Unidad 3.

Congruencia y Semejanza.

PROPÓSITO

✍ *Ilustrar el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al alumno en el método deductivo. Trabajar la congruencia y semejanza de triángulos, así como el teorema de Pitágoras.*

CONTENIDO

3.1 Congruencia.
- 3.1.1 Congruencia de complementos y suplementos de ángulos congruentes.
- 3.1.2 Congruencia de ángulos opuestos por el vértice. Justificación.
- 3.1.3 Construcción de la recta paralela a otra por un punto dado.
- 3.1.4 Ángulos internos y el ángulo externo de un triángulo.

3.2 Congruencia de triángulos: criterios de congruencia de triángulos.
- 3.2.1 Justificación de las construcciones de: a) Bisectriz de un ángulo, b) Mediatriz de un segmento, c) Perpendicular a una recta.
- 3.2.2 Teorema del triángulo isósceles y su recíproco. Justificación.

3.3 Semejanza y Teorema de Pitágoras.
- 3.3.1 División de un segmento en n partes iguales. Construcciones.
- 3.3.2 Criterios de semejanza de triángulos.
- 3.3.3 Teorema de Thales y su recíproco.
- 3.3.4 Teorema de la altura de un triángulo rectángulo. Justificación.
- 3.3.5 Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.
Bibliografía.

PRESENTACIÓN

Una forma de adquisición del conocimiento matemático es en forma reflexiva, mediante la lógica, desarrollando un conocimiento analítico y reflexivo: Razonamiento deductivo.

La primera obra conocida de naturaleza deductiva son los Elementos de Euclides, el objeto de la deducción es la demostración, que es la base de la ciencia.
Las ciencias exactas no experimentales como la Matemática, la Lógica simbólica y la Geometría, utilizan el método deductivo, pues parten de premisas que no surgen de la experiencia sensible (son postulados o axiomas) para obtener conocimientos nuevos.

Muchos campos de estudio se basan en el razonamiento deductivo, por lo que es importante que nuestros alumnos aprendan a desarrollar este método de pensamiento como complemento en la adquisición del conocimiento matemático. Como el proceso deductivo no es fácil de lograr, se requiere una madures en los conceptos matemáticos, hacer uso de la visualización y de un razonamiento lógico-deductivo, este es uno de los retos en su enseñanza al cual dedicaremos nuestros esfuerzos.
El razonamiento deductivo, también llamado demostración o prueba, es el razonar a partir de hechos demostrados, utilizando pasos lógicamente válidos para llegar a una conclusión[1]. Los matemáticos a menudo utilizan la demostración para verificar que una conjetura es verdadera para todos los casos, no sólo para aquellos examinados, o para convencer a otros. Las demostraciones a menudo ayudan a responder a la pregunta: ¿por qué? El uso de la demostración para explicar el por qué, es una extensión natural para los estudiantes en este momento del curso de Matemáticas II y les ayudará a profundizar su comprensión.

Esta unidad resalta este propósito iluminador de la demostración o prueba, pretende que el alumno se inicie en el proceso de la deducción, identificando propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, que construya y proporcione argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, que establezca relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más avanzados.

Al igual que en las unidades anteriores, este material intenta apoyar el trabajo de profesores y de alumnos, y como tal, ofrece un conjunto de sugerencias de estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje y materiales de apoyo. **El desarrollo de cada subtema se basa en la totalidad de aprendizajes estipulados en el Plan de Estudios de Matemáticas II U-3 del Colegio de Ciencias y Humanidades**.

Conceptos clave: Justificación, paralelismo, congruencia, semejanza y Teorema de Pitágoras.

[1] 2008, Kendall Hunt Publishing

3.1 CONGRUENCIA.

En la geometría euclidiana, la congruencia es fundamental, es lo equivalente a igualdad matemática en aritmética y álgebra. La igualdad se da entre unidades de medida o cantidades u objetos matemáticos que posean el mismo valor, pero en Geometría no podemos afirmar que un ángulo, un triángulo o un polígono en general son iguales, ya que al ser objetos geométricos ocupan diferentes espacios en el plano, tendrán iguales las medidas de lados o de ángulos, pero como figuras planas son diferentes.

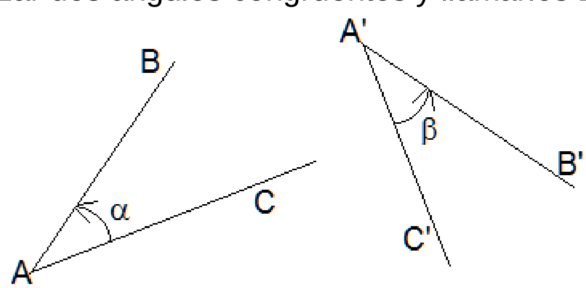
Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas. Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

3.1.1 Congruencia de complementos y suplementos de ángulos congruentes.

Se denomina ángulos congruentes a aquellos ángulos que tienen la misma medida (radianes o grados), o dicho de otra forma, son aquellos que al sobreponerlos coinciden (es decir, si mediante un giro y/o traslación se pueden hacer coincidir el uno con el otro.) También se puede decir que son dos ángulos iguales, pero se trata de una igualdad en medida.

Por otra parte, se sugiere recordar los conceptos de ángulos complementarios y suplementarios con algunos ejercicios, para después mostrar lo siguiente.

Actividad 1: Trazar dos ángulos congruentes y llamarlos $\angle BAC = \alpha$ y $\angle B'A'C' = \beta$.



Contestar lo que se pide.

a) Si el $\angle BAC$ mide $\alpha°$, su complemento medirá ______________________.

b) Si $\angle B'A'C'$ mide $\beta°$, su complemento medirá ________________________.

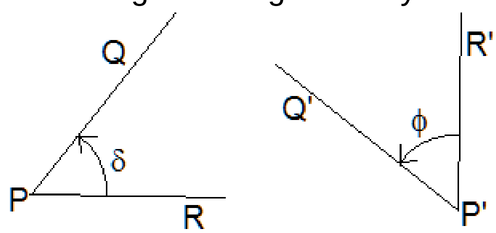
c) Como $\alpha° = \beta°$ por construcción, entonces se cumple que $90° - \alpha° = 90° - \beta°$

d) Entonces se puede afirmar que el complemento del $\angle BAC$ y el complemento del $\angle B'A'C'$ son _______________________.

De esta forma, el alumno puede justificar o mostrar que “Los complementos de dos ángulos congruentes son congruentes”.

De forma similar se puede mostrar que “Los suplementos de dos ángulos congruentes son congruentes”.

Actividad 2: Trazar dos ángulos congruentes y llamarlos $\angle QPR = \delta$ y $\angle Q'P'R' = \phi$.



Contestar lo que se pide.

a) Si el $\angle QPR$ mide $\delta°$, su suplemento medirá ____________________________.

b) Si $\angle Q'P'R'$ mide $\phi°$, su suplemento medirá ______________________________.

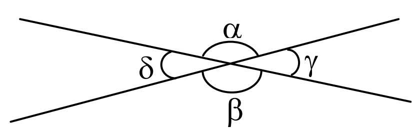
c) Como $\delta° = \phi°$ por construcción, entonces se cumple que $180° - \delta° = 180° - \phi°$

d) Entonces se puede afirmar que el suplemento del $\angle QPR$ y el suplemento del $\angle Q'P'R'$ son ___________________________.

Es decir “Los suplementos de dos ángulos congruentes son congruentes”.

3.1.2 Congruencia de ángulos opuestos por el vértice. Justificación.

Actividad: Trazar dos segmentos de recta que se corten y asignarle las siguientes letras.



Contestar lo que se pide.

1) ¿Cómo se les llaman a los ángulos α y β? _____________________________________.

2) ¿Cuánto mide la suma de α con γ, es decir, $\alpha + \gamma$ = _________.

3) ¿Cuánto mide la suma de γ con β, es decir, $\gamma + \beta$ = _________.

4) Entonces como 180° = 180°, se debe de cumplir que: _____ + _____ = _____ + _____.

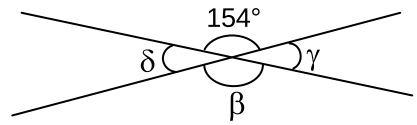
5) Restando γ en ambos lados se tiene: _____ = _____.

De la misma forma se puede mostrar que δ y γ miden lo mismo.

Conclusión:

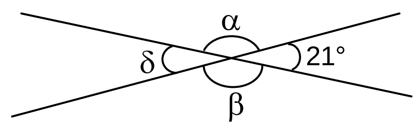
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

EJEMPLOS.



1) En la siguiente figura encuentra el valor de β, γ, y δ.

Solución:
Paso 1. β = 154° por ser opuestos por el vértice.
Paso 2. Como δ + 154° = 180°, entonces δ = 26°.
Paso 3. $\delta = \gamma$ por ser opuestos por el vértice, entonces γ = 26°.



2) En la siguiente figura encuentra el valor de α, β, y δ.

Solución:
Paso 1. δ = 21° por ser opuestos por el vértice.
Paso 2. Como β + 21° = 180°, entonces β = 159°.
Paso 3. $\beta = \alpha$ por ser opuestos por el vértice, entonces α = 159°.

3.1.3 Construcción de la recta paralela a otra por un punto dado.

La construcción ya se hizo en la unidad 2, página 57.

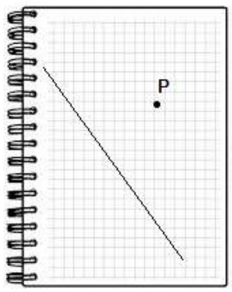
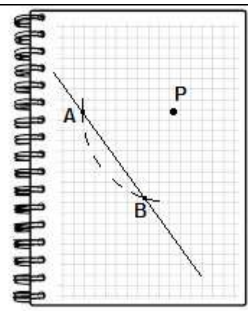
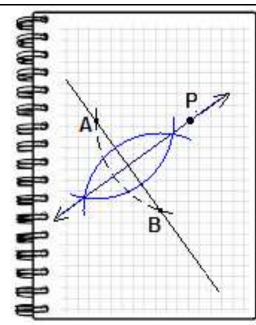
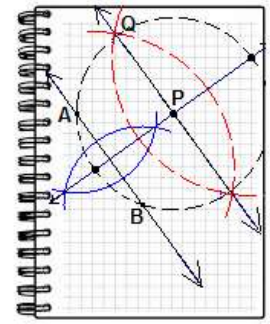
Es bueno recordarla:

 En tu cuaderno traza una recta cualquiera y marca un punto P fuera de ella. Con regla y compás trazar una recta paralela a la recta que pase por el punto P. Escribe los pasos para trazarla.

> SUGERENCIA: Puedes colocar tú mismo el punto P en la hoja de cada uno de los alumnos con lo cual se obtienen diferentes trazos y que el alumno toma cierta responsabilidad en resolverlo.

Rectas paralelas son aquellas rectas en el mismo plano que por más que se prolonguen en ambas direcciones, nunca se cortan.

Solución (una forma de hacerlo)**:**

			
Una recta y un punto P fuera de ella.	1º. Utilizando el compás, con centro en P se traza un arco de circunferencia que corte a la recta en dos puntos A y B.	2º. Se traza la mediatriz del segmento AB siguiendo los pasos de la actividad 3.	3° Se traza una perpendicular a la mediatriz y que pase por P. La línea recta que pasa por P y Q, será paralela a la recta dada y pasa por P.

a) Postulado de las rectas paralelas.

Con este nombre se le conoce al quinto postulado de Euclides, es una proposición geométrica indemostrable que afirma:
Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos interiores del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

El quinto postulado de Euclides fue bastante polémico porque no parecía una proposición evidente. Muchos matemáticos lo consideraron un teorema e intentaron infructuosamente demostrarlo a partir de los otros cuatro. Desde el punto de vista de la historia de la matemática, el problema de la independencia del quinto postulado fue importante puesto que su supresión y sustitución por su negación dio lugar a las llamadas geometrías no Euclidianas.
Si la paralela por el punto exterior de una recta es única, se tiene la geometría Euclidiana; si no es única, entonces aparece la geometría de Lovachesky; y si no pasa ninguna, se origina la geometría Rimaniana. Las paralelas cortadas por transversales permiten determinar las medidas de los ángulos formados y las de los polígonos, al aplicar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

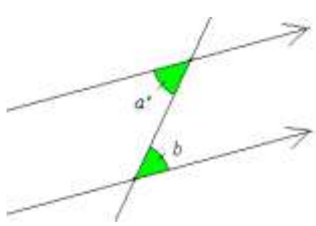
Hay un gran número de propiedades geométricas que son equivalencias del quinto postulado, recordar que dos propiedades son equivalentes si una implica la otra.

Algunas de las equivalencias del postulado de las rectas paralelas son:
- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos.
- Por un punto exterior a una recta dada sólo cabe trazar una paralela.
- Las rectas paralelas son equidistantes.
- Las rectas no equidistantes convergen en una dirección y divergen en la opuesta.
- Sobre una recta finita siempre se puede construir un triángulo semejante a un triángulo dado.
- Existe un par de triángulos no congruentes, pero semejantes.
- En todo cuadrilátero que contenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto.
- Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada.
- Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir un círculo que pase por todos ellos.
- No hay patrón métrico absoluto de longitud.

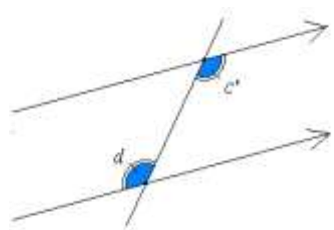
b) Congruencia de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

La relación de rectas paralelas cortadas por una transversal o secante es muy importante en la Geometría ya que permite analizar una infinidad de problemas prácticos, así como definir algunos conceptos de interés en cuanto a congruencia y la igualdad entre ángulos. Esta relación es la siguiente.

- Los ángulos **ALTERNOS INTERNOS** entre paralelas son congruentes o iguales (en medida):

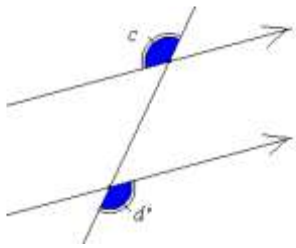


$\angle a' = \angle b$

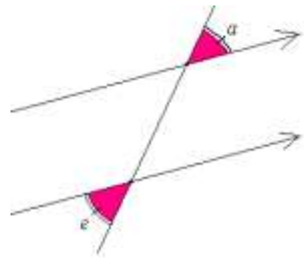


$\angle d = \angle c'$

- los ángulos **ALTERNOS EXTERNOS** entre paralelas son congruentes o iguales (en medida):

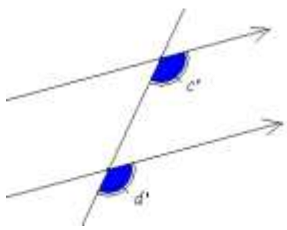


$\angle c = \angle d'$

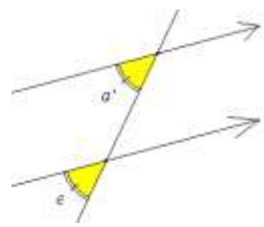


$\angle a = \angle e$

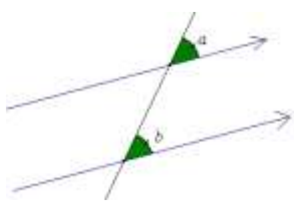
- Los ángulos **CORRESPONDIENTES** entre paralelas son congruentes o iguales (en medida):



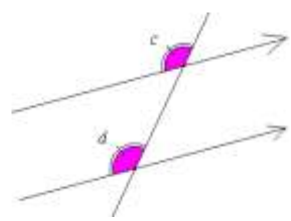
$\angle c' = \angle d'$



$\angle a' = \angle e$



$\angle a = \angle b$

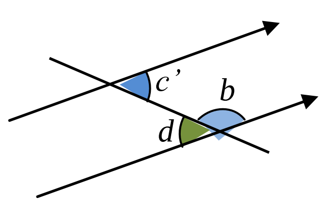


$\angle c = \angle d$

NOTA: Comentar que si las rectas no son paralelas no se cumple la igualdad de la medida de los ángulos.

Otra afirmación importante de ángulos entre paralelas se puede abordar de la siguiente forma:

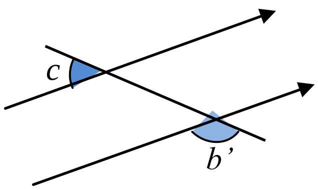
Actividad: Trazar dos segmentos paralelos cortados por una transversal y asignar los siguientes nombres.

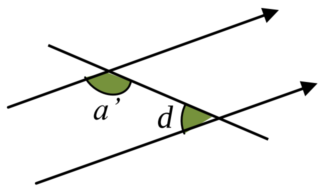


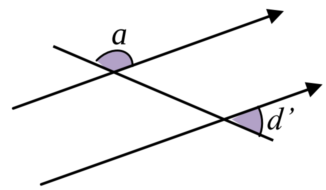
Contestar lo que se pide.

