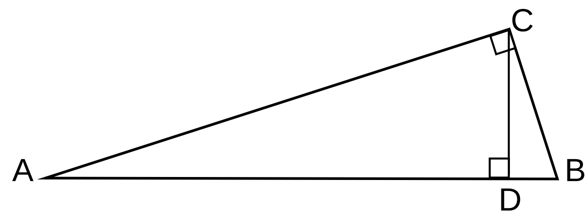


Como la vara de 1 m es paralela al árbol, en la figura tenemos dos triángulos semejantes. Entonces, sus lados homólogos son proporcionales y se cumple:

$$\frac{x}{1} = \frac{100}{4}, \text{ es decir, } x = \frac{100}{4} = 25$$

Respuesta: La altura del árbol es de 25 metros.

PROBLEMA 2. El triángulo rectángulo ABC, como se muestra en la siguiente figura, está dividido en dos triángulos rectángulos de áreas 90 y 10 cm^2, respectivamente, ¿cuáles son las medidas del triángulo ABC?



Solución:

Al ser triángulos rectángulos y CD altura, $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$

Entonces, se cumple que $\dfrac{\text{Área } \Delta ACD}{\text{Área } \Delta CBD} = \dfrac{90}{10} = 9.$

De esto, la razón de semejanza entre los triángulos es $r = \sqrt{9} = 3$

Usando esta razón, como $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ sus hipotenusas son proporcionales, es decir, se cumple que $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 3$. De esto se deduce que $\overline{AC} = 3\overline{BC}$

Por otro lado: $\text{Área } \Delta ABC = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = 100 \text{ cm}^2$, entonces $\overline{AC} \times \overline{BC} = 200$

Sustituyendo el valor de $\overline{AC}$ tenemos $3\overline{BC} \times \overline{BC} = 200$, así, $(\overline{BC})^2 = \dfrac{200}{3}$

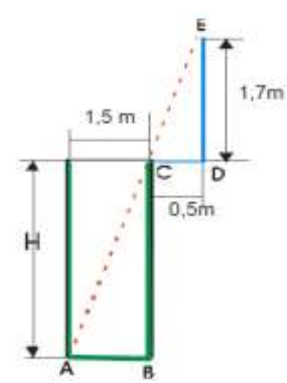
De esto, $\overline{BC} = \sqrt{\dfrac{200}{3}} = 10\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, al sustituir este valor en $\overline{AC}$, $\overline{AC} = 3\overline{BC} = 30\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el ΔABC:

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 = \left(30\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \frac{200}{3} = 900\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{200}{3} = \frac{2000}{3}$$

Finalmente, $\overline{AB} = \sqrt{\dfrac{2000}{3}} = \dfrac{20\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

Respuesta: $\overline{BC} = 10\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm, $\overline{AC} = 30\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm y $\overline{AB} = 20\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ cm.



PROBLEMA 3. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su diámetro es de 1.5 m y alejándonos 0.5 m del borde, desde una altura de 1.7 m, vemos que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

Solución:

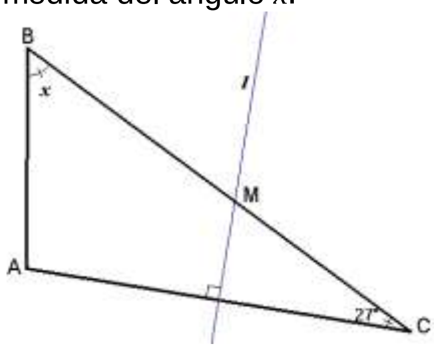
Los triángulos ABC y CDE son semejantes ya que los segmentos

BC y DE son paralelos por ser perpendiculares al suelo, por lo tanto los lados tienen que ser proporcionales.

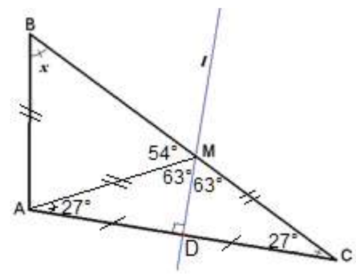
Es decir: $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$. Al sustituir los datos se tiene: $\frac{\overline{BC}}{1.7} = \frac{1.5}{0.5}$, despejando $\overline{BC} = 5.1$

Respuesta: La profundidad del pozo es de 5.1 metros.

PROBLEMA 4. En el triángulo ABC, l es mediatriz del lado AC, AB = MC, encontrar la medida del ángulo x.



Solución: Trazamos el segmento AM y se obtienen dos triángulos congruentes ∆AMD y ∆MDC. (¿Porqué?)



Entonces, se cumple que: AM = MC, AD = DC

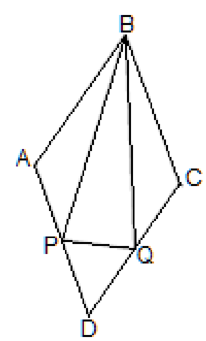
∠MAD = 27° y ∠AMD = 63° ya que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es de 180°.

Además, ∠AMB + ∠AMD + ∠DMC = 180°, entonces ∠AMB = 54°.

Por hipótesis AB = MC, pero MC = AM, entonces AB = AM.

Es decir, el ∆ABM es isósceles con ∠AMB = ∠x, entonces ∠x = 54°.

Respuesta: ∠x = 54°.



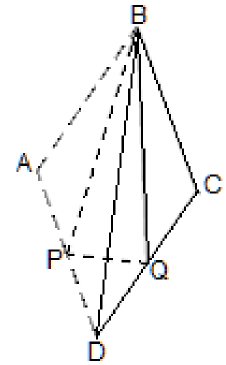
PROBLEMA 5. Calcular el área del ∆BPQ en la siguiente figura. Si ABCD es un rombo de área 8 cm^2. Con P y Q puntos medios de los lados AD y DC, respectivamente.

Solución:

Recuerda las propiedades de un rombo, sus cuatro lados son iguales y sus ángulos opuestos también son iguales.

Es fácil mostrar que ∆ABP es congruente al ∆CBQ, entonces sus áreas

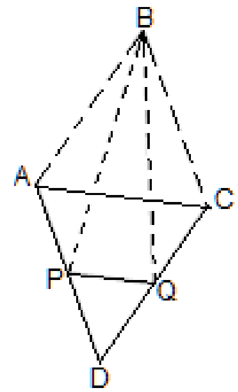
Por un lado: Al ser Q punto medio de DC, QC = $\frac{DC}{2}$



Como ΔBCD y ΔBCQ tienen la misma altura, entonces el área del ΔBCD = 2(área ΔBCQ)

Pero al ser BD diagonal del rombo, área ΔBCD = $\frac{\text{área ABCD}}{2}$ = 8 m^2.

Entonces 2(área ΔBCQ) = 8, pero, como ΔABP es congruente al ΔCBQ, podemos afirmar que: área ΔABP + área ΔCBQ = 8.
De tal forma que área ΔBPQ + área ΔPQD = 8 m^2.



Por otro lado: Al trazar la diagonal AC, el ΔPQD es semejante al ΔACD y su razón de semejanza es ½, ¿porqué?

Entonces, $\frac{\text{área}\,\Delta\text{PQD}}{\text{área}\,\Delta\text{ACD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, de esto se deduce que el área del

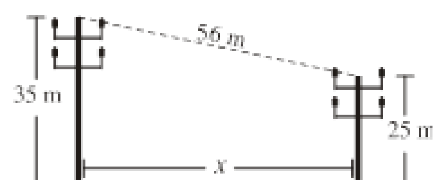
ΔPQD = $\frac{\text{área}\,\Delta\text{ACD}}{4}$ y como AC es diagonal del rombo, el área del

ΔACD = $\frac{\text{área ABCD}}{2}$ = 8 m^2.

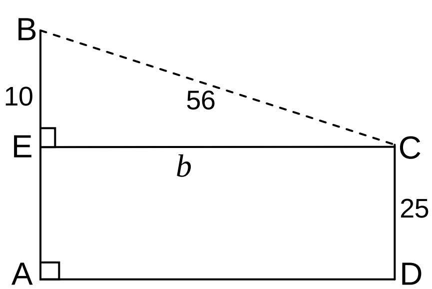
Por lo tanto, área ΔPQD = $\frac{8}{4}$ = 2 m^2, entonces área ΔBPQ = 6 m^2.

Respuesta: área ΔBPQ = 6 m^2

PROBLEMA 6. Se ha tendido un cable de 56 m de longitud uniendo los extremos de dos torres metálicas cuyas alturas son 25 m y 35 m, respectivamente. ¿Qué distancia separa los pies de ambas torres?



Solución:



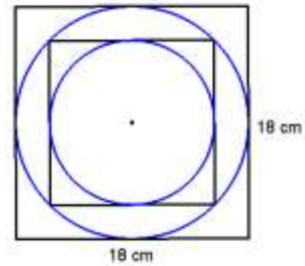
Trazamos una figura geométrica que represente los postes, el suelo y los cables con las medidas dadas, le asignamos nombres a los vértices del trapecio resultante ya que se supone que los postes son perpendiculares al suelo.
Trazamos un segmento paralelo a AD que pase por C, se llamará CE.

Y se forma el triángulo rectángulo BCE, con las medidas de la figura. Aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene: $56^2 = 10^2 + b^2$

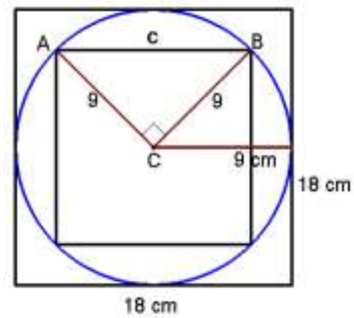
Donde $b = \sqrt{56^2 - 10^2} = \sqrt{3036} = 55.099$

Respuesta: La distancia que separa los pies de ambas torres es de 55.099 metros.

PROBLEMA 7. En un cuadrado de 18 cm de lado se inscribe un círculo y en este círculo un cuadrado y en este segundo cuadrado otro círculo. Hallar el área comprendida entre el último cuadrado y el último círculo.



Solución:
Trazando un dibujo siguiendo el enunciado del problema, podemos deducir que el radio del primer círculo es 9 cm, ya que es la mitad del lado del primer cuadrado.
La medida del lado del segundo cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles que se forma al trazar los radios AC y BC.
Aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos:

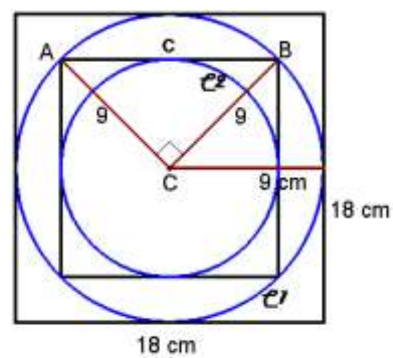


$$c^2 = 9^2 + 9^2 = 81 + 81 = 162$$
$$c = \sqrt{162}$$

Entonces, el área del segundo cuadrado es $(\sqrt{162})^2 = 162$ cm^2.

Por otro lado, el radio del segundo círculo, será la mitad del lado de esté 2º cuadrado, es decir, su radio es $\frac{\sqrt{162}}{2}$.
De tal forma que el área del segundo círculo es:

$$\pi\left(\frac{\sqrt{162}}{2}\right)^2 = \frac{162\pi}{4}\text{cm}^2$$

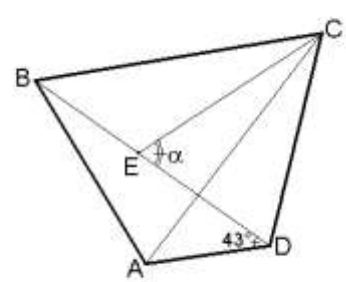


Finalmente, el área comprendida entre el 2º cuadrado y el 2º círculo es:

$$162 - \frac{162\pi}{4} = \frac{648 - 162\pi}{4} = 34.765 \text{ cm}^2$$

Respuesta: El área comprendida entre el cuadrado y el círculo es 34.765 cm^2

PROBLEMA 8. En la siguiente figura $\overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{EC} = \overline{CD}$ y $\overline{BE} = \overline{AD}$ y $\angle ADB = 43°$, encontrar el valor del $\angle\alpha$.



Solución:

- Por un lado, el ΔECD es isósceles ya que $\overline{EC} = \overline{CD}$, entonces $\angle CDE = \alpha$.

- Por otro lado, nos fijamos en los triángulos ΔBCE y ΔACD, puedes mostrar que son congruentes por el criterio lado-lado-lado. Al ser congruentes, sus ángulos homólogos son iguales, es decir, $\angle ADC = \angle BEC$.

Pero $\angle ADC = 43° + \angle\alpha$, entonces $\angle BEC = 43° + \angle\alpha$.

Cómo $\angle BEC + \angle\alpha = 180°$, sustituyendo $43° + \angle\alpha + \angle\alpha = 180°$

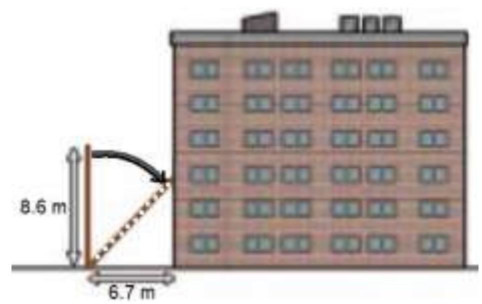
Es decir, $43° + 2\angle\alpha = 180°$, donde $\alpha = 68.5°$

Respuesta: $\angle\alpha = 68.5°$

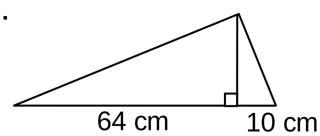
EJERCICIOS 4.4

1) Determinar el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de 12 cm de lado. ¿Serán iguales sus áreas?

2) Se cae un poste de 8.6 metros de altura sobre un edificio que se encuentra a 6.7 metros de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?



3) Calcular el área de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 64 y 10 cm.



4) Para calcular la altura de una farola, ponemos un palo vertical cerca y medimos la sombra del palo y de la farola. Hemos obtenido 0.75 y 6 m, respectivamente. Si el palo mide 1 m. ¿Cuánto mide la farola?

5) La sombra de un rascacielos en un determinado momento del día mide 19.2 m. Si en el mismo instante y lugar, la sombra de un semáforo de 2.5 m de altura mide 1.5 m ¿Cuál es la altura del rascacielos? Suponer que ambos son perpendiculares al suelo.

6) Una hectárea es el área de un cuadrado de 100 m de lado, y se denota 1 ha. Si un campo rectangular de 250 ha está atravesado diagonalmente por un río. De un lado del río, se siembra 2/5 del terreno con maíz. Del otro margen del río, se siembra una tercera parte del terreno con girasol. El resto se destina al pastoreo.

a) ¿Cuantas hectáreas se destinan al pastoreo?

b) Si se cosechan 335040 kg de maíz, ¿cuál es el rendimiento promedio por hectárea?