1) ¿Cómo son los ángulos c' y d? _______________.
2) ¿Porqué? ________________________________.
3) $\angle d + \angle b =$ __________.
4) En el paso 3 se sustituye el valor de $\angle d$ y se obtiene: ____ + $\angle b =$ _____
5) Se puede afirmar que los ángulos c' y b suman: ________________________

Los ángulos c' y b son llamados Ángulos Conjugados entre paralelas. De forma similar se puede mostrar que los siguientes pares de ángulos también son Conjugados:





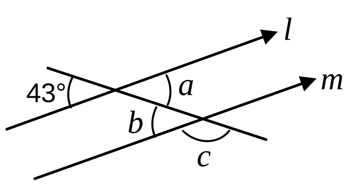


Conclusión:

Los ángulos Conjugados entre paralelas suman 180° (son suplementarios).

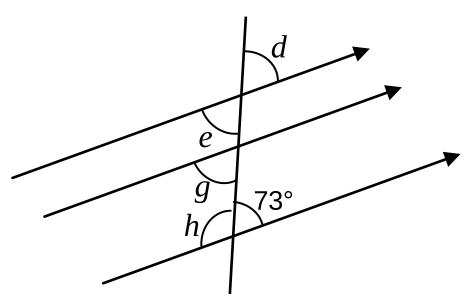
EJEMPLOS.

1) Encuentra el valor de a, b y c. Si se sabe que las rectas l y m son paralelas.



Solución:
Paso 1. $\angle a = 43°$ por ser opuestos por el vértice.
Paso 2. $\angle b = \angle a = 43°$ por ser alternos internos entre paralelas.
Paso 3. Es claro que $\angle b + \angle c = 180°$.
Paso 4. Como $\angle b = 43°$, entonces $\angle c = 137°$.

2) En la siguiente figura, encuentra el valor de d, e, g y h.
Si se sabe que las rectas l, m y n son paralelas.

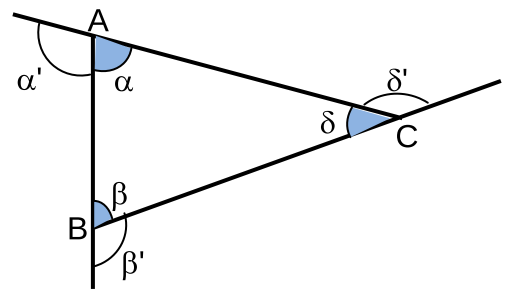


Solución:
Paso 1. $\angle h + 73° = 180°$ por ser suplementarios, entonces $\angle h = 107°$.
Paso 2. $\angle g = 73°$ por ser alternos internos entre paralelas.
Paso 3. $\angle g = \angle e$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle e = 73°$.
Paso 4. $\angle d = \angle e$ por ser opuestos por el vértice, entonces $\angle d = 73°$.

NOTA: Propuesta de ejercicios similares al final de esta sección 3.1

3.1.4 Ángulos internos y el ángulo externo de un triángulo.

Todo triángulo tiene 3 ángulos interiores y 3 ángulos exteriores, como se ve en la figura:



En el ΔABC, los ángulos interiores son: α, β y δ, y los ángulos exteriores son: α', β' y δ',

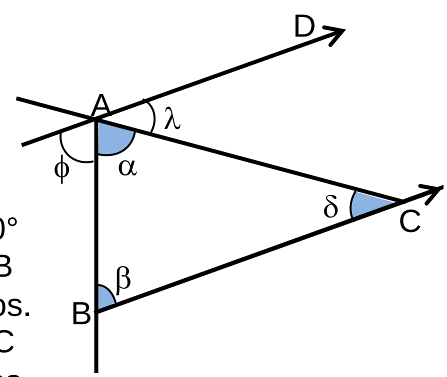
Afirmación 1) La suma de los tres ángulos interiores en todo triángulo es de 180°, es decir, en el ΔABC se cumple $\alpha + \beta + \delta = 180°$.

Afirmación 2) La suma de los tres ángulos exteriores en todo triángulo es de 360°, es decir, en el ΔABC se cumple $\alpha' + \beta' + \delta' = 360°$.

a) Suma de ángulos interiores de un triángulo. Justificación.

Afirmación 1) La suma de los tres ángulos interiores en todo triángulo es de 180°, es decir, en el ΔABC se cumple $\alpha + \beta + \delta = 180°$.

Justificación:



Se traza una paralela al lado BC que pase por A.
Usando los ángulos ϕ y λ se tiene:
Paso 1. Se observa que con vértice en A: $\phi + \alpha + \lambda = 180°$
Paso 2. Como AD || BC por construcción, y tomando a AB como transversal se cumple $\phi = \beta$ por ser alternos internos.
Paso 3. Como AD || BC por construcción, y tomando a AC como transversal se cumple $\lambda = \delta$ por ser alternos internos.
Paso 4. Sustituyendo estos dos últimos resultados en $\phi + \alpha + \lambda = 180°$ se tiene:
$\alpha + \beta + \delta = 180°$ que es lo que se quería mostrar.

Afirmación 2) La suma de los tres ángulos exteriores en todo triángulo es de 360°, es decir, en el ΔABC se cumple $\alpha' + \beta' + \delta' = 360°$.

Justificación:

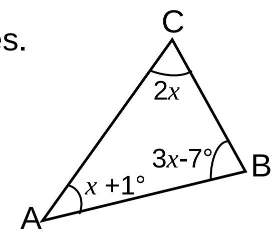
Paso 1. Con vértice en A, $\alpha' + \alpha = 180°$.
Paso 2. Con vértice en B, $\beta' + \beta = 180°$.
Paso 3. Con vértice en C, $\delta' + \delta = 180°$.

Paso 4. Sumando estas tres igualdades: $\alpha' + \alpha + \beta' + \beta + \delta' + \delta = 180° + 180° + 180°$
$\alpha + \beta + \delta + \alpha' + \beta' + \delta' = 540°$

Paso 5. Además, se sabe qué $\alpha + \beta + \delta = 180°$, restándolo en ambos lados, se tiene:
$\alpha' + \beta' + \delta' = 360°$, que es lo que se quería mostrar.

EJEMPLOS.

1) En el ΔABC encontrar la medida de sus ángulos interiores.



Solución:

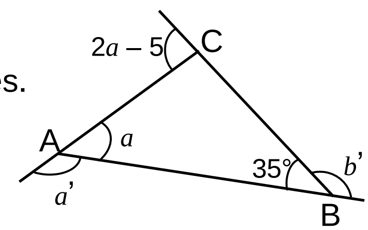
En el ΔABC se cumple:

$$x + 1 + 2x + 3x - 7 = 180°$$
$$6x - 6 = 180°$$
$$6x = 186°$$
$$x = 186°/6 = 31°$$

Por lo tanto: $\angle A = x + 1° = 31° + 1° = 32°$
$\angle B = 2x = 2(31°) = 62°$
$\angle C = 3x - 7° = 3(31°) - 7° = 93° - 7° = 86°$

Comprobación: $32° + 62° + 86° = 180°$

2) En el ΔABC encontrar la medida de sus ángulos exteriores.



Solución:

Paso 1. En el vértice A: $a + a' = 180°$ entonces $a' = 180° - a$

Paso 2. En el vértice B: $35° + b' = 180°$ entonces $b' = 145°$

Paso 3. Sumando los tres ángulos exteriores se tiene:

$$a' + b' + 2a - 5° = 360°$$
$$180° - a + 145° + 2a - 5° = 360°$$

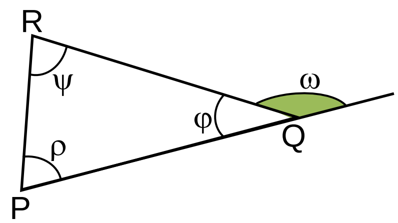
Paso 4. Resolviendo la ecuación: $a + 320° = 360°$
$a = 40°$

Por lo tanto, la medida de los ángulos exteriores son: $a' = 180° - a = 140°$
$b' = 145°$
$2a - 5 = 2(40°) - 5° = 75°$

Comprobación: $140° + 145° + 75° = 360°$

b) Relación entre el ángulo externo y el ángulo interno. Justificación.

En todo triángulo, cualquier ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.



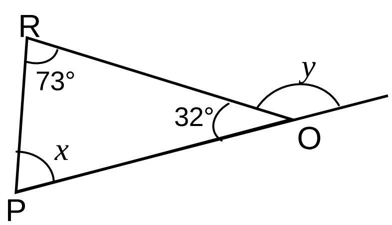
Justificación:

Se traza un triángulo cualquiera PQR, y se elige cualquier ángulo exterior del triángulo, supongamos ω.
Es claro que $\omega + \varphi = 180°$.
Además, $\rho + \psi + \varphi = 180°$ por ser ángulos interiores del ΔPQR.

Entonces, se cumple que $\omega + \varphi = \rho + \psi + \varphi$, ya que ambas sumas son igual 180°.
Restando φ de ambos lados, se obtiene $\omega = \rho + \psi$.

Conclusión: Como ω es un ángulo exterior cualquiera del ΔPQR, y los ángulos ρ y ψ son interiores no adyacentes a él, se cumple que en todo triángulo, cualquier ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

EJEMPLO. En el siguiente triángulo encuentra el valor de x y el de y.



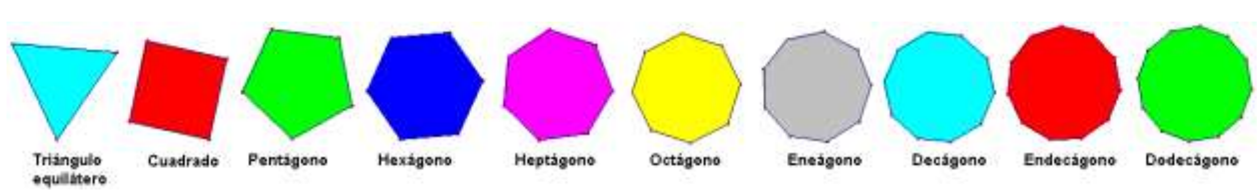
Solución:

$x = 75°$ ya que $x + 73° + 32° = 180°$
y es un ángulo exterior del ΔPQR, entonces
$y = 75° + 73° = 148°$

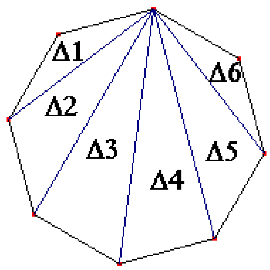
c) Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono regular.

OBSERVACIÓN: En la unidad 2 se trabajaron algunas actividades que corresponden a este tema, se pueden volver a recordar.

Polígono regular. Es aquel que tiene sus lados y ángulos iguales.

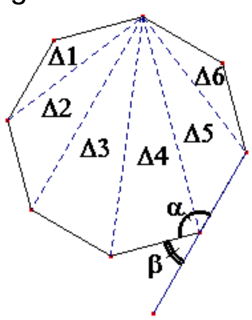


Actividad 1: Trazar un octágono regular, y triangularlo como se ve en la figura.



1) Se forman 6 triángulos, la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es _____.
2) La suma de los ángulos interiores del octágono es igual a ___________.
3) Al ser polígono regular, sus 8 ángulos interiores son iguales y cada uno mide _________________.

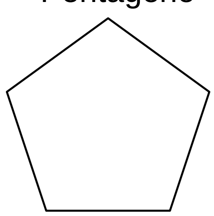
Actividad 2: En el mismo octágono, prolongamos uno de sus lados como se ve en la figura.



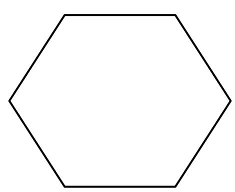
1) El ángulo interior α mide ________.
2) El ángulo exterior β al sumarlo con α es igual a _______.
3) Entonces β mide _______.
4) Al ser Octágono regular todos sus ángulos exteriores serán iguales, y la suma de los 8 ángulos exteriores es igual a _________.

Actividad 3: Para los siguientes polígonos regulares contesta lo que se pide.

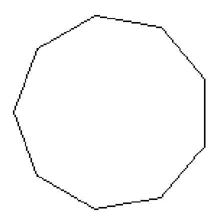
Pentágono



Hexágono



Eneágono



	Pentágono	Hexágono	Octágono
¿Cuántos lados tiene?			
La suma de los ángulos interiores de cada polígono es:			
¿Cuánto mide cada ángulo interior?			
¿Cuánto mide cada ángulo exterior?			
La suma de los ángulos exteriores de cada polígono es:			

Actividad 4: En tu cuaderno traza un Heptágono regular y un Decágono regular, cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores?
¿Podrías generalizar este resultado para un polígono de n lados?

Actividad 5: En los mismos polígonos de la actividad 4, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos exteriores?
¿Podrías generalizar este resultado para un polígono de n lados?

Algunas propiedades de los polígonos regulares son:

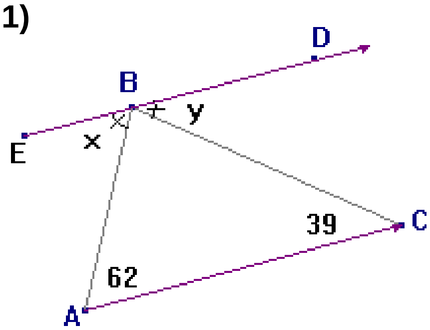
Un polígono regular de n lados tiene n lados iguales, n ángulos interiores iguales y n ángulos exteriores igual.

- Cada ángulo interior mide $\frac{180°(n-2)}{n}$.
- La suma de los ángulos exteriores es de 360°.
- Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia.
- Todo polígono regular se puede circunscribir en una circunferencia.
- El radio de la circunferencia circunscrita y la inscrita en un polígono regular es el mismo, y también es la apotema del polígono.

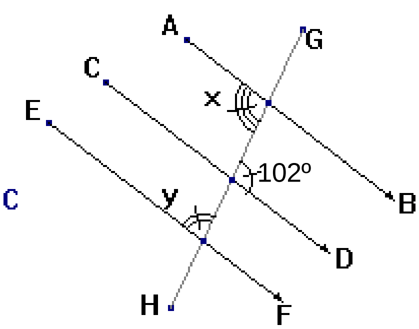
EJERCICIOS 3.1

En cada ejercicio encuentra el valor de x y el de y, recuerda que las flechas en la misma dirección, indican que las rectas son paralelas.

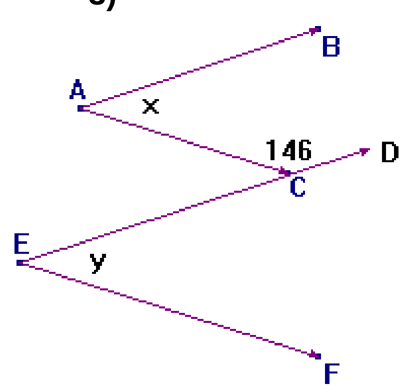
1)



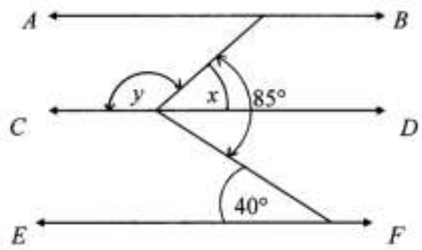
2)



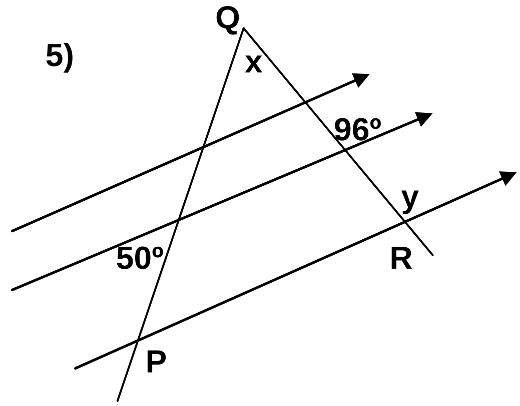
3)



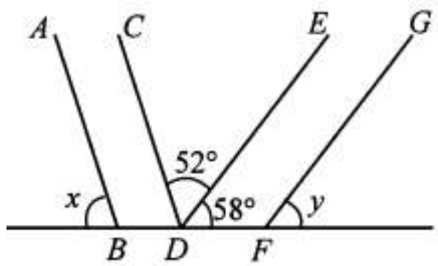
4)


A
B
C
D
E
F
y
x
85°
40°

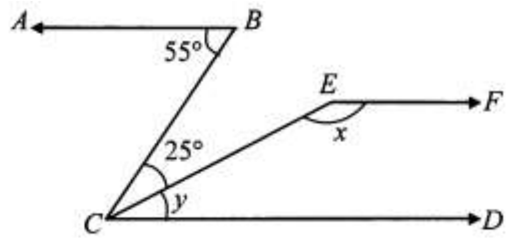
5)