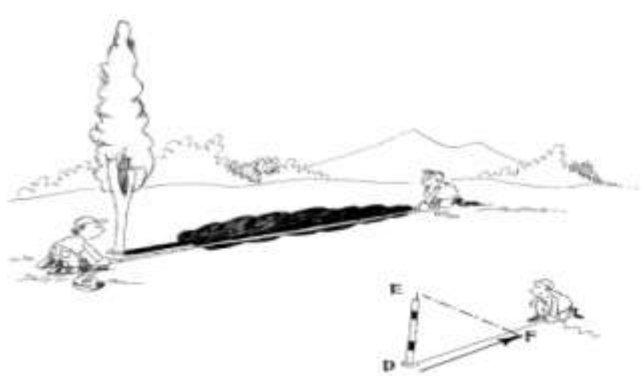
7) En un incendio de un hospital acudió una unidad de bomberos con una escalera de 32 m de longitud, que consta de 80 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo.

a) ¿Qué altura del edificio alcanzará la escalera?

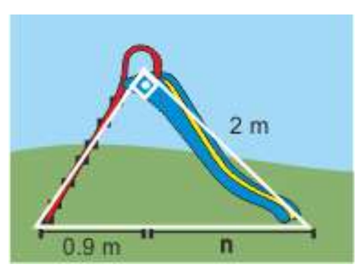
b) Si el fuego se encuentra en el 5º piso, y cada piso tiene 4.5 m de altura, ¿podrán ser rescatados los enfermos que allí se encuentren?

c) Puesto que las llamas ascienden, ¿es posible con dicha escalera evacuar los 7 pisos de que consta el hospital?

8) Cuenta la historia que el gran matemático griego Tales de Mileto midió la altura de las pirámides de Egipto usando un método muy simple: comparó la sombra de su bastón con la sombra de la pirámide. Las personas del dibujo intentan usar el mismo método para medir la altura del árbol. Si el palo $\overline{ED}$ mide 2 m y su sombra $\overline{DF}$ mide 3m, ¿cuál será la altura del árbol si al medir su sombra obtenemos 18 m?



9) Observa el tobogán en el que juegan Lucía y Marcos.

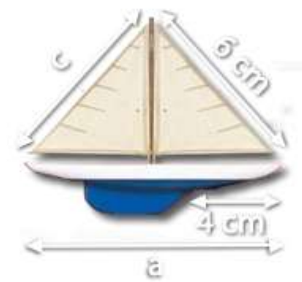


a) Calcula la medida del lado n.

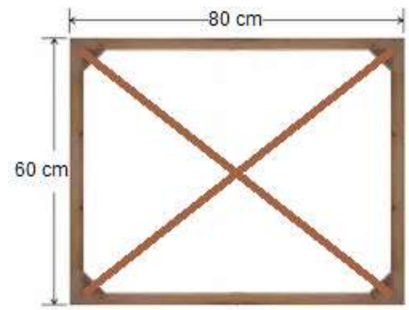
b) ¿Cuál es la altura del tobogán?

10) Una maqueta de barco usa dos cablecitos para tensar el mástil mayor, debiendo quedar como muestra la figura.

a) Calcular la distancia a la que debemos colocar el cable c.
b) ¿Cuál debe ser la longitud de dicho cable?
c) ¿Cuál es la altura del mástil?



11) Una industria construye bastidores para colocar telas para pintura de 80 por 60 cm. Para reforzarlos se utilizan dos varillas de pino que se colocan en las diagonales. Las varillas se obtienen cortando tirantes de pino que miden 10m de largo. ¿De cada tirante pueden obtenerse refuerzos para cuántos bastidores?

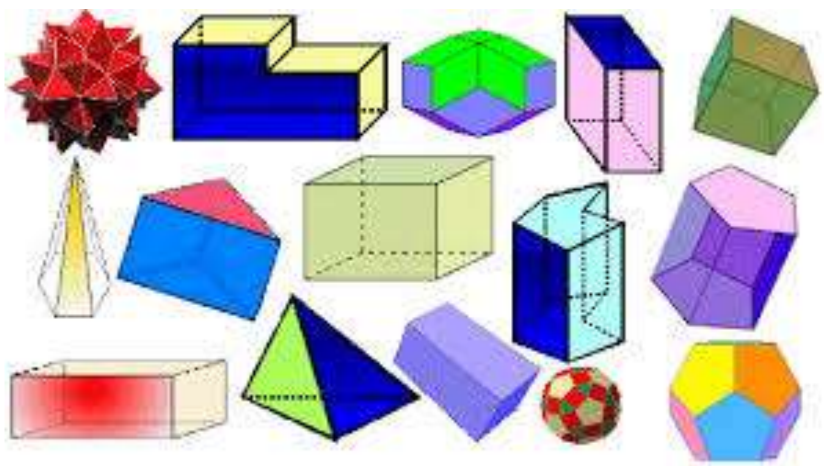


12) Un ciclista recorre en línea recta 6 km hacia el Este, 2 km hacia el Norte, 3 km hacia el Este y 5 km hacia el Norte, finalizando ahí su recorrido. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

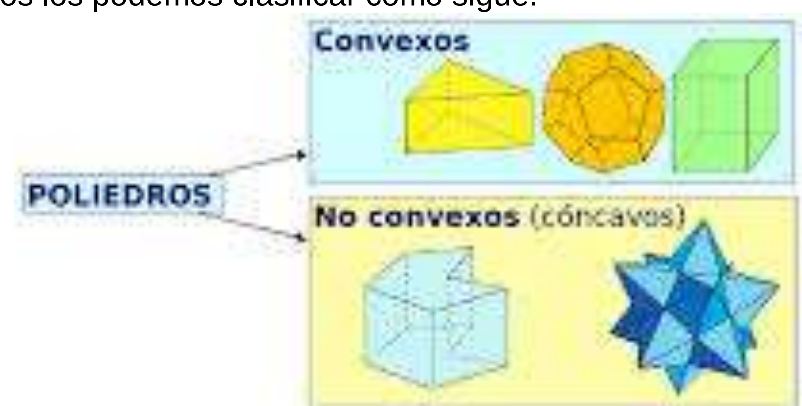
13) En un cuadrado se traza una perpendicular a uno de los lados que pase por el punto de intersección de las diagonales. La longitud del segmento que va desde este punto al pie de la perpendicular trazada es de 7cm. Determinar el área del cuadrado.

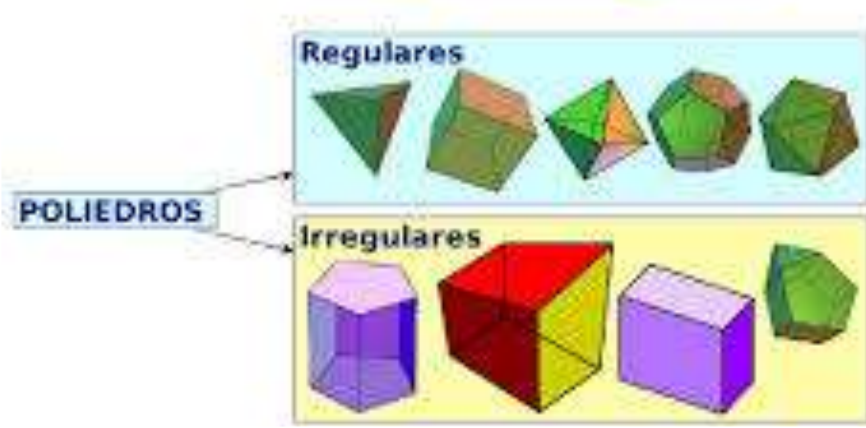
4.5 PROBLEMAS QUE INVOLUCREN ÁREAS Y VOLÚMENES DE PRISMAS, CILINDROS RECTOS Y CONOS RECTOS, DONDE SEA NECESARIO APLICAR CONOCIMIENTOS DE CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS.

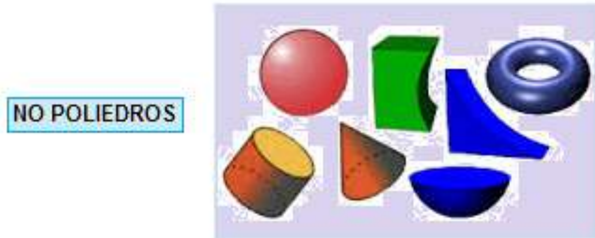
Por lo general, en nuestro entorno siempre observamos formas en tres dimensiones: largo, ancho y altura. Muchas de ellas están formadas por lados planos, a este tipo de cuerpos se les llama poliedros, por ejemplo:



A los poliedros los podemos clasificar como sigue:







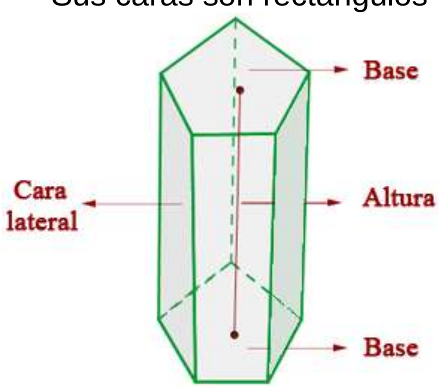
En nuestro estudio, abordaremos algunos poliedros regulares y otros irregulares, así como son el cilindro y el cono (no poliedros).

Los poliedros regulares también son conocidos como los “Sólidos Platónicos”, su característica principal es que sus caras son polígonos regulares congruentes. Estos son cinco: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

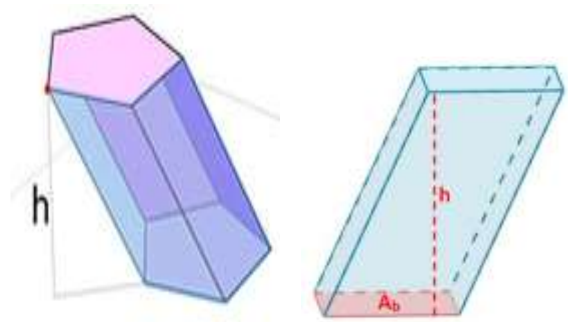
i) Área y Volumen de Prismas.

Los prismas son poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales llamadas bases y sus caras laterales son paralelogramos.

PRISMA RECTO
Sus caras son rectángulos



PRISMAS OBLICUOS
Sus caras son romboides



Si la base del prisma es un triángulo, el prisma se llamará **triangular**; si es un cuadrado, se llamará **cuadrangular**, etc.

En el subtema 4.1.5 vimos las partes y el volumen de un prisma recto, estos resultados son válidos para cualquier prisma, es decir:

Área de un prisma: es la suma del área de las dos bases más el área de los paralelogramos de las caras laterales.
Volumen de un prisma: es el producto del área de la base (A_b) por la altura del prisma (h).

PROBLEMA 1. ¿Cuál será la altura de un prisma donde el área de su base es de 300 cm^2 y su volumen 2400 cm^3?

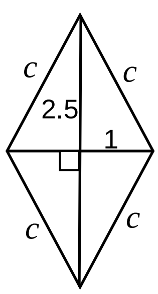
Solución:
El volumen de un prisma es $A_b h = 2400$. Sustituyendo el valor del área y despejando h, se tiene:

$$300h = 2400$$
$$h = \frac{2400}{300}$$
$$h = 8$$

Respuesta: La altura del prisma es de 8 cm.

PROBLEMA 2. Un acuario desea fabricar un tanque en forma de prisma recto con base un rombo. Quiere que el tanque tenga una altura de 2.5 metros, y las diagonales de su base midan 2 m una y 5 m la otra.
a) ¿Qué cantidad de láminas de vidrio se deben comprar para construirlo?
b) ¿Con cuántos litros de agua se llenará el tanque?

Solución:
a) Si la base es un rombo con diagonales 2 y 5 m, su forma y medidas son como sigue:



Calculemos su área.
Las diagonales en un rombo lo dividen en cuatro triángulos rectángulos congruentes, cuatro veces el área de un triángulo será el área del rombo.
Área del triángulo = 1(2.5)/2 = 1.25 m^2
Área del rombo = 4(1.25) = 5 m^2 es la base del prisma.
Por otro lado, necesitamos la medida del lado del rombo para calcular las áreas de las caras laterales.

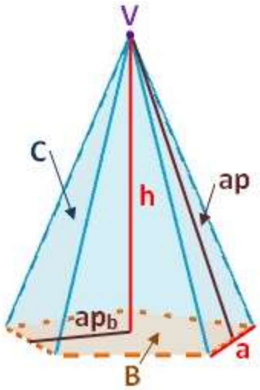
Por el teorema de Pitágoras: $c^2 = 1^2 + (2.5)^2$, entonces $c = \sqrt{7.25}$
Las cuatro caras laterales son rectángulos congruentes, y su área es $2.5\sqrt{7.25}\,m^2$.
Área total del prisma rómbico = $2(5) + 4(2.5\sqrt{7.25}) = 10 + 10\sqrt{7.25} \approx 36.9\ m^2$

b) El volumen del prisma = $A_b h = 5(2.5) = 12.5\ m^3$.
Como 1000 cm^3 = 1 litro, entonces 1 m^3 = 1000 litros.
Concluimos que 12.5 m^3 = 12500 litros.

Respuesta: a) Deben comprar 36.9 m^2 de láminas de vidrio.
b) El tanque se llenará con 12500 litros de agua.

ii) Área y Volumen de pirámides.

Una **pirámide** es un poliedro cuya superficie está formada por una base que es un polígono cualquiera y caras laterales triangulares que confluyen en un punto que se denomina vértice de la pirámide.

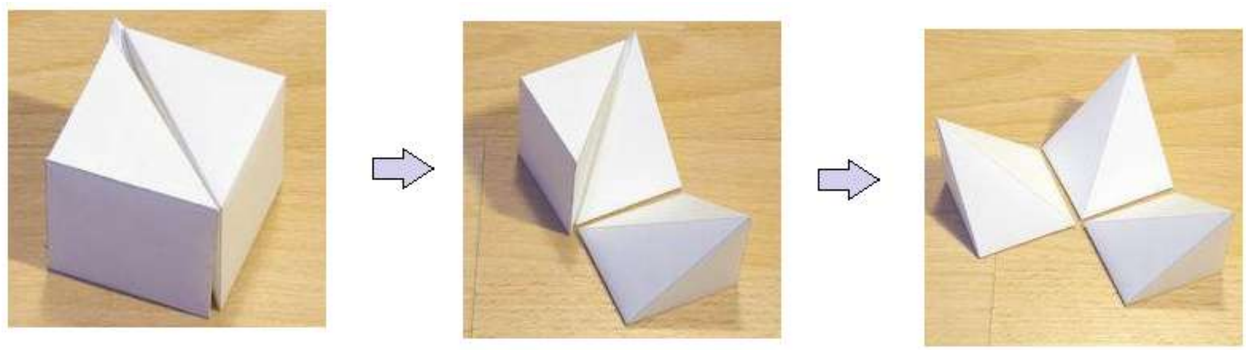


En una pirámide se pueden diferenciar los siguientes elementos:

- **Base** (*B*): polígono cualquiera. Es la única cara que no toca al vértice de la pirámide.
- **Caras** (*C*): los triángulos de los laterales y la base.
- **Aristas** (*a*): segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide. Podemos distinguir: aristas laterales, que son las que llegan al vértice (o ápice) y aristas básicas, que están en la base.
- **Vértice de la pirámide** (V): punto donde confluyen las caras laterales triangulares. También se llama ápice.
- **Altura** (h): segmento perpendicular que va del vértice de la pirámide al centro de la base.
- **Apotema de la pirámide** (*ap*): distancia del vértice a un lado de la base. En el caso de las pirámides regulares las caras laterales son triángulos isósceles, y la apotema de la pirámide es también la altura de las caras laterales.