Q
x
96º
y
50º
R
P

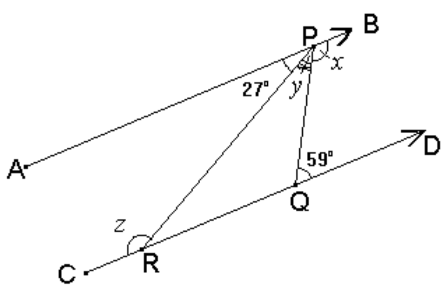
6)


A
C
E
G
52°
x
58°
y
B
D
F

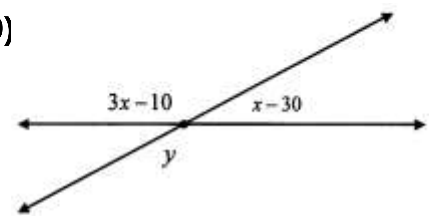
7)


A
B
55°
E
F
x
25°
y
C
D

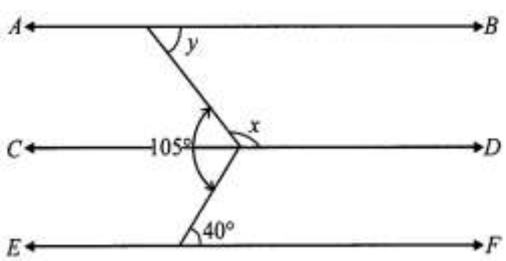
8)


P
B
x
27°
y
59°
D
A
Q
z
R
C

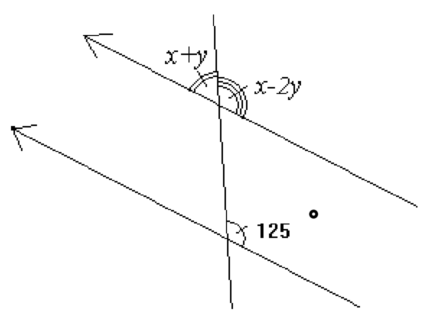
9)


3x − 10
x − 30
y

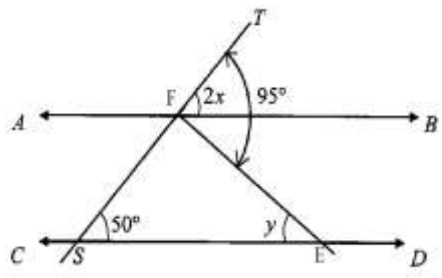
10)


A
B
y
x
C
105°
D
40°
E
F

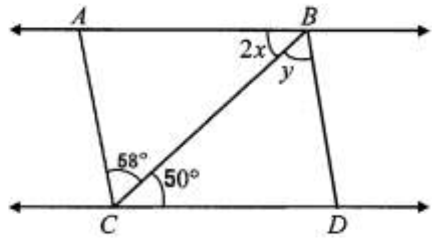
11)


x+y
x-2y
125 °

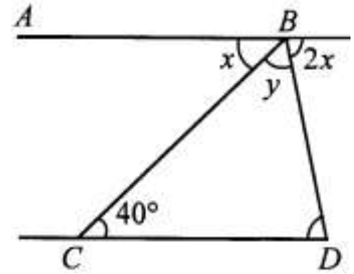
12) Dato: AB || CD



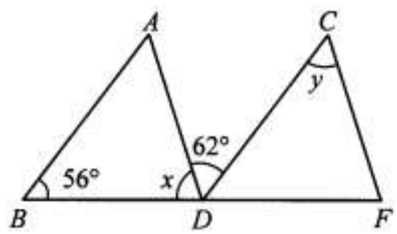
13) Dato: AB || CD y AC || BD



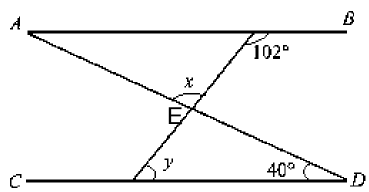
14) Dato: AB || CD



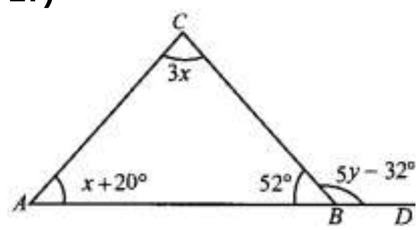
15) Dato: $AB \,||\, CD$ y $AD \,||\, CF$



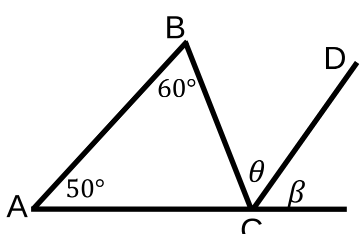
16) Dato: AB || CD



17)

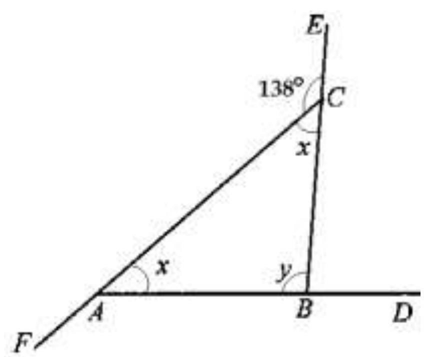


18)

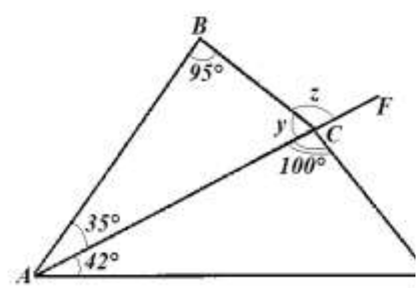


AB || CD Hallar ∠θ, ∠β

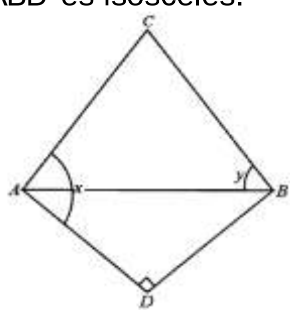
19)



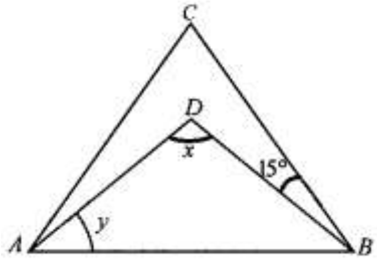
20)



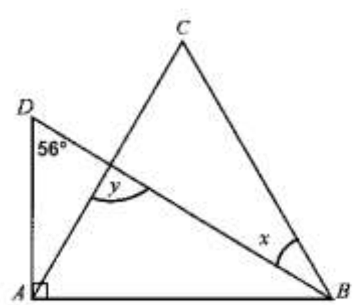
21) El $\triangle ABC$ es equilátero y el $\triangle ABD$ es isósceles.



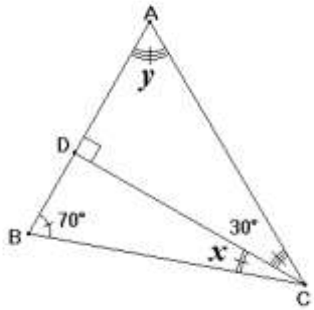
22) El $\triangle ABC$ es equilátero y $\triangle ABD$ es isósceles.



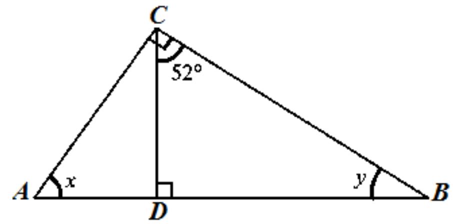
23) El $\triangle ABC$ es equilátero



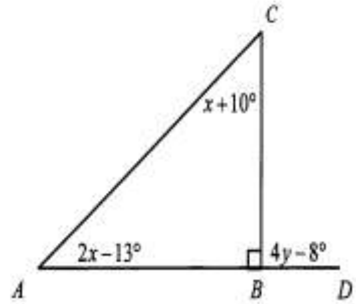
24)



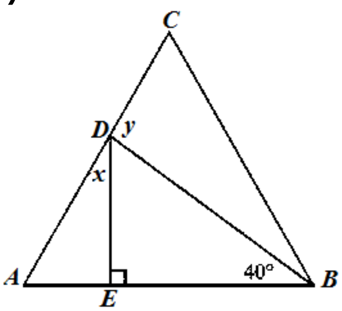
25)



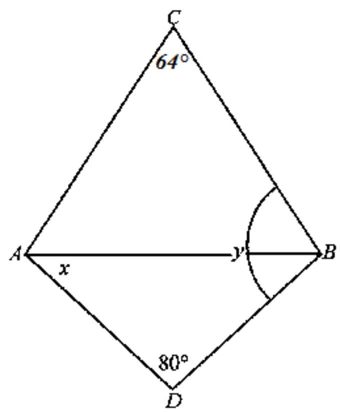
26)



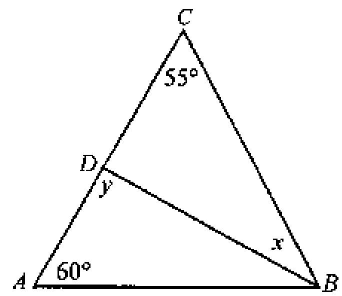
27)



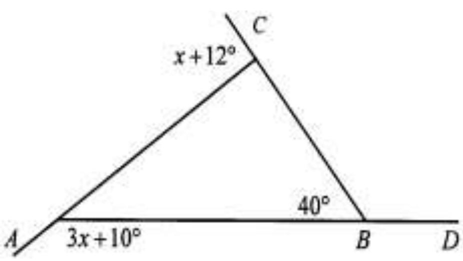
28) Los triángulos ABC y ABD son isósceles.



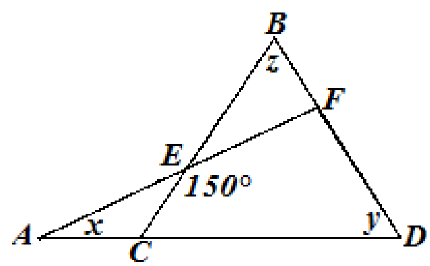
29) BD es bisectriz del ∠ABC



30)



31)



ADF es triángulo rectángulo y BD = CD.

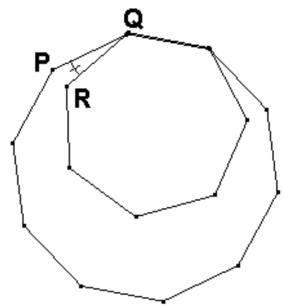
32) Encontrar el número de lados de un polígono si se sabe que la suma de sus ángulos interiores es igual a la suma de sus ángulos exteriores. ¿Cómo se llama este polígono?

33) ¿Cuántos lados tiene un polígono?, si desde uno de sus vértices se han trazado 9 diagonales.

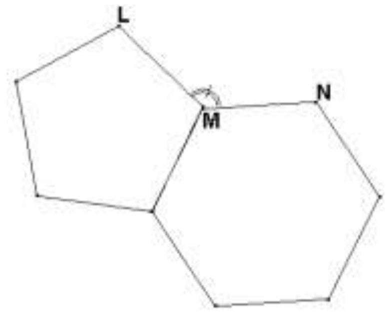
34) El ángulo interior de un polígono regular mide 20° más que su ángulo exterior, ¿de qué polígono se trata?, al triangularlo ¿en cuántos triángulos se puede dividir?

35) Si el número de lados de un polígono regular se triplica, la medida de un su ángulo interior aumenta en 40°. ¿Cuánto mide el ángulo exterior de este polígono? ¿De qué polígono se trata?

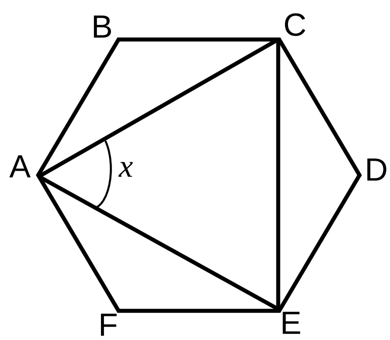
36) Los siguientes dos polígonos son regulares, encontrar el valor del $\angle$PQR.



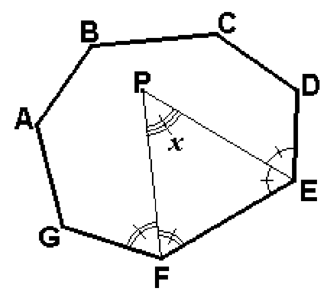
37) Los siguientes dos polígonos son regulares, encontrar el valor del $\angle$LMN.



38) ABCDEF es un hexágono regular, ¿cuánto mide el $\angle x$?



39) En el siguiente heptágono, la suma de sus ángulos interiores $\angle$G + $\angle$A + $\angle$B + $\angle$C + $\angle$D = 642°, PE es bisectriz del $\angle$E, PF es bisectriz del $\angle$F. Encontrar la medida del $\angle \boldsymbol{x}$.



3.2 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS: CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

El concepto de **congruencia** es equivalente con el de igualdad, es costumbre que en geometría se hable de **congruencia** en lugar de igualdad.

Por ejemplo, dos segmentos son congruentes si y sólo si tienen la misma medida, dos ángulos son congruentes si y sólo si miden lo mismo. Estas dos afirmaciones ya las estudiamos anteriormente, ahora continuaremos con los triángulos.

En el caso de los triángulos se incluye más de un elemento ya que no hay una medida (número) que defina a un triángulo, lo que si podemos afirmar es que dos triángulos son **congruentes** si pueden hacerse coincidir uno sobre el otro mediante giros, traslaciones y/o reflexiones.

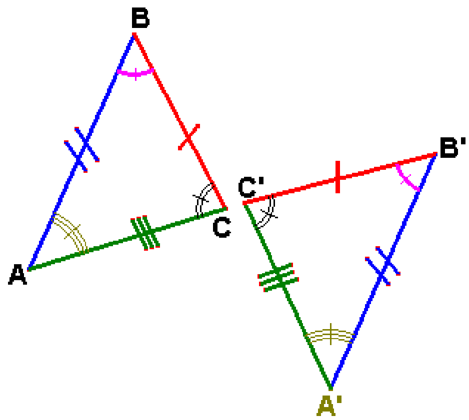
Para que dos triángulos sean **congruentes** se debe de cumplir seis igualdades, tres lados y tres ángulos.

Los tres lados correspondientes:

AB = A'B'

BC = B'C'

AC = A´C'



Los tres ángulos correspondientes:

∠**BAC** = ∠**B'A'C'**

∠**ABC** = ∠**A'B'C'**

∠**ACB** = ∠**A'C'B'**

*Si se cumple la igualdad de estos 6 elementos en dos triángulos, estos serán **congruentes,** ya que se puede sobreponer uno sobre el otro y coincidirán en todas sus partes. Esto equivale a que los tres lados y los tres ángulos (interiores) pueden hacerse coincidir con sus homólogos, es decir, los dos triángulos tienen la misma forma y el mismo tamaño.*

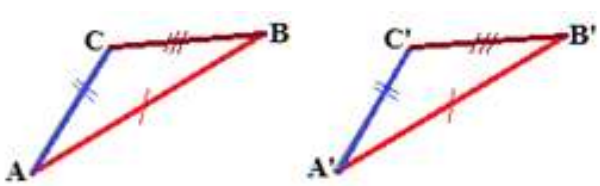
Notación: La palabra **congruencia** se representa con el símbolo ≅ ó ≡.

Para mostrar la congruencia de dos o más triángulos no es necesario hacer ver la igualdad de los 6 elementos, bastará con la igualdad de sólo 3, esto lo afirma los siguientes criterios de congruencia.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

Primer criterio: lado, lado, lado (LLL)

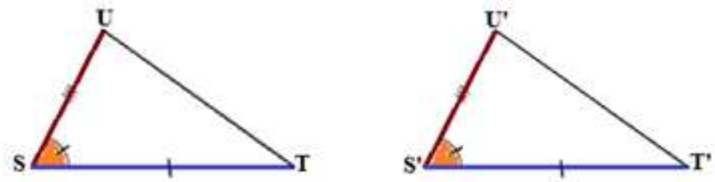
Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos son iguales en medida o congruentes a los lados correspondientes del otro triángulo. Es decir:



ΔABC ≅ ΔA'B'C' ya que AB = A'B',
BC = B'C'
CA = C'A'.

Segundo criterio: lado, ángulo, lado (LAL)

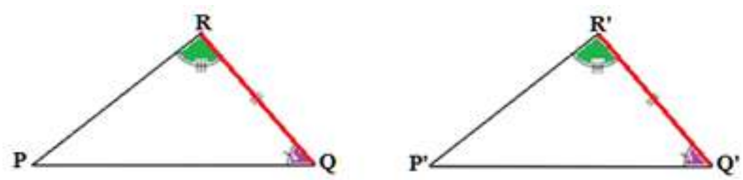
Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales en medida o congruentes con los del segundo triángulo. Es decir:



$\Delta STU \cong \Delta S'T'U'$ ya que $SU = S'U'$,
$\angle S = \angle S'$
$ST = S'T'$.

Tercer criterio: ángulo, lado, ángulo (ALA)

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos son respectivamente congruentes con los del segundo triángulo. Es decir:

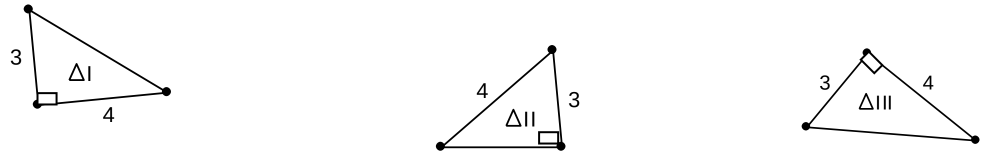


$\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$ ya que $\angle R = \angle R'$,
$RQ = R'Q'$
$\angle Q = \angle Q'$.

Sugerencia: Para reafirmar estos criterios los alumnos pueden ver algunos videos en las siguientes direcciones:
http://www.youtube.com/watch?v=nEEEEKAOao4&feature=player_embedded#at=11
http://www.youtube.com/watch?v=4iEZP0lH8xI

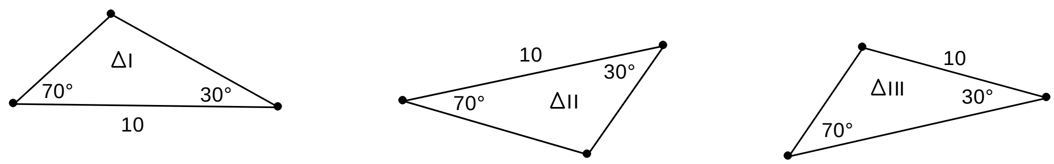
Actividad 1. En cada inciso indica qué triángulos son congruentes escribiendo los tres elementos que son iguales y el criterio de congruencia que justifica tu respuesta:

a)



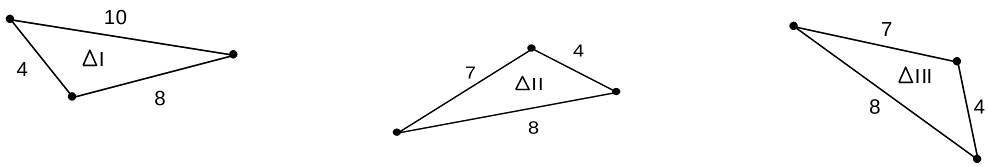
Respuesta __________

b)



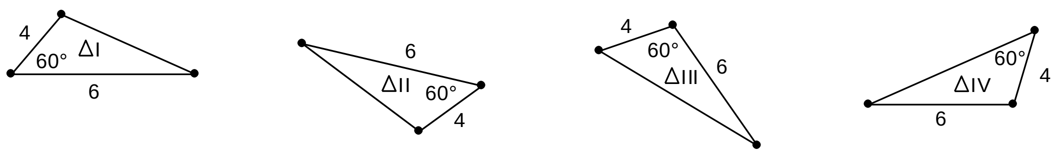
Respuesta __________

c)



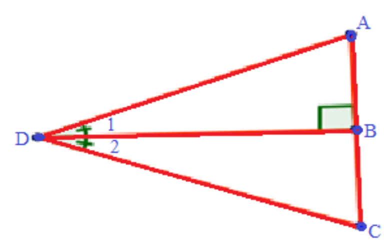
Respuesta _________

d)



Respuesta _____

EJEMPLO 1. En la siguiente figura, si $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\angle 1 = \angle 2$, entonces $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.



Justificación:

Paso 1. $\angle ABD = \angle DBC = 90^o$ ya que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

Paso 2. $\overline{BD} = \overline{BD}$ por ser lado común para ambos triángulos.

Paso 3. $\angle 1 = \angle 2$ por ser dato.

Conclusión: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ por criterio ALA.

EJEMPLO 2. En la siguiente figura, si $\overline{AC} = \overline{AD}$ y $\angle 1 = \angle 2$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.

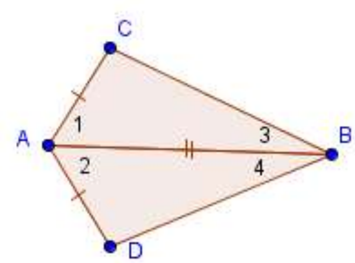
Justificación:

Paso 1. $\overline{AC} = \overline{AD}$ por ser dato.

Paso 2. $\angle 1 = \angle 2$ por ser dato.

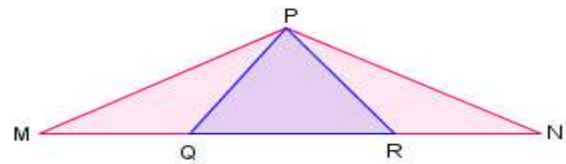
Paso 3. $\overline{AB} = \overline{AB}$ por ser lado común para ambos triángulos.

Conclusión: $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ por criterio LAL.



EJEMPLO 3. En la siguiente figura se cumple $\overline{MQ} = \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{NR}$, entonces:

$$\Delta PQM \cong \Delta PRN.$$



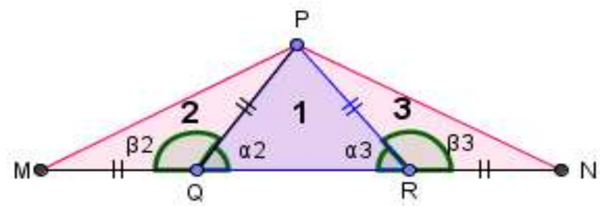
Justificación:

1º) $\overline{PQ} = \overline{PR}$ por ser dato.

2º) Como PQ = PR el ΔPQR es isósceles, por lo que $\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3$, y en consecuencia, $\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3$ por ser suplementos de ángulos iguales.

3º) $\overline{MQ} = \overline{RN}$ por ser dato.

Conclusión: $\Delta PQM \cong \Delta PRN$ por criterio LAL.



EJEMPLO 4. En la siguiente figura, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, BD es una diagonal, entonces $\Delta ABD \cong \Delta BCD$.

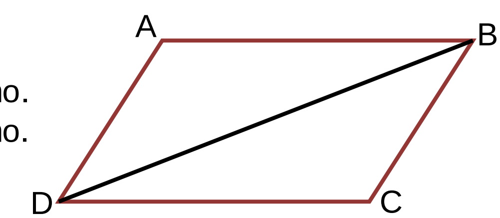
Justificación:

1º) $\overline{AB} = \overline{DC}$ por ser lados opuestos del paralelogramo.

2º) $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos del paralelogramo.

3º) BD es lado común en los dos triángulos.

Conclusión: $\Delta ABD \cong \Delta BCD$ por criterio LLL.



EJEMPLO 5.

Si $\overline{AC}$ = $\overline{AD}$ y $\angle 1 = \angle 2$. Demostrar que $\angle C = \angle D$.

Justificación:

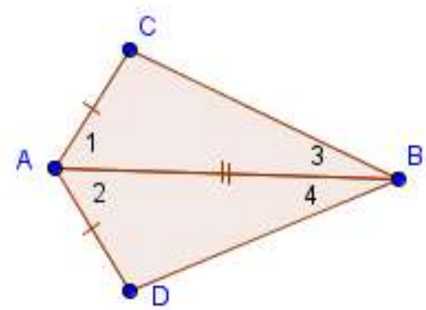
$\overline{AC}$ = $\overline{AD}$ (dato)

$\angle$ 1 = $\angle$ 2 (dato)

$\overline{AB}$ (Lado común)

$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (L-A-L)

Al ser los triángulos congruentes, sus seis elementos son iguales, en particular: $\angle$ C = $\angle$ D

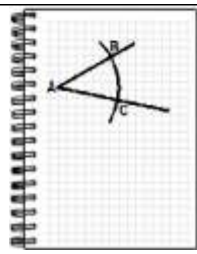
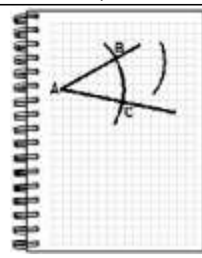
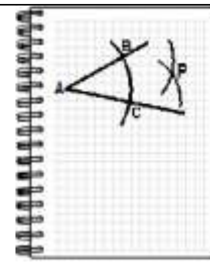
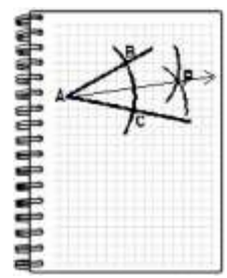


3.2.1 Justificación de las construcciones de:
a) Bisectriz de un ángulo. b) Mediatriz de un segmento. c) Perpendicular a una recta.

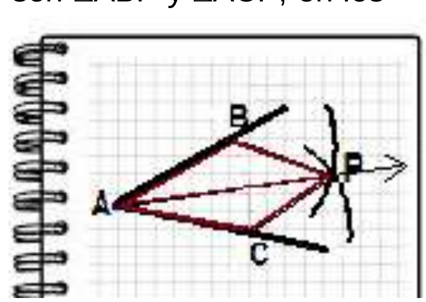
JUSTIFICACIONES:

a) Bisectriz de un ángulo.
Sea el ∠BAC un ángulo cualquiera dado, hay que dividirlo en dos partes iguales. La recta que lo divide es llamada Bisectriz.

Construcción.
La construcción se hizo en la unidad 2, es la siguiente:

				
Se traza un ángulo cualquiera llamando a su vértice A.	1º. Con centro en A se traza un arco de circunferencia que corte a los dos lados del ángulo en *B* y *C.*	2º. Con centro en *B*, el compás se abre una longitud cualquiera y se traza un arco de circunferencia lo suficiente grande dentro del ángulo.	3° Con la misma abertura del compás y con centro en *C*, se traza otro arco de circunferencia que corte al arco anterior. Sea P el punto de intersección.	4º. Se traza la semirrecta desde A y que pase por P, entonces ∠BAP = ∠CAP

Justificación.
Se unen los puntos BP y CP, y se forman dos triángulos que son ΔABP y ΔACP, en los cuales se cumple:



1) $\overline{AB} = \overline{AC}$ por ser radios del mismo círculo.
2) $\overline{BP} = \overline{CP}$ por ser radios iguales por construcción.
3) $\overline{AP}$ es lado común en ambos triángulos.

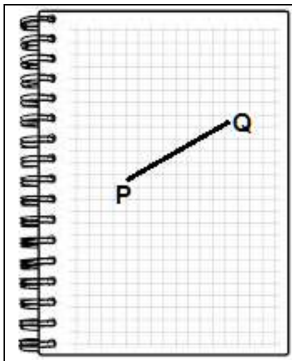
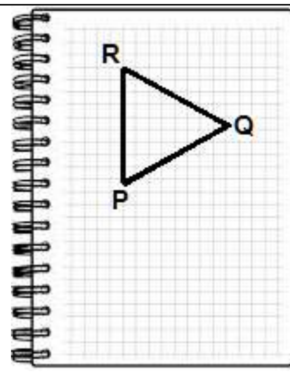
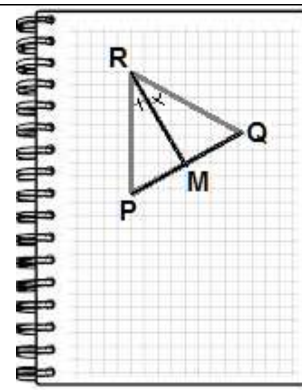
Conclusión: ΔABP ≅ ΔACP por criterio LLL.

Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes serán iguales, en consecuencia, ∠BAP = ∠CAP y el segmento AP es la Bisectriz del ∠BAC.

b) Mediatriz de un segmento.

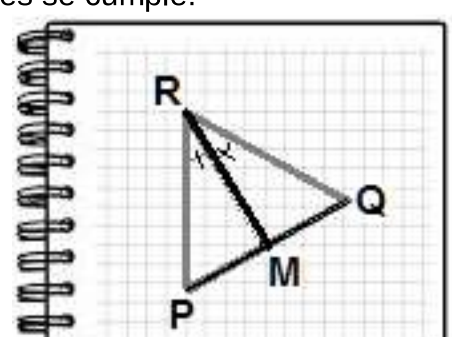
Mediatriz es la línea recta que pasa por el punto medio de un segmento perpendicular a este.
Sea $\overline{PQ}$ un segmento cualquiera dado, hay que dividirlo en dos partes iguales por una recta que sea perpendicular a $\overline{PQ}$.

Construcción.
Una construcción se hizo en la unidad 2, otra es la siguiente:

		
Segmento dado $\overline{PQ}$.	1º. Constrúyase sobre $\overline{PQ}$ el triángulo equilátero PQR.	2º. Dividir en dos ángulos iguales el $\angle PRQ$, llamar $\overline{RM}$ a dicha bisectriz.

Afirmación: M será el **punto medio** de $\overline{PQ}$, y $\overline{RM}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$, es decir, $\overline{RM}$ es la Mediatriz de $\overline{PQ}$.

Justificación.
Se tiene dos triángulos que son ΔPRM y ΔQRM, en los cuales se cumple:



1) $\overline{PR} = \overline{QR}$ ya que Δ PQR es equilátero.
2) $\angle PRM = \angle QRM$ por construcción.
3) $\overline{RM}$ lado común.

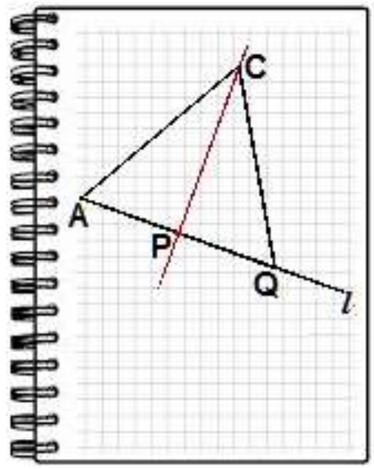
Conclusión: $\Delta PRM \cong \Delta QRM$ por criterio LAL.

Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes serán iguales, en consecuencia, $\overline{PM} = \overline{MQ}$ y $\angle PMR = \angle QMR$. Pero $\angle PMR + \angle QMR = 180°$, es decir, $\angle PMR = \angle QMR = 90°$.
Así, el segmento $\overline{RM}$ es la Mediatriz de $\overline{PQ}$.

c) Perpendicular a una recta.

Como ya lo vimos en la unidad 2, hay dos casos.

Caso 1) Trazar una línea recta que forme ángulos de 90° con una recta dada desde un punto que pertenece a ella.



Construcción.
Sea l la recta dada y P un punto sobre ella.
Se toma un punto cualquiera A sobre ella y se marca otro punto Q sobre la recta de tal forma que AP = PQ.
Y se construye un triángulo equilátero sobre AQ.
El triángulo equilátero es AQC, y se traza la recta CP.

Afirmación: La línea recta CP forma ángulos rectos con la recta l dada desde el punto P dado en ella.

Justificación.
Se tiene dos triángulos que son ΔACP y ΔQCP, en los cuales se cumple:

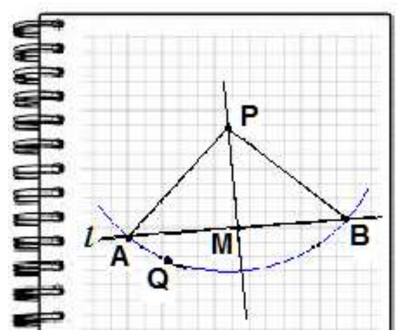
1) $\overline{AC} = \overline{QC}$ ya que Δ ACQ es equilátero.
2) $\overline{AP} = \overline{PQ}$ por construcción.
3) $\overline{CP}$ lado común.

Conclusión: $\Delta ACP \cong \Delta QCP$ por criterio LLL.

Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes son iguales, es decir, $\angle APC = \angle QPC$. Pero $\angle APC + \angle QPC = 180°$, entonces, $\angle APC = \angle QPC = 90°$.

Así, CP es perpendicular a l.

Caso 2) Trazar una línea recta que forme ángulos de 90° con una recta dada desde un punto fuera de ella.



Construcción.
Sea l la recta dada y P un punto fuera de ella.
Se toma un punto cualquiera Q al otro lado de la recta l, y con centro en P y radio PQ se traza un arco de circunferencia que corte a l, en los puntos A y B. Se traza el punto medio M de $\overline{AB}$ y se une PM.

Afirmación: La línea recta que pasa por P y M forma ángulos rectos con la recta dada l, desde el punto P que no está en ella.

Justificación.
Se tiene dos triángulos que son ΔAPM y ΔBPM, en los cuales se cumple:

1) $\overline{AP} = \overline{BP}$ por ser radios de la circunferencia.
2) $\overline{AM} = \overline{BM}$ ya que M es punto medio de $\overline{AB}$.
3) $\overline{PM}$ lado común.

Conclusión: $\Delta APM \cong \Delta BPM$ por criterio LLL.

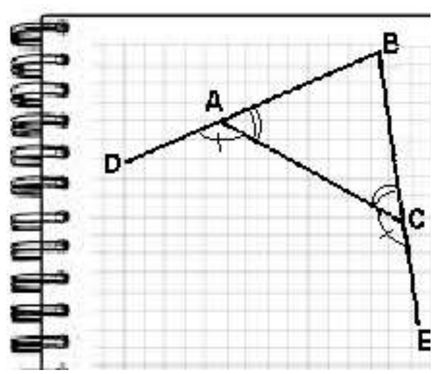
Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes son iguales, es decir, $\angle AMP = \angle BMP$. Pero $\angle AMP + \angle BMP = 180°$, entonces, $\angle AMP = \angle BMP = 90°$.