Para calcular el área total de una pirámide, debemos conocer el área de su base y la de sus caras, ya que: Área total (A_T) = Área de la base (A_B) + Área lateral (A_L)

ACTIVIDAD: El cubo es un prisma, y este lo podemos formar con tres pirámides congruentes. Esta es una forma heurística de mostrar que el volumen de cada pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del cubo.

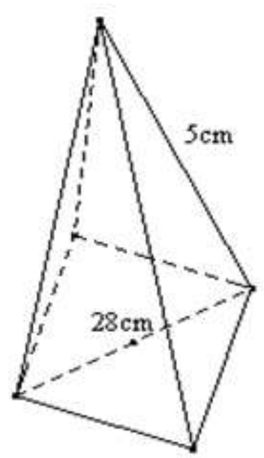


En la siguiente página se encuentra la forma de construir cada pirámide.
http://www.korthalsaltes.com/pdf/three_pyramids_in_one_cube.pdf

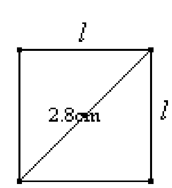
En general, el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura de la pirámide: $V = \frac{1}{3} A_b h$

PROBLEMA 1. Encuentra el área total y el volumen de una pirámide cuadrangular regular, sabiendo que la diagonal de la base mide 2.8 cm y la arista lateral mide 5 cm.

Solución:
Tenemos una pirámide de base cuadrada como en la figura, y para calcular las áreas necesitamos saber lo que mide cada lado del cuadrado, ya que son las bases de los triángulos de las caras laterales. También necesitamos conocer su apotema o la altura de los triángulos isósceles los cuales son congruentes.



Como la base es un cuadrado, de diagonal 2.8 cm, se puede calcular el valor del lado l utilizando el Teorema de Pitágoras.

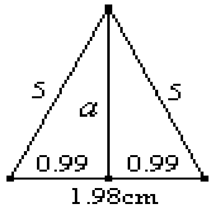


$$l^2 + l^2 = (2.8)^2$$
$$2l^2 = (2.8)^2$$
$$l^2 = \frac{(2.8)^2}{2}$$
$$l = \sqrt{\frac{(2.8)^2}{2}} \approx 1.9798 \approx 1.98 \text{ cm}$$

A_b = Área del cuadrado (base): $l^2 = \frac{(2.8)^2}{2} = 3.92 \text{ cm}^2$

Para encontrar cuánto mide el apotema de las caras laterales, dibujemos un triángulo isósceles con las medidas conocidas y apliquemos de nuevo el Teorema de Pitágoras.

$$5^2 = a^2 + 0.99^2$$



Así que, $a = \sqrt{25 - 0.99^2}$

$a = 4.9\ cm$

Por lo que el área de cada triángulo es: $\frac{1.98(4.9)}{2} = 4.85\ cm^2$

El área lateral (A_L) la forman 4 triángulos isósceles, entonces;

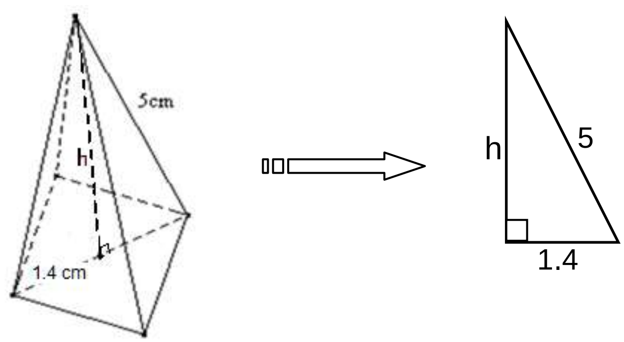
$$A_L = 4(4.85\ cm^2) = 19.4\ cm^2$$

El área total (A_T) = área lateral (A_L) + área de la base (A_B).

$$A_T = 19.4 + 3.92 = 23.32\ cm^2$$

Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}A_b h$, tenemos que encontrar la altura de la pirámide.

Trazamos un dibujo para facilitar el cálculo:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 5^2 – (1.4)^2$

h = $\sqrt{23.04}$ = 4.8

Altura de la pirámide 4.8 cm.

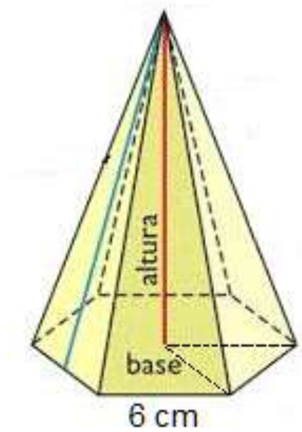
Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}(3.92)(4.8) = 6.272\ cm^3$

Respuesta: Área total = 23.32 cm^2, Volumen = 6.272 cm^3

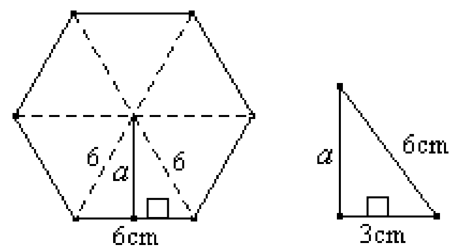
PROBLEMA 2. La base de una pirámide regular es un hexágono de 6 cm de lado. Calcula la altura de la pirámide sabiendo que su superficie lateral es el doble que la superficie de la base.

Solución:

Dibujemos una pirámide hexagonal, donde la arista de la base mide 6 cm, con este dato podemos calcular la superficie de la base o el área de la base que es un hexágono.



Conocemos la medida del lado del hexágono, podemos calcular su apotema, que viene siendo la altura de los triángulos equiláteros que se forman al dividir la base en triángulos.



¿Podrías decir por qué se forman triángulos equiláteros?

Utilizando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$6^2 = a^2 + 3^2, \text{ por lo que, } a = \sqrt{36-9} = \sqrt{27}$$

El área de un triángulo es: $\dfrac{\text{base(altura)}}{2} = \dfrac{6\sqrt{27}}{2} = 15.59\ \text{cm}^3$.

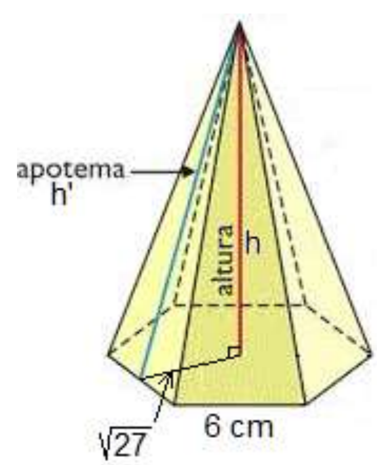
Como la base está formada por 6 triángulos congruentes, entonces el área de la base es: $A_B = 6(15.59) = 93.53\ \text{cm}^2$.

Nos dicen que la pirámide cumple una condición: la superficie lateral es el doble de la superficie de la base. Es decir, $A_L = 2\ A_B$, sustituyendo tenemos:

$$A_L = 2(93.53) = 187.06\ \text{cm}^2$$

Por otro lado, las caras laterales son 6 triángulos congruentes, así que el área de cada cara lateral es $A_c = A_L/6 = \dfrac{187.06}{6} \approx 31.18\ \text{cm}^2$.

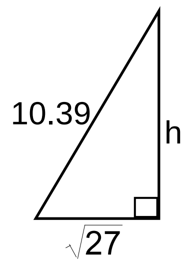
Para el cálculo de la **altura de la pirámide** necesitamos conocer la medida de la apotema (h’). Si observas la pirámide hexagonal (ver la figura), te darás cuenta que *h*’ es apotema de la pirámide, $a = \sqrt{27}$ es apotema del hexágono de la base y *h* que es la altura de la pirámide, las tres medidas forman un triángulo rectángulo.



La apotema h’ es la altura del triángulo isósceles que es una cara lateral de área $31.18\ \text{cm}^2$, es decir:

$A_c = \dfrac{6h'}{2} = 31.18$, despejamos h’ y tenemos,

$h' = \frac{2(31.18)}{6} = 10.39$ cm.



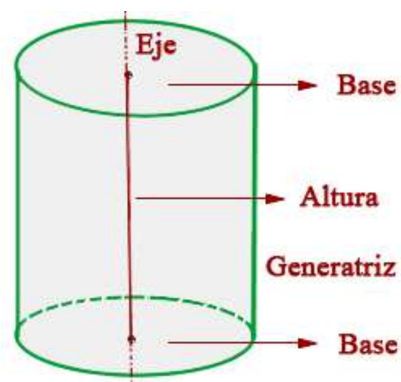
Finalmente, la altura de la pirámide es: $10.39^2 = h^2 + (\sqrt{27})^2$

$$h = \sqrt{10.39^2 - 27}$$

$$h = 8.99$$

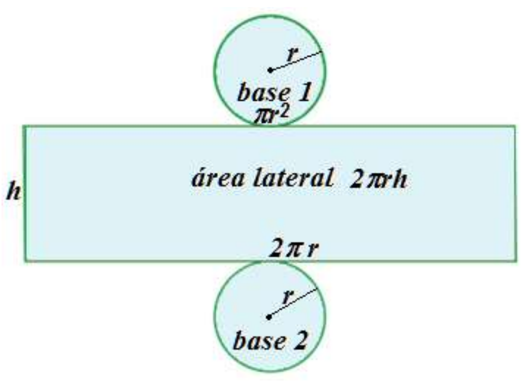
Respuesta: La altura de la pirámide es 8.99 centímetros.

iii) Área y Volumen de cilindros rectos.



Un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de una región rectangular en torno a uno de sus lados o también en torno a uno de sus ejes de simetría.

El cilindro recto consta de dos bases circulares y una superficie lateral que, al "abriese", da lugar a un rectángulo. La distancia entre las bases es la altura del cilindro. Las rectas contenidas en la superficie lateral, perpendiculares a las bases, se llaman generatrices.

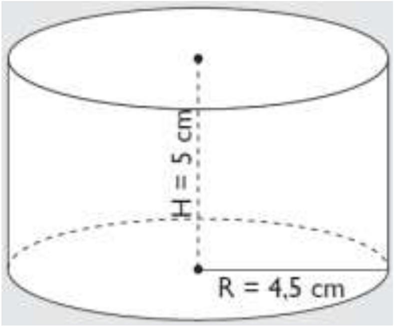


Si "abrimos" un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene el **área del cilindro recto.**

Área del cilindro = 2(área base) + área lateral

$= 2(\pi r^2) + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$

Volumen del cilindro = área de la base x altura = $\pi r^2 h$



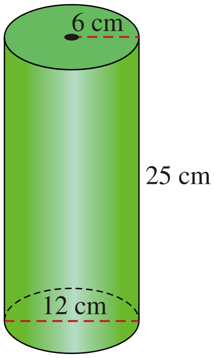
PROBLEMA 1. A un tarro de miel que tiene forma cilíndrica queremos ponerle una etiqueta que lo rodee completamente. El diámetro del tarro mide 9 cm y la altura de la etiqueta es de 5 cm. Calcula el área de la etiqueta.

Solución:
Trazamos un dibujo con los datos dados.

Para calcular el área de la etiqueta sólo tenemos que calcular el área lateral del cilindro.

Área lateral = $2\pi(4.5)(5) = 141.37\ cm^2$

Respuesta: El área de la etiqueta es de $141.37\ cm^2$



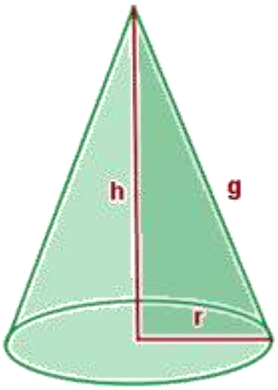
PROBLEMA 2. Un florero con forma cilíndrica tiene un diámetro interior de 12 cm y su altura es de 25 cm. Queremos llenarlo hasta los 2/3 de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua necesitamos?

Solución:
El trazar una figura con los datos dados nos ayuda a resolver el problema.
Volumen del cilindro: $A_b h = \pi(6^2)(25) = 2827.43\ cm^3$

Convirtiendo los cm^3 a litros, recuerda que $1000\ cm^3 = 1$ litro.
Así, $2827.43\ cm^3 \approx 2.827$ litros.
Queremos llenarlo a 2/3 de su capacidad, entonces:

$$\frac{2}{3}(2.827) \approx 1.885$$

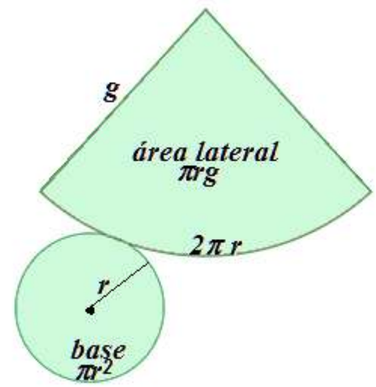
Respuesta: Necesitamos 1.885 litros de agua.



iv) Área y Volumen de conos.

El cono recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de un triángulo rectángulo en torno de uno de sus catetos. Sus elementos son: hipotenusa g (la generatriz), cateto inferior *r* (el radio) y cateto h (altura del cono).

El cono tiene una base circular. La altura en un cono recto es también el eje de simetría. Es el segmento perpendicular desde el vértice a la base. El segmento "**g**" es la generatriz y se llama así porque al girar engendra la superficie lateral del cono.



Para calcular el área o volumen de un cono sólo hacen falta dos de los siguientes tres datos: altura, radio o generatriz, ya que por el teorema de Pitágoras se puede encontrar el tercero: $g^2 = r^2 + h^2$

Si "abrimos" un cono, para calcular su área, tenemos lo siguiente:

El área lateral del cono es el producto de la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$) por el lado o generatriz, dividido por 2, es decir: $A_L = 2\pi rg/2 = \pi rg$

Área total de un cono = $\pi rg + \pi r^2 = \pi r(g + r)$

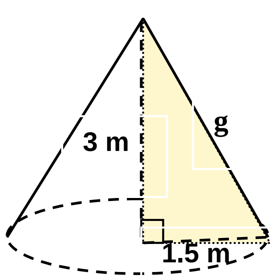
¿Te acuerdas de cuál es el volumen de una pirámide? Dijimos que el volumen de la pirámide es igual a un tercio del área de la base por su altura. En el caso del cono es muy parecido, su volumen es igual a un tercio del producto del área del círculo de su base por la altura.

$$V = \frac{1}{3}A_bh = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

PROBLEMA 1. Una tienda de campaña tiene forma de cono recto, el radio de la base mide 1.5 m y la altura es de 3 m. El metro cuadrado de material para la parte del suelo cuesta $210, y para el resto $140 el metro cuadrado. ¿Cuánto se gasta de material para construirla?