Así, $\overline{PM}$ es perpendicular a l.

3.2.2 Teorema del triángulo isósceles y su recíproco. Justificación.

Teorema: En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y al prolongar los dos lados iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.

Construcción.

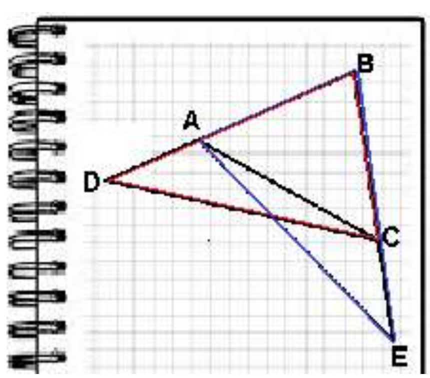


Sea el ΔABC un triángulo isósceles, con $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Se prolonga $\overline{BA}$ hasta D y $\overline{BC}$ hasta E de tal forma que $\overline{BE} = \overline{BD}$.

Afirmación: $\angle DAC = \angle ECA$ y $\angle BAC = \angle BCA$.

Justificación.



Se une $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$. Se tienen los triángulos ΔABE y ΔCBD en los cuales se cumple:

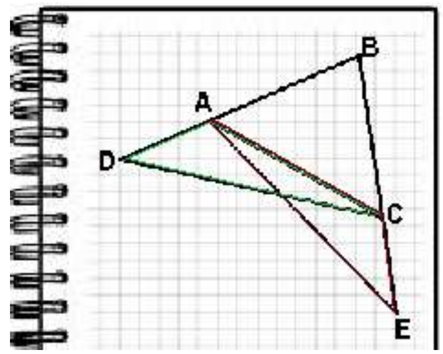
1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ por construcción.
2) $\overline{BE} = \overline{BD}$ por construcción.
3) $\angle B$ es común en ambos triángulos.

Conclusión: $\Delta ABE \cong \Delta CBD$, por criterio ALA.

Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes son iguales, y podemos afirmar:

$\overline{AE} = \overline{CD}$, $\angle BAE = \angle BCD$ y $\angle BEA = \angle BDC$.

Por otro lado:



En los triángulos ΔACE y ΔACD se cumple:

1) $\overline{AC}$ lado común en ambos triángulos.

2) $\overline{AE} = \overline{CD}$ por la justificación anterior.

3) Como $\overline{BE} = \overline{BD}$ y $\overline{AB} = \overline{BC}$, al hacer la resta:

$\overline{BE} - \overline{BC} = \overline{BD} - \overline{AB}$ se tiene $\overline{CE} = \overline{AD}$

Conclusión: $\Delta ACE \cong \Delta ACD$.

Al ser los dos triángulos congruentes sus 6 elementos correspondientes son iguales, así podemos afirmar que: $\angle DAC = \angle ECA$ y $\angle CAE = \angle ACD$.
Además, ya se mostró que $\angle BAE = \angle BCD$, al hacer la resta, se cumple:

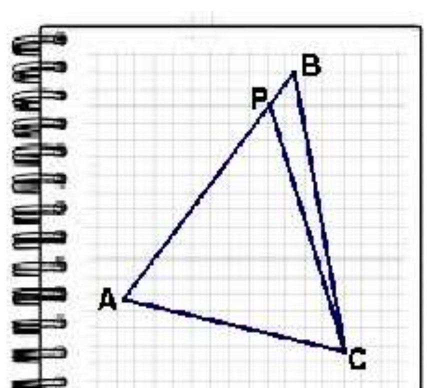
$$\angle BAE - \angle CAE = \angle BCD - \angle ACD$$
$$\angle BAC = \angle BCA$$

Así, queda justificada la afirmación.

Su recíproco sería:
Si dos ángulos en un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.

Sea el ΔABC en el cual $\angle BAC = \angle BCA$. Afirmación: $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Justificación.



Ya que si $\overline{AB}$ no es igual a $\overline{BC}$, uno de ellos es mayor,

supongamos que $\overline{AB}$ es mayor.

Se toma un punto P de $\overline{AB}$ de tal forma que $\overline{AP} = \overline{BC}$, entonces en los triángulos ΔAPC y ΔABC se cumple:

1) $\overline{AP} = \overline{BC}$ por construcción.

2) $\angle BAC = \angle BCA$ por dato, pero $\angle PAC = \angle BAC$.

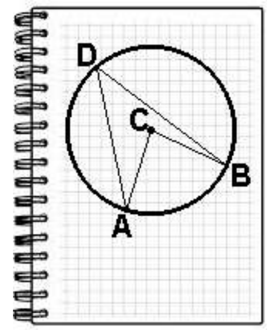
Entonces, $\angle PAC = \angle BCA$.

3) El lado AC es común.

Conclusión: $\Delta APC \cong \Delta ABC$ por criterio LAL.
Lo cual es absurdo, ya que el mayor no puede ser igual al menor.

Por lo tanto $\overline{AB} = \overline{BC}$.

3.2.3 Relación entre el ángulo central e inscrito en una circunferencia. Justificación.



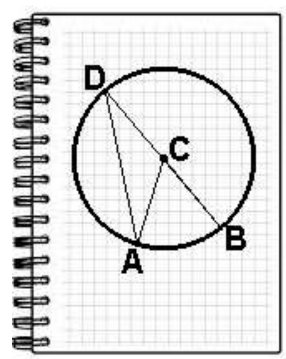
Recordemos que en una circunferencia la medida de un ángulo central es igual a la medida del arco que abarca.

Teorema: La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central.

Ángulo inscrito: $\angle ADB = \dfrac{\angle ACB}{2}$.

Justificación. Existen tres casos posibles.

Caso 1: Cuando un lado del $\angle ADB$ es un diámetro de la circunferencia.



En el ΔACD, AC = DC por ser radios de la circunferencia, entonces $\angle DAC = \angle ADC$.

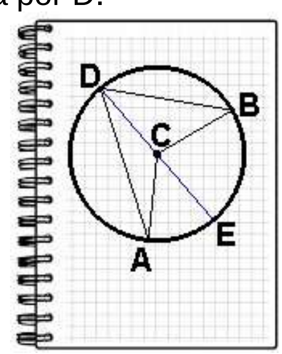
El $\angle ACB$ es ángulo exterior, entonces $\angle ACB = \angle ADC + \angle DAC$.

Es decir, $\angle ACB = \angle ADC + \angle ADC$ ya que $\angle DAC = \angle ADC$.

Entonces $\angle ACB = 2\angle ADC = 2\,\angle ADB$.

Despejando, $\angle ADB = \dfrac{\angle ACB}{2}$

Caso 2: Cuando A y B están en lados opuestos al diámetro que pasa por D.

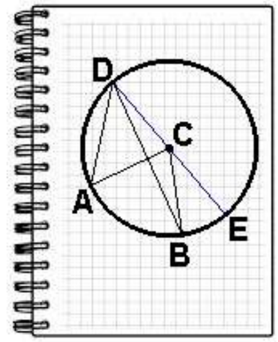


Por el caso 1, el $\angle ADE = \dfrac{\angle ACE}{2}$ y el $\angle EDB = \dfrac{\angle ECB}{2}$.

El $\angle ADB = \angle ADE + \angle EDB = \dfrac{\angle ACE}{2} + \dfrac{\angle ECB}{2} = \dfrac{\angle ACE + \angle ECB}{2}$.

Es decir, $\angle ADB = \dfrac{\angle ACB}{2}$.

Caso 3: Cuando A y B están del mismo lado del diámetro que pasa por D.



Por el caso 1, el $\angle ADE = \dfrac{\angle ACE}{2}$ y el $\angle BDE = \dfrac{\angle BCE}{2}$.

El $\angle ADB = \angle ADE - \angle BDE = \dfrac{\angle ACE}{2} - \dfrac{\angle BCE}{2} = \dfrac{\angle ACE - \angle BCE}{2}$.

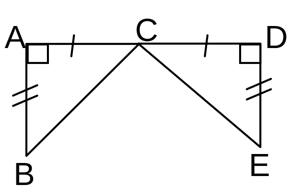
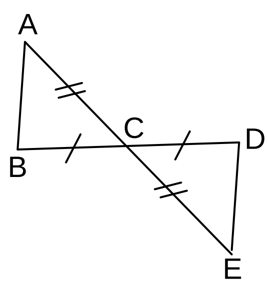
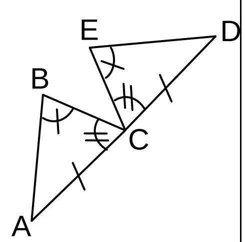
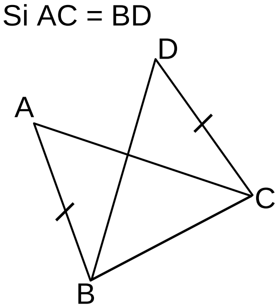
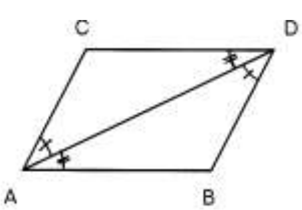
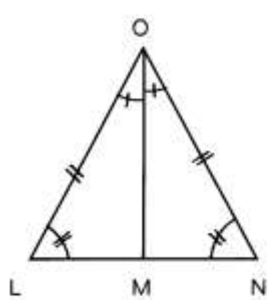
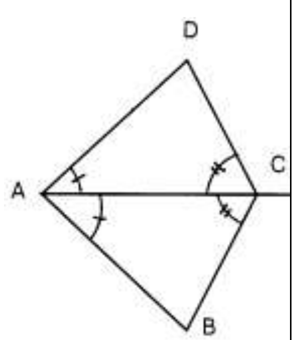
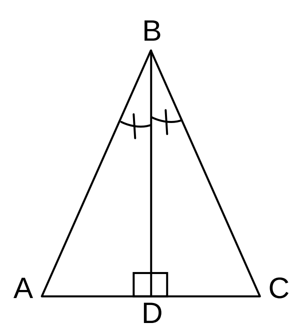
Es decir, $\angle ADB = \dfrac{\angle ACB}{2}$.

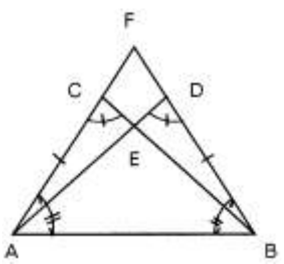
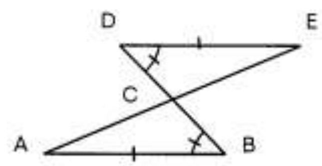
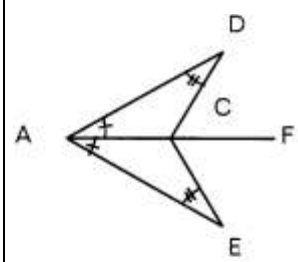
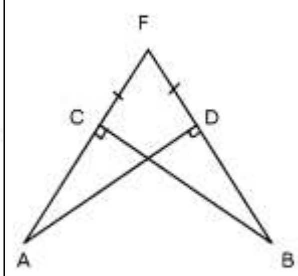
Corolario: Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Corolario: Ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son congruentes.

EJERCICIOS 3.2

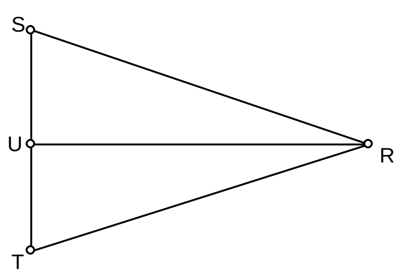
I. En las siguientes figuras indique el criterio mediante el cual los triángulos señalados son congruentes.

a. ΔABC y ΔCDE 	**b.** ΔABC y ΔCDE 	**c.** ΔABC y ΔDEC. 	**d.** ΔABC y ΔDCB. Si AC = BD 
e. ΔABD y ΔACD. 	**f.** ΔLOM y ΔNOM. 	**g.** ΔABC y ΔADC. 	**h.** ΔABD y ΔCBD. 

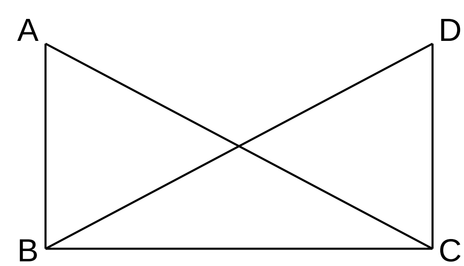
i. ΔACE y ΔBDE.	**j.** ΔABC y ΔDEC.	**k.** ΔADC y ΔAEC.	**l.** ΔAFD y ΔBFC.
			

II. En cada caso justificar lo que se pide y enuncia el criterio que usas.

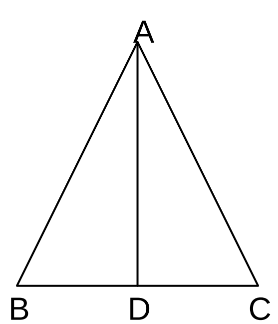
1) El ΔSRT es isósceles, U es punto medio de ST. Mostrar que ΔSRU ≅ ΔURT



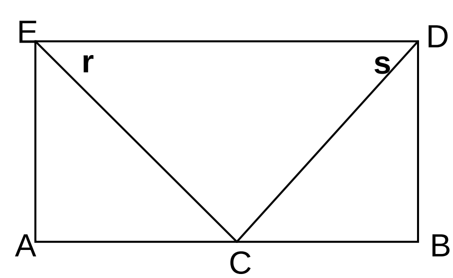
2) AB⊥BC, DC⊥BC y AB = DC. Mostrar que ΔABC ≅ ΔBDC.



3) AD⊥BC, y AD es bisectriz del ∠BAC, mostrar que ΔABD ≅ ΔADC.

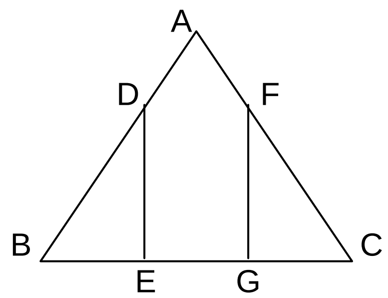


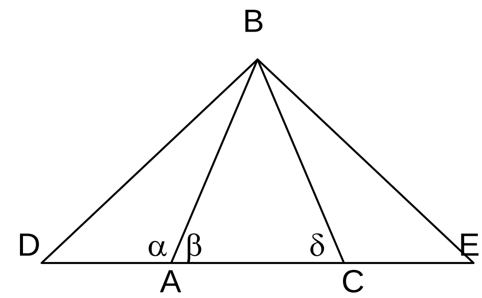
4) ABDE es un rectángulo y ∠**r** = ∠**s** mostrar que ΔACE ≅ ΔBDC.



5) AB = AC, BC está trisecado por E y G, DE⊥BC y FG⊥BC.
Mostrar que ΔBDE ≅ ΔFGC.

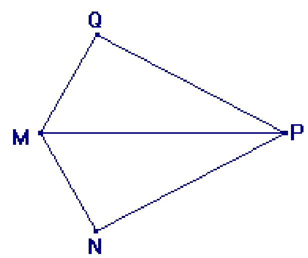
6) AD = CE, ∠α +∠δ = 180° mostrar que ΔABD ≅ ΔBCE.

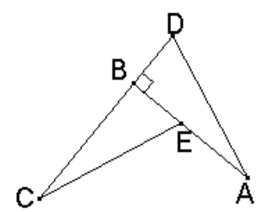




7) Mostrar que el Δ MQP ≅ Δ MPN.
Datos:
MP es bisectriz del ∡QMN.
MP es bisectriz del ∡QPN.

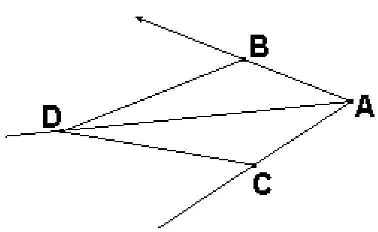
8) Mostrar que ΔBCE ≅ ΔABD.
Datos: AB ⊥ CD
BE = BD
BC = BA

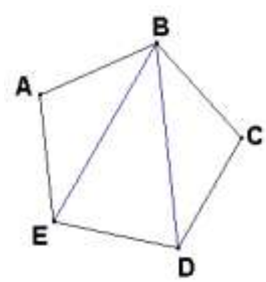




9) Mostrar que ΔACD ≅ ΔABD.
Si AD es bisectriz del ∡BAC
y AB = AC.

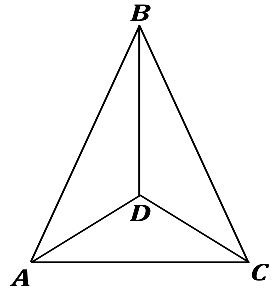
10) ABCDE es un pentágono regular, mostrar que ΔABE ≅ ΔBCD.





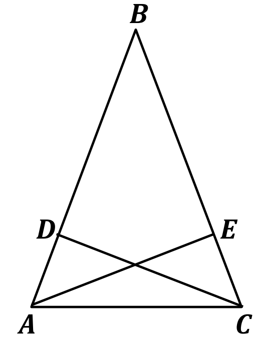
11) ΔABC y ΔADC son isósceles, mostrar que

ΔABD ≅ ΔBCD.

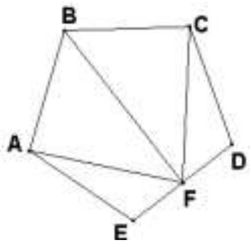


12) ΔABC es isósceles y AD = EC, mostrar que

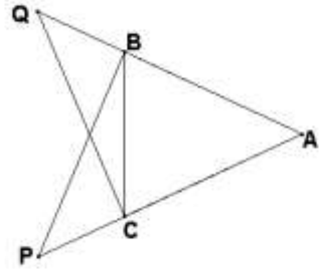
ΔABE ≅ ΔCBD.



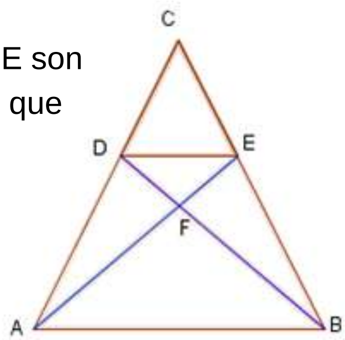
13) ABCDE es un pentágono regular, F es punto medio de ED, mostrar que $\triangle AEF \cong \triangle CDF$.



14) AQ = AP, el ΔABC es isósceles, mostrar que $\triangle BCQ \cong \triangle CBP$.



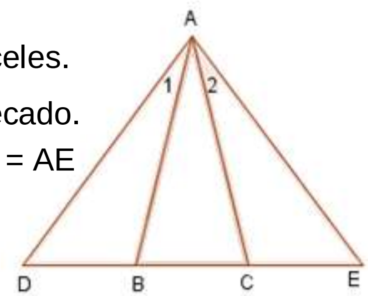
15) $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son isósceles, mostrar que AE = BD.



16) $\triangle ABC$ es isósceles.

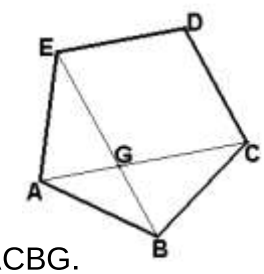
$\measuredangle DAE$ está trisecado.

Mostrar que AD = AE

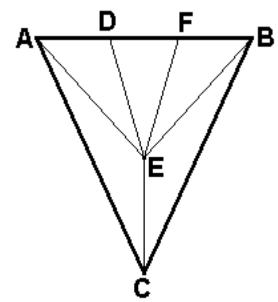


17) ABCDE es un pentágono regular.

Mostrar que $\Delta EAG \cong \Delta CBG$.

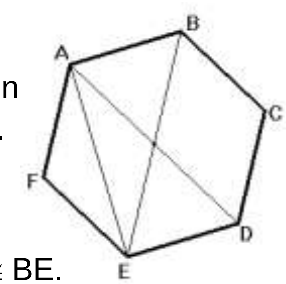


18) AC = BC, DE = FE, CE es bisectriz del $\angle ACB$, y $\angle AED = \angle BEF$. Mostrar que $\Delta AED \cong \Delta BEF$

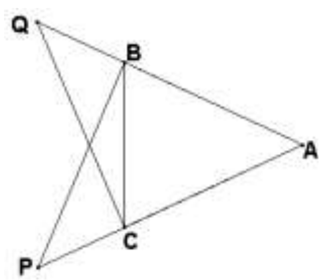


19) ABCDEF es un hexágono regular.

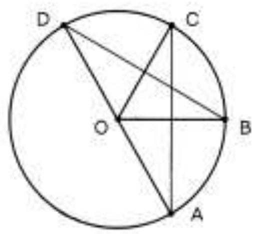
Mostrar que AD ≅ BE.



20) BQ = CP, el ΔABC es isósceles, mostrar que $\angle AQC \cong \angle APB$.

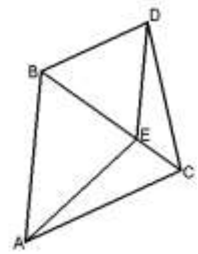


21) Datos: arco DC = arco AB



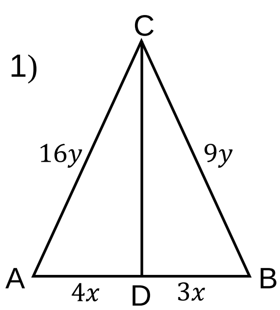
Mostrar que $\triangle AOC \cong \triangle BOD$

22) En la siguiente figura $\triangle ABC$ y $\triangle BDE$ son equiláteros, mostrar que $\triangle ABE \cong \triangle BDC$



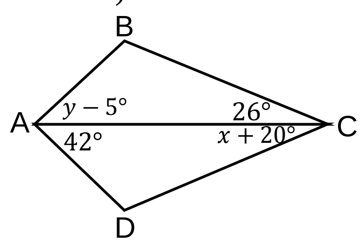
III. En cada una de las siguientes figuras los triángulos indicados son congruentes, encuentra el valor de x y el de y.

1)



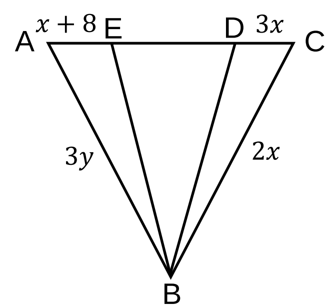
$\triangle ACD \cong \triangle BCD$

2)



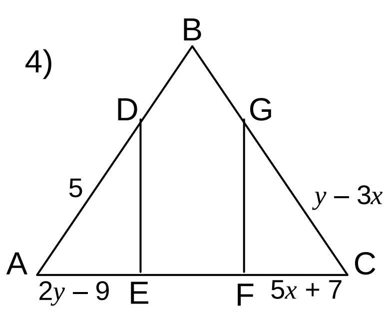
$\triangle ABC \cong \triangle ACD$

3)



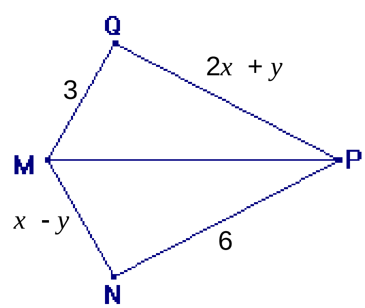
$\triangle AEB \cong \triangle CDB$

4)



$\triangle ADE \cong \triangle CGE$

5)



$\triangle MQP \cong \triangle MNP$

3.3 SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS.

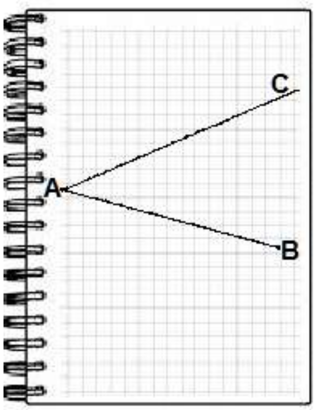
3.3.1 División de un segmento en *n* partes iguales. Construcciones.

Para dividir un segmento en dos partes iguales basta con utilizar la mediatriz. Pero si queremos dividir el segmento en 3, 5, 6 o más partes iguales, la mediatriz no nos sirve y habrá que utilizar el procedimiento que se explica a continuación.

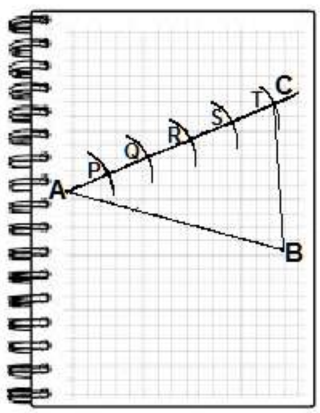
Ejemplo: Con regla y compás, dividamos un segmento AB dado, en 5 partes iguales.

Solución:

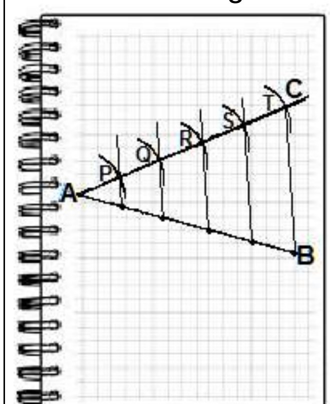
Paso 1) Supongamos que el segmento dado es AB. Trazamos un nuevo segmento cualquiera desde A, llamemósle AC.



Paso 2) Con el compás y la misma abertura, trazamos 5 arcos de circunferencia sobre AC, como se muestra en la figura y se une la última marca del arco T con B.



Paso 3) Se trazan rectas paralelas al segmento TB que pasen por P, Q, R y S. Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan las 5 partes iguales en que se divide dicho segmento.



Para mostrar que la construcción es cierta, se hace por medio de semejanza de triángulos, ya que en el último dibujo hay ____ triángulos. Y al ser semejantes se da la igualdad entre las partes en que se divide el segmento AB.

Así pues, es necesario que estudiemos la Semejanza de Triángulos.

3.3.2 Criterios de semejanza de triángulos.

Dos triángulos son **semejantes** si:

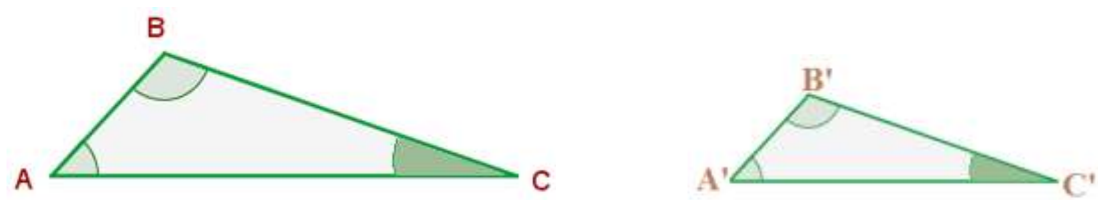
Idea Intuitiva: Tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño.
Concepto formal: Sus 3 ángulos correspondientes u homólogos son iguales y sus 3 lados correspondientes u homólogos son proporcionales.

Al igual que en CONGRUENCIA, para mostrar que dos o más triángulos son SEMEJANTES no necesariamente tenemos que comprobar que sus seis elementos cumplen lo anterior, basta con analizar y justificar que se cumpla alguno de los siguientes criterios.

CRITERIOS DE SEMEJANZA

Primer criterio: ángulo, ángulo, ángulo (AAA)

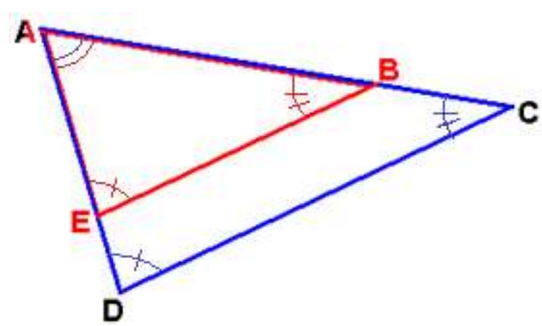
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos correspondientes iguales.
(Esta condición se reduce a encontrar dos ángulos homólogos iguales ya que el tercero en consecuencia será igual, ¿porqué?)



Es decir, si $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$ (Criterio ***aaa***)

EJEMPLO. En la siguiente figura BE ∥ DC, mostrar que $\triangle AEB \sim \triangle ADC$.

Solución:



$\measuredangle ABE = \measuredangle ACD$ por ser correspondientes entre las paralelas BE y DC.

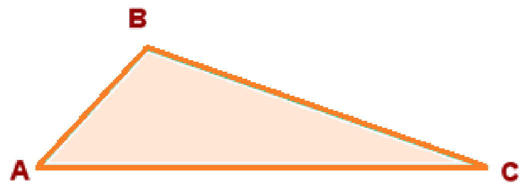
$\measuredangle AEB = \measuredangle ADC$ por ser correspondientes entre las paralelas BE y DC.

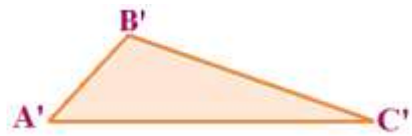
el $\measuredangle DAC$ es común en los dos triángulos

Entonces $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ ya que sus tres ángulos homólogos (correspondientes) son iguales.

Segundo criterio: lado, lado, lado (LLL)

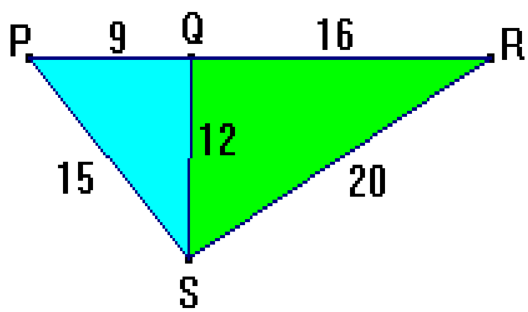
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados homólogos proporcionales.





Es decir, se cumple que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ (Criterio *lll*)

EJEMPLO. En la siguiente figura, mostrar que $\Delta PQS \sim \Delta QRS$.



Solución:
Observando los dos triángulos, sus lados homólogos son:

PS con SR hacemos $\frac{PS}{SR} = \frac{15}{20}$

PQ con SQ hacemos $\frac{PQ}{SQ} = \frac{9}{12}$

y QS con QR hacemos $\frac{QS}{QR} = \frac{12}{16}$

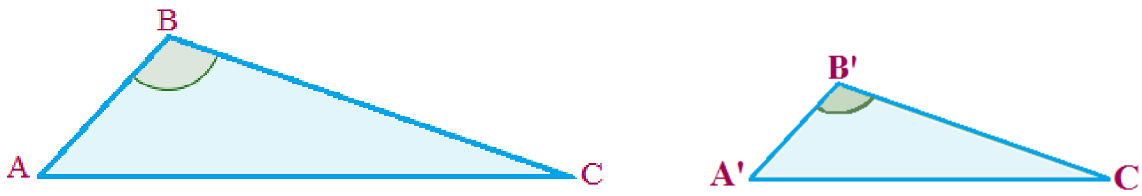
Se simplifica cada fracción y se tiene: $\frac{15}{20} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{12}{16}$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Al obtener la misma razón de semejanza ($\frac{3}{4}$), podemos decir que sus tres lados son proporcionales, por lo que $\Delta PQS \sim \Delta QRS$.

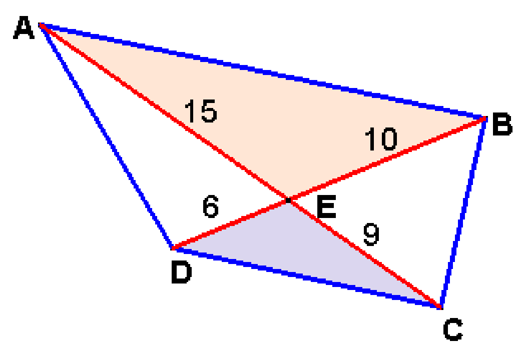
Tercer criterio: lado, ángulo, lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.



$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ y $\measuredangle B = \measuredangle B'$ (Criterio *lal*)

EJEMPLO. En la siguiente figura muestra que $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.



Solución:

$\measuredangle AEB = \measuredangle DEC$ por ser opuestos por el vértice.

Ahora, analicemos si los lados que se encuentran entre los ángulos mencionados en cada triángulo, son proporcionales. Es decir, debemos ver que

$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$. Para esto, sustituimos sus valores correspondientes:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad y \quad \frac{BE}{ED} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Como las fracciones son iguales, entonces se cumple que $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$.

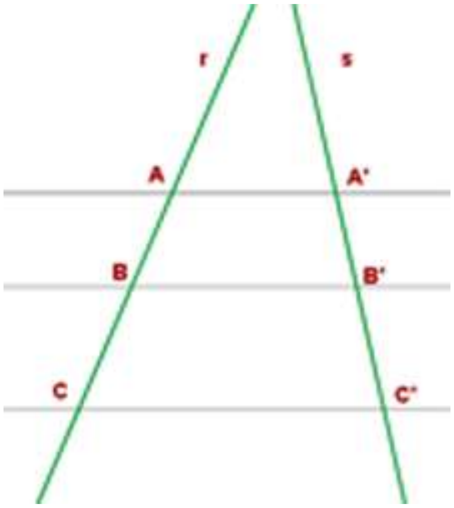
Este resultado nos dice que si dos de sus lados homólogos son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, podemos afirmar que $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

Para reafirmar estos criterios, puedes resolver los ejercicios de la sección 3.3

3.3.3 Teorema de Thales y su recíproco.

El Teorema de Thales dice:

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos determinados en una de las transversales son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

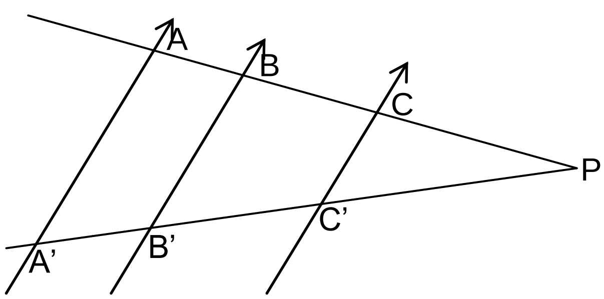


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Este Teorema se puede demostrar usando la semejanza de triángulos.