Solución:

Haciendo un dibujo para entender y resolver con mayor facilidad el problema, se tiene:



Área de la base: $A_b = \pi(1.5)^2 = 2.25\pi\ m^2$

Costo: $\$210(2.25\pi) \approx \$1484.4$

Para calcular el área lateral necesitamos saber la medida de la generatriz, utilizando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 3^2 + (1.5)^2$

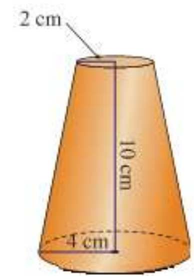
$$g = \sqrt{11.25} \approx 3.354$$

Área lateral: $\pi rg = \pi(1.5)(3.354) \approx 15.8\ m^2$

Costo: $\$140(15.79) = \$2212.8$

Costo total: \$1484.4 + \$2212.8 = \$3697.2

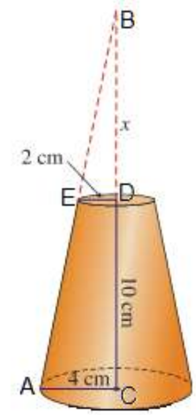
Respuesta: El costo del material para construir la tienda de campaña es de \$3697.2



PROBLEMA 2. Calcula el volumen de un tronco de cono recto sabiendo que el radio de la base mayor mide 4 cm; el de la base menor 2 cm; y la altura 10 cm.

Solución:
Acción: calcularemos el volumen del cono completo y le restaremos el volumen del cono que se le cortó.

Volumen del cono completo:



El volumen de un cono es $\frac{\pi \boldsymbol{r}^2 h}{3}$, en este caso, $\boldsymbol{r} = 4$. Pero nos falta saber la altura hasta su vértice. Para esto completamos el cono como se ve en la figura del lado derecho, y observamos que se forman dos triángulos semejantes, el ΔABC y ΔEBD. ¿Por qué son semejantes?

Al ser triángulos semejantes se cumple que $\frac{x}{x+10} = \frac{2}{4}$, resolviendo la ecuación tenemos: $4x = 2(x + 10)$, donde $x = 10$.

Entonces, la altura del cono es de 20 cm.

Sustituyendo en la fórmula del volumen, $V_C = \frac{\pi(4)^2(20)}{3} \approx 335.1 \text{ cm}^3$

Volumen de la punta del cono:

Sustituyendo en la fórmula del volumen, $V_P = \frac{\pi(2)^2(10)}{3} \approx 41.89 \text{ cm}^3$

Volumen del tronco de cono:
$V_C - V_P = 335.1 - 41.89 = 293.21 \text{ cm}^3$

Respuesta: El volumen del tronco de cono es de 293.21 cm^3

EJERCICIOS 4.5

1) En el rancho de Adolfo hay un tanque que tiene forma de prisma rectangular u ortoedro que mide 3 m x 2 m de base, y tiene una altura de 0.7 m. ¿Cuántos litros de agua caben en el tanque?

2) Una piscina tiene forma de prisma hexagonal. La arista de su base mide 12 m y la altura tiene 3.5 m. ¿Cuánto costará llenarla si el litro de agua tratada tiene un precio de ¢30?

3) ¿Cuántos peces, pequeños o medianos, se pueden introducir en un acuario cuyas medidas interiores son 88 x 65 x 70 cm? *(Se recomienda introducir, a lo sumo, un pez mediano o pequeño cada cuatro litros de agua)*

4) El depósito de gasoil o diesel de un sistema de calefacción tiene forma de prisma rectangular u ortoedro, cuyas dimensiones en metros son 1.5 m × 0.75 m × 1.8 m. Calcula cuánto cuesta llenarlo si cada litro de gasoil cuesta $14.20. Si la calefacción consume uniformemente todo el gasoil en 120 días, ¿cuánto se gasta diariamente en calefacción?

5) ¿Cuánto tiempo tardará un grifo en llenar un depósito si vierte 130 litros de agua por minuto? El depósito es un prisma de 3.6 m de altura y base hexagonal, de 2 m de lado y 1.7 m de apotema.

6) ¿Cuántos metros cúbicos de agua se consumen al vaciar 6 veces al día una cisterna de 7.5 litros durante 30 días?

7) Calcular el área y volumen de una pirámide regular pentagonal, cuya altura mide 15 cm, 6 cm la arista de la base y 4 cm el apotema de su base.

8) La base de una pirámide es un pentágono regular de lado 1.3 cm y apotema 0.9 cm. Calcular su volumen sabiendo que su altura es 2.7 cm.

9) Calcular el volumen de una pirámide regular cuya base es un hexágono de 18 cm de lado y su altura es de 40 cm.

10) La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las *siete maravillas del mundo antiguo*. Actualmente tiene una altura de 140 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?

11) Un tejado tiene forma de pirámide cuadrangular. La arista de su base mide 15 m y la altura es de 5 m. Si reparar un metro cuadrado cuesta $340, ¿cuánto costará reparar todo el tejado?

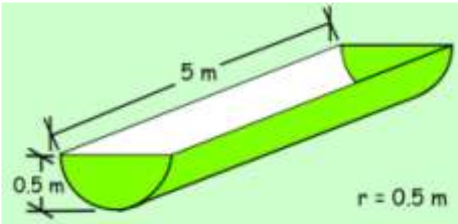
12) Calcula la altura de un bote de conservas cilíndrico de un litro, sabiendo que el diámetro de la base mide 8 cm.

13) En un vaso cilíndrico de 6 cm de diámetro se colocan cuatro cubitos de hielo de 3 cm de arista. ¿A qué altura llegará el agua cuando se derritan?

14) El suelo de una cisterna cilíndrica tiene una superficie de 28.27 m^2. La altura de la cisterna es de 2 metros. Para llenarla se utiliza una bomba que expulsa 90 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse?

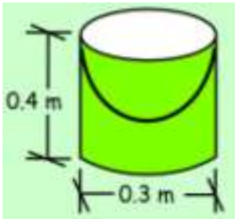
15) Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

16) En el rancho de Don Manuel hay un abrevadero como el que se muestra en el dibujo.

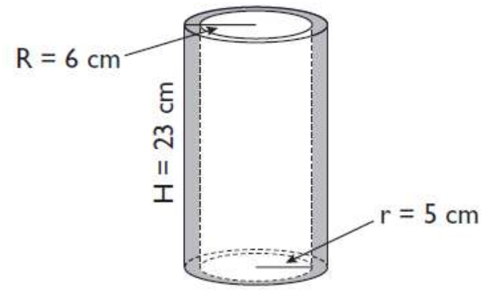


a) ¿Cuántos litros de agua caben en el abrevadero?

b) Si el abrevadero del rancho de Don Manuel se va a llenar con un bote como el que se muestra a continuación, ¿con cuántos botes se llenará el abrevadero?



17) Calcula el volumen de la siguiente pieza:



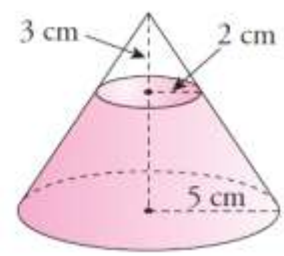
18) Calcular el volumen de un cono recto cuya generatriz mide 10 cm y el radio de su base es de 2.5 cm.