SUGERENCIA: ver video en https://www.youtube.com/watch?v=ujd6ylE4h88

En la siguiente figura, es fácil mostrarlo. Si las rectas que pasan por AA', BB', CC' son paralelas, entonces se cumple que $\Delta APA' \sim \Delta BPB' \sim \Delta CPC'$.

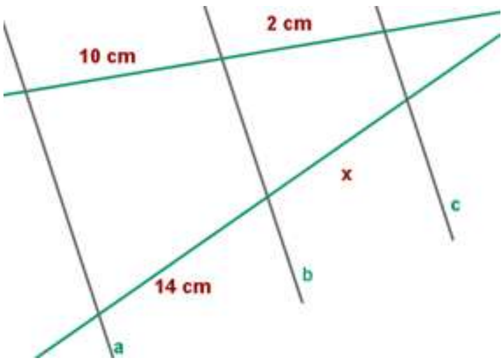


Al ser semejantes sus lados homólogos estos serán proporcionales. Así en los triángulos $\Delta APA' \sim \Delta BPB'$; se tiene: $\frac{AP}{BP} = \frac{A'P}{B'P}$, que se puede escribir como: $\frac{AB + BP}{BP} = \frac{A'B' + B'P}{B'P}$, separando los términos: $\frac{AB}{BP} + \frac{BP}{BP} = \frac{A'B'}{B'P} + \frac{B'P}{B'P}$ esto es, $\frac{AB}{BP} = \frac{A'B'}{B'P}$. Es decir, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BP}{B'P}$.

De forma similar se procede con los triángulos $\Delta BPB' \sim \Delta CPC'$.

Ejemplos usando el Teorema de Thales:

EJEMPLO 1. Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud del segmento x.

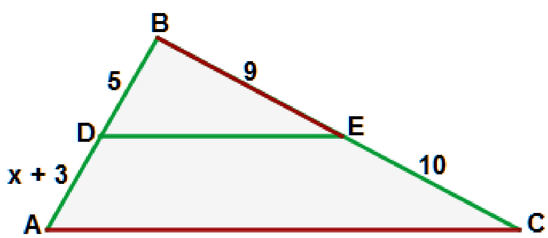


Solución:

$\frac{14}{10}=\frac{x}{2}$, despejando a x se tiene:

$x = \frac{14(2)}{10} = 2.8$ cm

EJEMPLO 2. Hallar las medidas del segmento AB, si AC ∥ DE.



Solución:

Por el teorema de Thales:

$\frac{x+3}{10}=\frac{5}{9}$, despejando a "x":

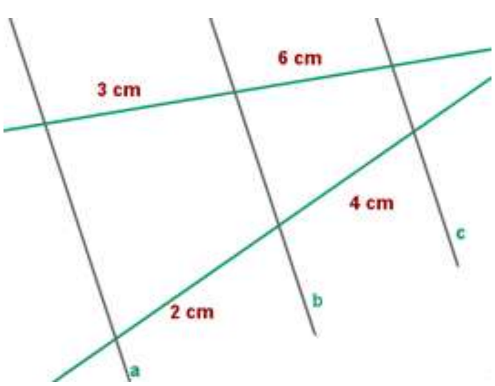
x + 3 = $\frac{5(10)}{9} = 5.\bar{5}$, entonces, x + 3 = $5.\bar{5}$

AB = x + 3 + 5 = $5.\bar{5}$ + 5 = $10.\bar{5}$ u.

El recíproco del Teorema de Thales dice:

Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas de tal forma que los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra, entonces las rectas serán paralelas.

EJEMPLO. En la siguiente figura, las rectas a y b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?



Solución:

Sí, porque se cumple el **Teorema de Thales**. Ya que se cumple la proporción de los segmentos correspondientes:

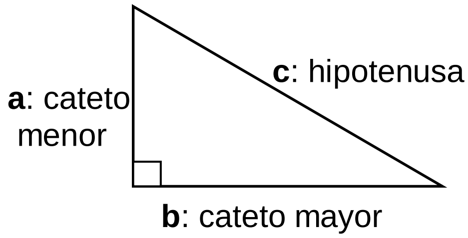
$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$, es decir, 3(4) = 6(2)

12 = 12, lo cual es verdadero.

3.3.4 Teorema de la altura de un triángulo rectángulo. Justificación.

Recordatorio:

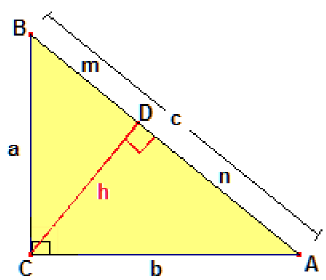
A los lados de un triángulo rectángulo se les llaman:



OBSERVACIÓN: De las tres alturas que tiene un triángulo rectángulo, dos de ellas son los catetos, la tercera es la altura sobre la hipotenusa.

El teorema de la altura nos da la relación entre la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo y los segmentos que determina sobre la misma o proyecciones de los catetos. Este dice así:

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



En el triángulo se cumple:

$h^2 = m \bullet n$

Justificación:

Los triángulos ΔACD y ΔBCD son semejantes, ya que:

1º) ΔACD ~ ΔABC (Tienen dos ángulos iguales, el tercero será igual, criterio *aaa*)

2º) ΔBCD ~ ΔABC (Tienen dos ángulos iguales, el tercero será igual, criterio *aaa*)

Por transitividad ΔACD ~ ΔBCD.

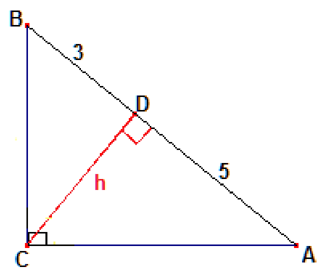
Al ser semejantes, sus lados homólogos son proporcionales, en particular:

$\frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD}$, es decir, $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$ que es lo mismo que $h^2 = m \bullet n$.

Otra forma de enunciar este teorema es:

"En todo triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que dividen a ésta".

EJEMPLO. En el siguiente triángulo rectángulo, encontrar el valor de su altura h si se sabe que BD = 3 y DA = 5.También calcular la medida de los catetos BC y AC.



Solución:

Por el teorema de la altura, $h^2 = 3(5) = 15$

$h = \sqrt{15} \approx 3.872$

Como $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ se cumple: $\frac{AC}{AB} = \frac{DA}{AC}$, es decir $\frac{AC}{8} = \frac{5}{AC}$.

Entonces, $(AC)^2 = 40$, $AC = \sqrt{40} \approx 6.324$

De forma similar, como $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ se cumple: $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, es decir $\frac{BC}{8} = \frac{3}{BC}$.

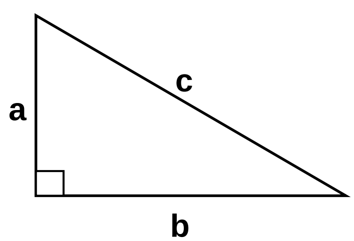
Entonces, $(BC)^2 = 24$, $BC = \sqrt{24} \approx 4.898$

Respuesta: $h = \sqrt{15}$, $AC = \sqrt{40}$ y $BC = \sqrt{24}$

Otra forma de hacerlo es usando el Teorema de Pitágoras que recordaremos a continuación.

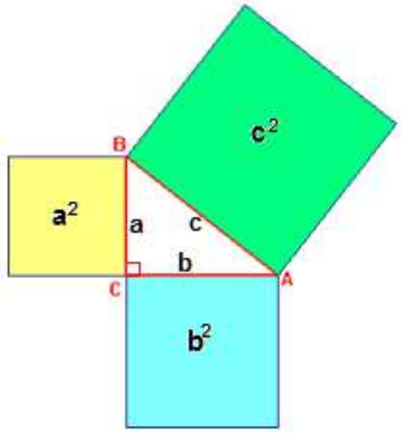
3.3.5 Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, en la siguiente figura se cumple:



$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$

El Teorema de Pitágoras en un inicio, fue aplicado para el cálculo de áreas, en este sentido, se puede interpretar como sigue:



Área del cuadrado de lado **c** = Área del cuadrado de lado **a** + Área del cuadrado de lado **b**

Es decir, $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$

Hay muchas demostraciones del Teorema de Pitágoras, el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro The Pythagorean Proposition de 1927. Se supone que Pitágoras lo demostró por semejanza de triángulos de la siguiente forma.

Justificación: Suponiendo que ΔABC es triángulo rectángulo en C. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, en la que determina los segmentos *a'* y *b'*, proyecciones en ella de los catetos *a* y *b*, respectivamente.

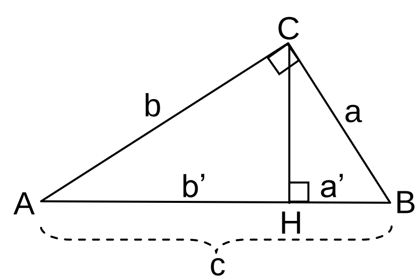
Ya se vió anteriormente que los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta BCH$, por lo que:

1º) De la semejanza entre ΔABC y ΔACH:

$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b}$ que es lo mismo que $b^2 = c \bullet b'$

2º) De la semejanza de ΔABC y ΔBCH:

$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a}$ que es lo mismo que $a^2 = c \bullet a'$

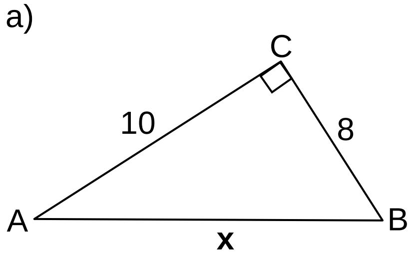


Entonces $a^2 + b^2 = c \bullet a' + c \bullet b' = c(a' + b') = c(c) = c^2$, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$

El Teorema de Pitágoras sólo se aplica en triángulos rectángulos, y por lo general se usa para encontrar la magnitud de uno de los lados del triángulo conociendo las medidas de los otros dos.

EJEMPLO. Encuentra el valor de **x** en cada una de las siguientes figuras.

a)



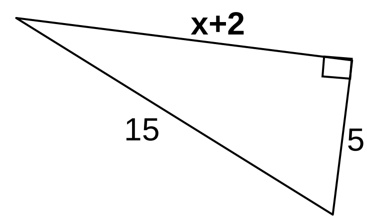
Solución:

Por el Teorema de Pitágoras,

$x^2 = 8^2 + 10^2 = 64 + 100 = 164$

$x = \sqrt{164} \approx 12.806$

b)



Solución:

Por el Teorema de Pitágoras,

$15^2 = 5^2 + (x+2)^2$ despejando:

$225 – 25 = (x+2)^2$

$200 = (x+2)^2$

$x+2 = +\sqrt{200} \approx 14.142$, entonces $x = 12.142$

Para magnitudes la raíz debe ser positiva.

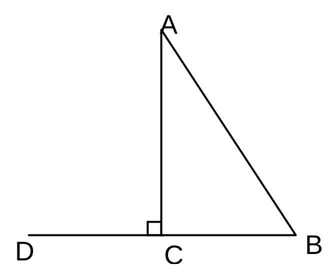
Recíproco del Teorema de Pitágoras:

Si en un triángulo se cumple que el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

Justificación:

Supongamos que en el ΔABC, se cumple que $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Desde el punto C se traza CD perpendicular a AC, con DC = BC.

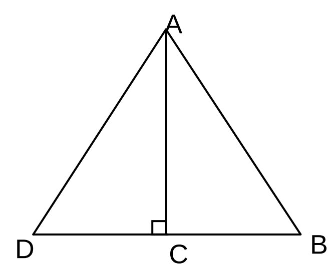


Se une A con D, y se forma el ΔADC con un ángulo de 90º.

Como BC = DC por construcción, entonces $BC^2 = DC^2$.

Sumando AC^2 en ambos lados se tiene:

$$BC^2 + AC^2 = DC^2 + AC^2 = AD^2$$



Ya que el ΔADC es triángulo rectángulo por construcción, entonces se cumple el Teorema de Pitágoras.

Es decir, $BC^2 + AC^2 = AD^2$, como $BC^2 + AC^2 = AB^2$, entonces, $AD^2 = AB^2$.

Si $AD^2 = AB^2$ entonces, AD = AB.

Así, se puede afirmar que $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ por el criterio LLL, ya que:

1) BC = DC por construcción.
2) AC lado común.
3) AB = AD por la deducción anterior.

Entonces, como ∆ADC es triángulo rectángulo implica que ∆ABC también es un triángulo rectángulo, y se cumple el Recíproco del Teorema de Pitágoras.

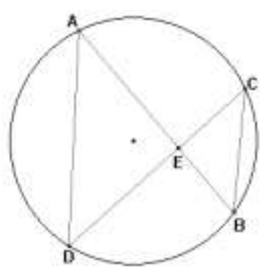
EJEMPLO. Las medidas de los lados de un triángulo son 13, 12 y 5. ¿Será un triángulo rectángulo?

Solución:
Por el Recíproco del Teorema de Pitágoras, si se cumple que $13^2 = 12^2 + 5^2$ se puede afirmar que el triángulo de lados 13, 12 y 5 es un triángulo rectángulo.
Calculando los cuadrados, $13^2 = 169$, $12^2 = 144$, $5^2 = 25$, en efecto, se cumple que 169 = 144 + 25.

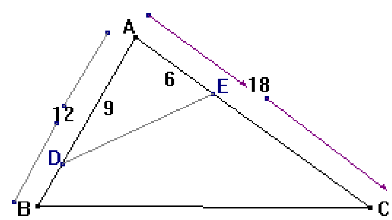
Observación: Tres medidas que cumplen el Teorema de Pitágoras se les llama Ternas Pitagóricas.

EJERCICIOS 3.3

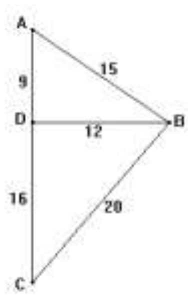
1) Mostrar que ∆AED ~ ∆CEB



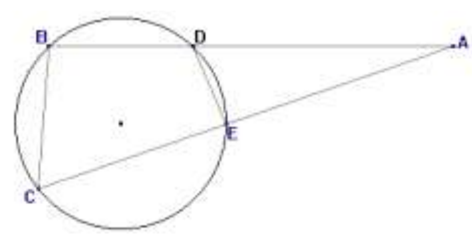
2) Mostrar que ∆ABC ~ ∆ADE



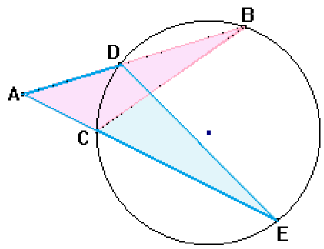
3) Mostrar que ∆ABD ~ ∆BCD



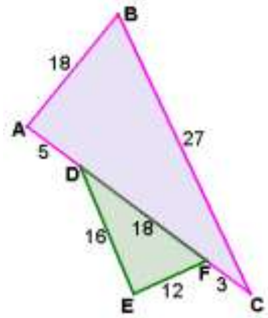
4) Mostrar que ∆ABC ~ ∆ADE



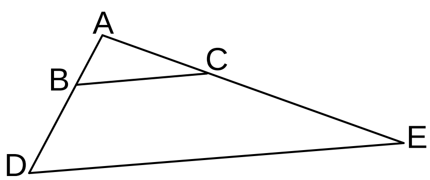
5) Mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$



6) Mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

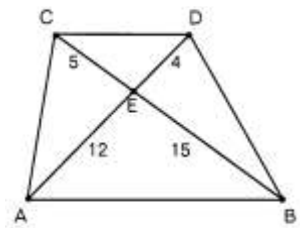


7) Mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$



Datos: BC || DE.

8)



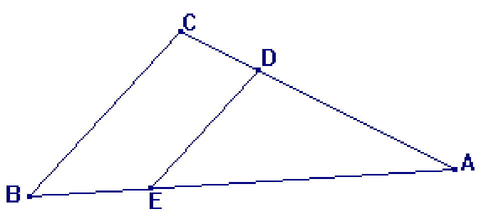
Mostrar que $\triangle CDE \sim \triangle ABE$

También mostrar que $\triangle AEC \sim \triangle BED$

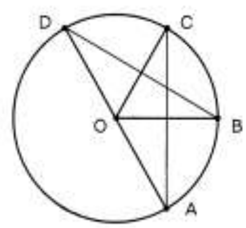
9) ¿Es semejante el $\triangle ADE$ al $\triangle ABC$?

Datos: AE = 27, BE = 12, AD = 18, DC = 8

Escribe su justificación.



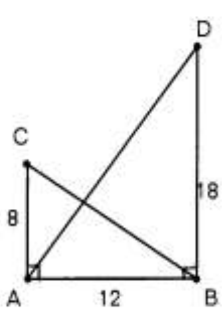
10)



Dato: arco AB = arco DC

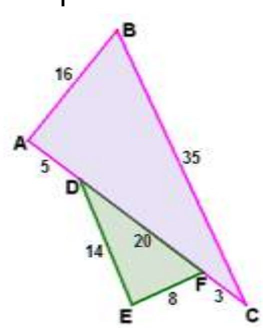
Mostrar que $\triangle AOC \sim \triangle BOD$

11)



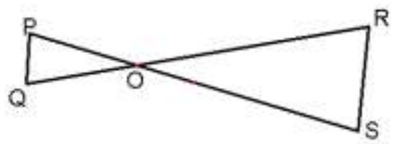
Mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle ABD$

12) Mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



13) En la siguiente figura mostrar que

$\triangle OPQ \sim \triangle OSR$

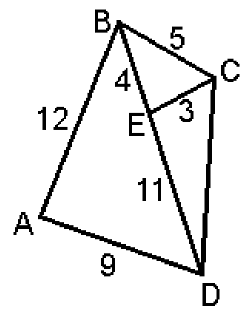


C

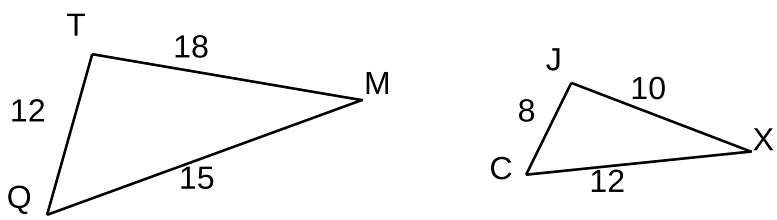
Dato: $\triangle OPQ$ y $\triangle OSR$ son isósceles.

14) En la siguiente figura, mostrar que

$\triangle ABD \sim \triangle BCE$



15) ¿Son semejantes los triángulos $\triangle TMQ$ y $\triangle CJX$?



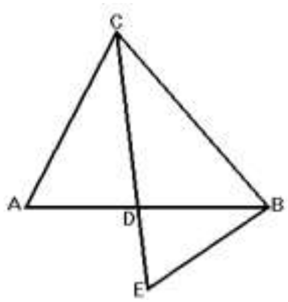
16) Los lados de un triángulo miden 24 m, 18 m y 36 m, respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12 m, 16 m y 24 m, respectivamente. Determina si son o no semejantes, justifica tu respuesta.

17) Los lados de un triángulo miden 36 m, 42 m y 54 m, respectivamente. Si en un triángulo semejante a éste, el lado homólogo del primero mide 24 m, hallar los otros dos lados de este triángulo.

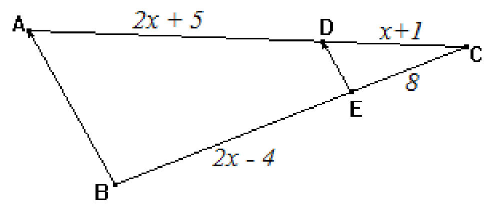
18) La razón de semejanza del triángulo ABC con el triángulo A'B'C' es 3:4. Si los lados del primero son 18, 21 y 30, determina los lados del segundo.

19) Los lados de un triángulo rectángulo miden 6 m, 8 m y 10 m, respectivamente. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero si su hipotenusa mide 15 m?

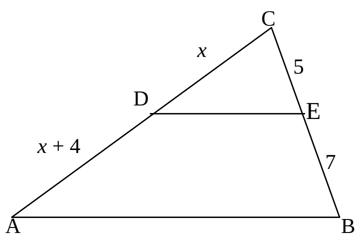
20) Si en el ΔABC, CE es la bisectriz del $\angle ACB$ y $\angle ABE = \angle ACD$, mostrar que $\Delta ACD \sim \Delta DBE$ y que $\Delta ADC \sim \Delta CEB$.



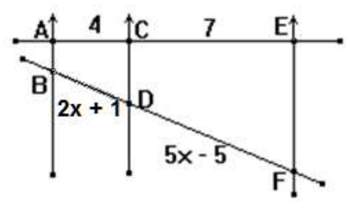
21) En la siguiente figura AB $\parallel$ DE. Encuentra el valor de *x* y la magnitud de AC y de BC.



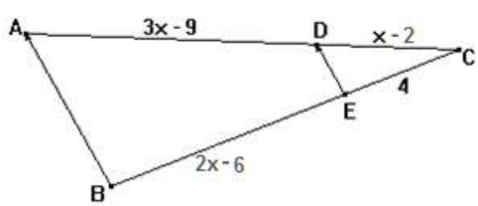
22) En la siguiente figura DE $\parallel$ AB. Encuentra el valor de *x* y la magnitud de AC.



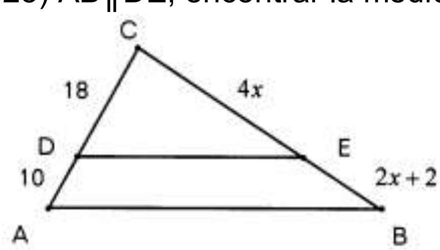
23) Encuentra el valor de *x* y el de BF, si las rectas AB, CD y EF son paralelas.



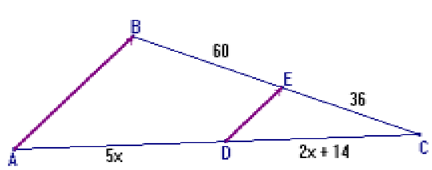
24) AB $\parallel$ DE , encuentra el valor de *x* y el de AC.



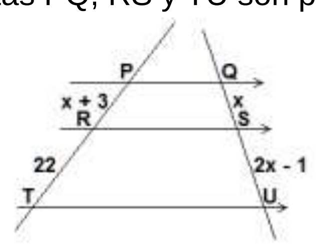
25) AB $\parallel$ DE, encontrar la medida de BC.



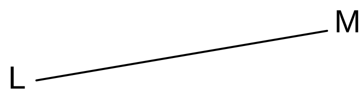
26) Encuentra el valor de x y el de AC, si las rectas AB y DE son paralelas.



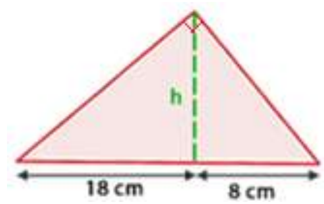
27) Encuentra el valor de x y el de QU, si las rectas PQ, RS y TU son paralelas.



28) Con regla y compás dividir el segmento $\overline{LM}$ en 5 partes iguales.



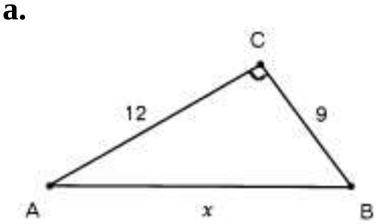
29) Calcula la altura de un triángulo rectángulo con los datos que se muestran en la figura:



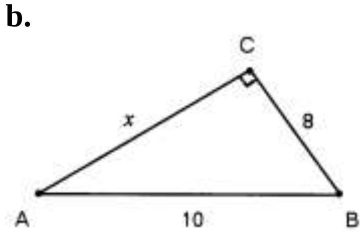
30) En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa mide 16 cm y la proyección ortogonal de uno de sus catetos mide 32 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa de dicho triángulo?

31) Usando el Teorema de Pitágoras, encuentra el valor de x en cada caso.

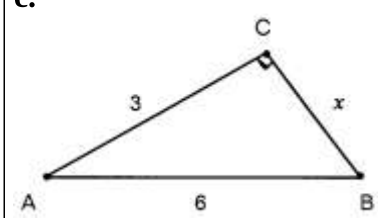
a.



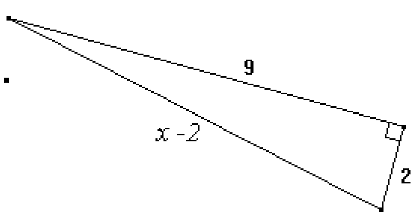
b.



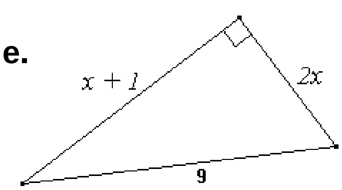
c.



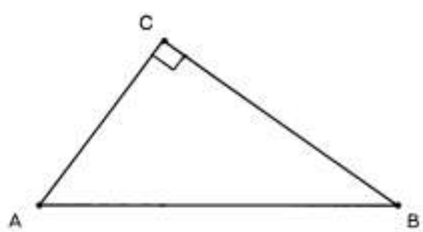
d.



e.



32) Usando la siguiente figura y el Teorema de Pitágoras, completar la siguiente tabla:

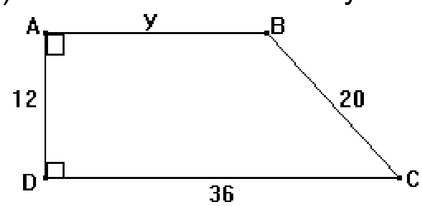


a.	AB	AC	BC
b.		6	8
c.		3	3
d.	12	8	
e.	1		½
f.	6	$\sqrt{3}$	
g.	$\sqrt{5}$		$\sqrt{3}$
h.		$\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$
i.	12		4
j.	1	½	
k.	1		¼

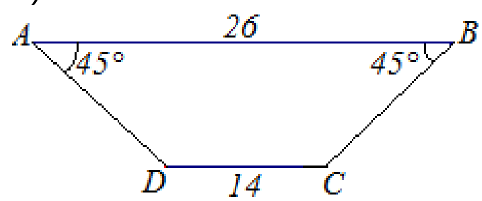
33) Hacer una figura para contestar los siguientes ejercicios:
a) Encontrar la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 5.
b) Las diagonales de un rombo miden 12 y 8, ¿cuál es la medida del lado del rombo?
c) ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 unidades.

34) ¿Cuánto mide la altura del triángulo isósceles ABC cuyos lados iguales miden 9 cm y el tercer lado mide 6 cm?

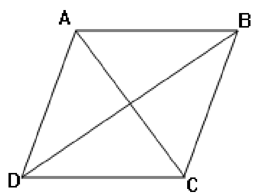
35) Encuentra el valor de "y" en:



36) Encuentra el valor de AD.



37) ABCD es un rombo de lado 12 u y una de sus diagonales mide 16 u, ¿cuánto mide la otra diagonal?



38) La medida de los lados de un triángulo equilátero es de $2\sqrt{3}$ unidades, determine la medida de la altura.

39) Dadas las siguientes medidas, ¿cuáles corresponden a los lados de un triángulo rectángulo?
a) 10, 24, 26 b) 20, 21, 29 c) 8, 15, 17 d) 5, 13, $\sqrt{195}$

40) Dadas las siguientes ternas de números, ¿cuáles serán ternas pitagóricas?
a) 7, 24, 25 b) 20, 20, $20\sqrt{2}$ c) 13, 15, 17 d) 2, 3, 6

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

	PUNTOS PROBLEMÁTICOS	PROPUESTA DE SOLUCIÓN
3.1 CONGRUENCIA	En este tema se siguen presentando dificultades para justificar las afirmaciones de sus resultados. La mayoría de alumnos tiende a confundir los nombres de los ángulos entre paralelas, pero la igualdad de estos queda clara.	Seguir señalando puntualmente al estudiante la forma en que se debe de justificar las afirmaciones, haciendo énfasis en el lenguaje utilizado ya que en muchas ocasiones el problema está en el lenguaje que se utiliza. Se puede usar colores para resaltar las rectas paralelas o los triángulos involucrados. Apoyarnos con recursos de internet, ya sea utilizando algún software como cabri, sketchpad o geogebra. También se pueden recomendar algunas direcciones de páginas Web donde hay videos del tema, por ejemplo algunas son: https://www.youtube.com/watch?v=YmeL3BCdFdM https://www.youtube.com/watch?v=fQUyVI_A-wc https://www.youtube.com/watch?v=aE3PFfrHiZ0 https://www.youtube.com/watch?v=AVSC-f_mCyg http://www.youtube.com/watch?v=mkjaOvBkTAc Al visualizar cualquiera de estos videos, del lado izquierdo se proponen otros similares que pueden consultar para aclarar mejor el concepto.
3.2 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS: CRITERIOS DE CONGRUENCIA	Dificultades para identificar elementos del triángulo (ángulos, lados) que se deducen de algunas propiedades o teoremas. Se les dificulta identificar los elementos homólogos. El mayor problema sigue siendo la justificación en la congruencia de triángulos, sobre todo porque se incrementan las propiedades entre los triángulos y se les hace más difícil	Recordar nuevamente algunas propiedades, mencionando parte de la propiedad/teorema para que los alumnos la completen, o hagan reflexión sobre lo qué se genera. Por ejemplo: Si dos rectas son perpendiculares, ¿qué puedes decir de ellas?, si un triángulo es isósceles, ¿qué puedes decir de sus elementos? Una estrategia para identificar los elementos homólogos es asociar los lados menores, los lados mayores y los lados medianos. Recortar algunos triángulos para hacer ver los elementos iguales, los ángulos o lados homólogos, la diferencia entre igualdad y congruencia, y mostrar los criterios de congruencia. Hacer notar sobre la figura los criterios que ellos proponen, para que observen y reorganicen la forma de abordar el problema. Usar colores o marcas, para resaltar los triángulos que deben ser congruentes. Sobre la justificación de sus afirmaciones, se puede

	visualizar lo que tienen que mostrar. El alumno no le encuentra sentido en justificar las afirmaciones geométricas, se les hacen interesantes, pero consideran que esa actividad es para los que estudiaran el área de matemáticas. La mayoría comenta que sus afirmaciones "se ven claras en la figura", "¿para qué tengo que justificar? Si se ve en la figura"	practicar desde la unidad 2 el porqué de sus afirmaciones, esto prepara y acostumbra al alumno para que realice las justificaciones necesarias en este tema. Otro recurso que se debe aprovechar son las asesorías que ofrece el Colegio como apoyo a los alumnos con mayores dificultades. También son de gran apoyo algunos videos proporcionados en las siguientes direcciones. https://www.youtube.com/watch?v=IboQuxUQbfM https://www.youtube.com/watch?v=4iEZP0lH8xI https://www.youtube.com/watch?v=gGTEkx9Bdqk https://www.youtube.com/watch?v=5kHrEVPmOc4 https://www.youtube.com/watch?v=YMib9KO8xKU
3.3 SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS	Algunos alumnos siguen presentando dificultades en relacionar los lados homólogos. En esta parte hay menos dificultades, ya que en semejanza se trabaja con algunos valores numéricos y sólo comprueban la proporcionalidad. Aquí los errores frecuentes son de tipo numérico, tanto en verificar la proporcionalidad en triángulos semejantes como en la aplicación del teorema de Pitágoras.	La estrategia para identificar los elementos homólogos es más evidente en semejanza, ya que se manejan medidas y se les hace más evidente asociar los lados menores, los lados mayores y los lados medianos. Mostrar con varios ejercicios la equivalencia de fracciones y los diferentes despejes en la ecuación del teorema de Pitágoras. En semejanza de triángulos también se pueden recortar algunos triángulos para hacer ver los ángulos iguales, los lados homólogos, la diferencia entre congruencia y semejanza y mostrar los criterios de semejanza. Se puede aprovechar esta actividad para mostrar que en los triángulos semejantes los lados homólogos son paralelos y visualizan el Teorema de Thales. Algunos de los siguientes videos pueden ser de gran ayuda. https://www.youtube.com/watch?v=IYuXef4SNgU https://www.youtube.com/watch?v=53gH_cpDv6E http://www.youtube.com/watch?v=XYBOp1uDgAU https://www.youtube.com/watch?v=rPlfmJDHfog https://www.youtube.com/watch?v=u9lI2PZvJZU https://www.youtube.com/watch?v=4zuVuhIRAdY https://www.youtube.com/watch?v=fj13eHGUN0Q

Bibliografía básica y complementaria

Clemens, Stanley *et al*, *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*, Addison Wesley, México, 1989.

Euclides, Elementos de Geometría I - II, versión de Juan D. García Bacca, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 1992.

Garcia, Jesús y Bertrán, Celesti. *Geometría y Experiencias*, *Recursos Didácticos,* Alhambra, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

Miller, Charles et al. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999

Wentworth, J.; Smith, D. Geometría plana y del espacio. Ed. Porrúa. 24a. Ed. 1997.

Páginas Web, vistas el 22 de enero de 2015:

http://www.youtube.com/watch?v=LvKPYiyx8u4&list=PLC-j4ScU0Zao-zff9ik5i0Ad_nnQyA6vQ