19) Para una fiesta, Luís ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

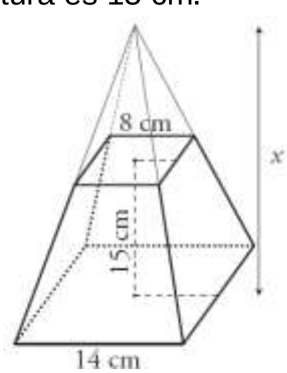
20) ¿Cuántas copas se pueden llenar con 6 litros de refresco, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura de 6.5 cm y un radio de 3.6 cm?

21) En un helado con forma de cono, 1/5 del contenido sobresale del cucurucho. Si el radio de la base del cucurucho mide 2.5 cm y la altura es de 12 cm, ¿cuántos helados se podrán hacer con 10 litros del producto?

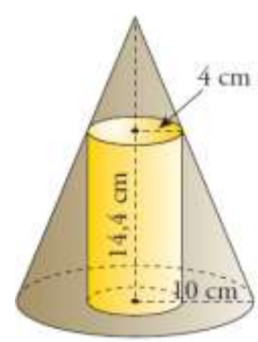
22) De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.

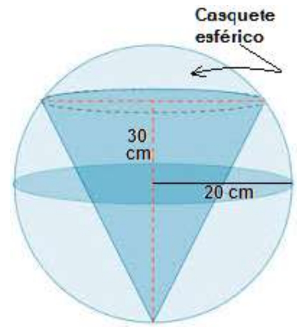


23) Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 8 cm y 14 cm y su altura es 15 cm.



24) En un cono de 10 cm de radio hemos inscrito un cilindro de radio 4 cm y altura 14.4 cm. Halla la altura del cono.





25) Andrés usa para vaciar el aguamiel de los magueyes un guaje (vasija) con forma de media esfera, con diámetro de 0.25 m. ¿Cuánta aguamiel, en litros, puede vaciar en su guaje Andrés? (Volumen de una esfera $\frac{4}{3}\pi r^3$)

26) Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

27) Tenemos un cono inscrito en una esfera de radio 11 cm. ¿Cuál será el radio de la base del cono si su altura es 14 cm?

28) En una esfera de 15 cm de radio hemos inscrito un cono de altura 12 cm. Calcula su área lateral.

29) Sobre una esfera de 20 cm de radio se encaja un cono de 30 cm de altura. Halla el área del casquete esférico que determina el cono.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

	PUNTOS PROBLEMÁTICOS	PROPUESTA DE SOLUCIÓN
4.1 **MEDIDA EN GEOMETRÍA**	En este tema no se presenta mayores problemas, ya que cuando el alumno manipula valores numéricos o medidas específicas, le da más sentido a lo que calcula. Los errores que se cometen son por fallas en sus operaciones aritméticas.	Siempre hacer recomendaciones sobre el cuidado que se debe tener al hacer operaciones aritméticas, que tomen en cuenta la prioridad de estas y dejar varios ejercicios para resolver en casa, pero siempre revisar sus soluciones grupalmente para que tengan una buena retroalimentación. Además de aclarar las dudas que surjan ante el grupo.
4.2 **CÁLCULO DE ÁREAS POR DESCOMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN DE FIGURAS.**	Para la mayoría de alumnos se les hace interesante el descomponer figuras para calcular sus áreas, y en consecuencia no tienen muchos problemas para deducir las fórmulas en este subtema. Como el 15% de los alumnos si presentan dificultades, ya que no llegan a visualizar cómo debe de hacerse. A pesar de su falta de comprensión para deducir las fórmulas, logran memorizar estas y aplicarlas correctamente.	Dejar de tarea ejercicios extras sobre descomposicion de figuras sencillas e ir incrementando su dificultad. Trabajar actividades con el tangram chino o figuras en una retícula como se propone en el anexo de esta unidad. Al hacer esta acción, en consecuencia los alumnos aclararán varias dudas que les permitirán comprender las deducciones de las fórmulas en esta parte. También podemos apoyarnos en otros recursos, como son las asesorías que ofrece el Colegio o con algunos videos como por ejemplo en las siguientes direcciones: https://www.youtube.com/watch?v=dFCY7s4Vcj4 https://www.youtube.com/watch?v=B9nIjZgvluk
4.3 **RAZÓN ENTRE PERÍMETROS Y ENTRE ÁREAS DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES.**	La teoría en esta parte no presenta muchas dificultades, las dificultades se dan en el momento de resolver ejercicios o problemas. Ya que por lo general el alumno siempre espera ver trazado el dibujo	Nuestras recomendaciones para esta problemática son las mismas que en el punto anterior, ya que los alumnos con dificultades necesitan una atención diferente, por lo general, sus dificultades se deben a que no han adquirido buenas bases para construir el nuevo conocimiento. Algunos de los siguientes videos pueden

	que represente el problema, además de confundir la razón entre perímetros y áreas.	ser de gran ayuda para disminuir estas dificultades. https://www.youtube.com/watch?v=mFFnbaJt2B0 https://www.youtube.com/watch?v=VSh3jLFCVnI&index=68&list=PL5Fxf3ZFufnIlqpX34sOva6Fgi8-an9hD
4.4 **PROBLEMAS DE LONGITUDES Y ÁREAS QUE INVOLUCREN SEMEJANZA, CONGRUENCIA Y TEOREMA DE PITÁGORAS.**	La mayor dificultad en este y en el siguiente tema es lo referente con la solución de problemas, como ya se mencionó, el alumno siempre espera ver trazado el dibujo que represente el problema. Presentan problemas de comprensión, por ejemplo, leen 2 o tres veces el problema y no se dan cuenta de los datos que se tienen, además de olvidar de los resultados antes vistos.	Una de las recomendaciones es proporcionarles varios problemas resueltos y proponerle que resuelvan otros parecidos. Seguir insistiendo que acudan a las asesorías que ofrece el Colegio y de nuevo proporcionar direcciones electrónicas de videos sobre este tema, algunas son: https://www.youtube.com/watch?v=Q9-D1j_g3Uk https://www.youtube.com/watch?v=2bcGQ71cj1I
4.5 **PROBLEMAS QUE INVOLUCREN ÁREAS Y VOLÚMENES DE PRISMAS, CILINDROS RECTOS Y CONOS RECTOS, DONDE SEA NECESARIO APLICAR CONOCIMIENTOS DE CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS.**	Al ser muy parecida esta temática con la anterior, surgen problemas similares, y se acentúan porque en este tema se trabaja con aplicaciones de cuerpos geométricos en tres dimensiones y les cuesta mucho trabajo plasmar la figura el plano. No logran visualizar figuras planas en una figura de tres dimensiones.	Una de las actividades que puede ayudar a visualizar y comprender los cuerpos geométricos, es la construcción de poliedros como se plantean en el anexo de esta unidad. Usar lo que nos rodea para que comprendan el enunciado de ciertos problemas, por ejemplo, para la diagonal en un ortoedro, se usa el salón de clases, citar y mostrar objetos cilíndricos o en forma de cono. El dejar tareas extras y calificarlas grupalmente, les ayuda a autoevaluarse en el tema.

Bibliografía básica y complementaria.

Clemens, Stanley *et al*, *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*, Addison Wesley, México, 1989.

Euclides, Elementos de Geometría I - II, versión de Juan D. García Bacca, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 1992.

Garcia, Jesús y Bertrán, Celesti. *Geometría y Experiencias*, *Recursos Didácticos,* Alhambra, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

Miller, Charles et al. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999

Wentworth, J.; Smith, D. Geometría plana y del espacio. Ed. Porrúa. 24a. Ed. 1997.

Páginas Web, vistas el 22 de junio de 2015:

Varios videos de geometría en:

http://www.youtube.com/watch?v=LvKPYiyx8u4&list=PLC-j4ScU0Zao-zff9ik5i0Ad_nnQyA6vQ