Unidad 1.

Funciones Cuadráticas

PROPÓSITO

✍ *Continuar con el estudio de funciones a partir del estudio de situaciones que varían en forma cuadrática; contrastar este tipo de variación con la lineal. Analizar el comportamiento de las gráficas de funciones cuadráticas en términos de sus parámetros e iniciar la resolución de problemas de optimización con métodos algebraicos.*

CONTENIDO

1.1 Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.
1.2 Comparación de la función cuadrática con la función lineal.
1.3 Intersecciones de la gráfica de una función cuadrática con el x.
1.4 Estudio gráfico y analítico de la función: $y = ax^2 + bx + c$. Casos particulares: $y = ax^2$; $y = ax^2 + c$; $y = a(x-h)^2$; $y = a(x-h)^2 + k$
    1.4.1 Expresar una función cuadrática escrita en la forma general $y = ax^2 + bx + c$ a la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$.
1.5 Concavidad, máximo o mínimo.
1.6 Problemas de máximos y mínimos. Resolución algebraica.

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.
Bibliografía.

PRESENTACIÓN

El segundo semestre de matemáticas, como se señala en los Programas de Estudio del CCH, se inicia con el estudio de la función cuadrática, lo que permite, por un lado, avanzar en el concepto de función al introducir ahora un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría, y, por otro, vincular estas funciones con las ecuaciones cuadráticas que recién ha trabajado el alumno, aspecto que enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones y la función cuadrática.

Para su estudio, si los conceptos se reducen sólo a su definición se corre el riesgo de no producir aprendizajes entre los alumnos, por lo que, se analizan los diferentes registros de representación de la función cuadrática y la relación que existe entre ellos; se representa gráficamente una función cuadrática a partir de sus puntos notables; y se aplican sus propiedades en la resolución de problemas de optimización, particularmente, cuando se trata de encontrar valores máximos o mínimos. Esto, a través de diversas actividades, ejercicios y ejemplos diseñados con base a los aprendizajes que marca el programa.

Por otra parte, según la metodología que desarrolle el profesor, se sugiere intercalar aquellos temas que muestren cierta relación, integrarlos en la medida de lo posible y no trabajarlos de manera aislada. Donde su tratamiento en diversas situaciones ayudará a que el alumno logre una mejor conceptualización.

Conceptos clave. Función cuadrática; intersecciones con los ejes; concavidad; punto máximo/mínimo; significados de los parámetros $a,\ h,\ k$ en $y = a(x-h)^2 + k$.

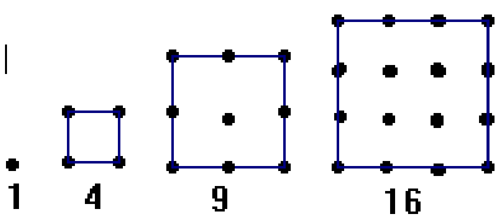
1.1 SITUACIONES QUE INVOLUCRAN CAMBIO Y QUE DAN ORIGEN A FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Para iniciar esta unidad se sugieren las siguientes actividades con el objetivo de modelar las primeras funciones cuadráticas, donde para su construcción, el alumno tiene que observar, buscar regularidades, establecer patrones y conjeturas hasta llegar al modelo algebraico.

Como los alumnos no están acostumbrados a encontrar modelos algebraicos es posible que presenten dificultades, aquí se sugiere darles el tiempo suficiente y que escriban todas sus aproximaciones en el pizarrón. Esto permitirá observar diferentes formas algebraicas que se pueden descartar o relacionarse entre si hasta llegar a la respuesta correcta. Incluso, se puede iniciar esta etapa proponiendo primero generalizar la sucesión cuadrangular $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$

Actividad 1. Observa la siguiente secuencia, y menciona:

a) ¿Cuántos puntos contiene en total la figura con 7 puntos en su base?
b) ¿Y con 8 puntos?
c) ¿Cuántos puntos contiene en total la figura con 84 puntos en su base? (Lo cual exige que el alumno se desprenda del dibujo, y abre paso a generalizar).
d) ¿Y con n puntos en la base?

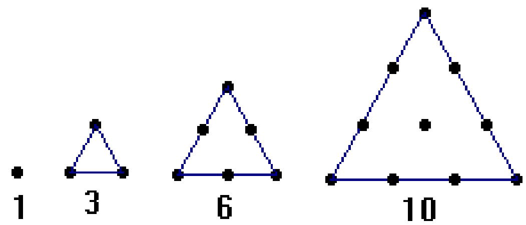


Solución:

$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, b^2$

Actividad 2. Observa la siguiente secuencia, y menciona:

a) ¿Cuántos puntos contiene en total el triángulo con 6 puntos en su base?
b) ¿Y con 7 puntos?
c) ¿Cuántos puntos contiene en total el triángulo con 135 puntos en su base?
d) ¿Y con n puntos en la base?
e) ¿Cuántos puntos en la base tendrá el triángulo que contiene un total de 351 puntos?

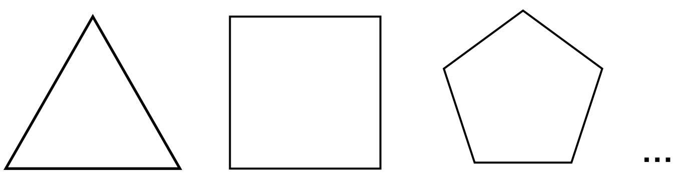


Solución:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15, \dots, \frac{b(b+1)}{2}$$

NOTA. En estas actividades, como existen diversos patrones y formas de presentar el modelo algebraico, se deja al profesor vivir tal experiencia con sus alumnos.

Actividad 3. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?



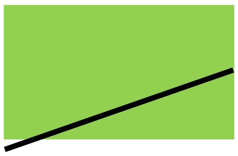
Solución:

$$0,\ 2,\ 5,\ 9,\ 14, \dots, \frac{l(l-3)}{2}$$

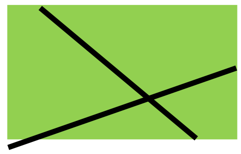
Actividad 4. Hay un terreno rectangular muy grande en el que se construirá un parque con varias zonas, de tamaño y forma diversos. Imagina que eres parte de la comisión encargada del diseño de las calles de acceso a las distintas zonas. Como es de esperar, se tiene que invertir la menor cantidad de dinero en abrir calles de acceso a las distintas zonas. La tarea de la comisión consiste en encontrar el número de calles que se requerirán para crear 30 zonas. Recuerda que se necesita la menor cantidad de calles.

En caso de no obtener respuesta favorable, puedes ayudar al alumno a plantear el problema trazando una y dos calles en sus diferentes casos. Así, con una calle se obtienen 2 zonas, y con 2 calles 4, pero ¿qué pasa con 3 calles? Aquí, se puede iniciar una discusión sobre cuántas zonas se obtienen con 3 calles, pues existen casos en que se obtienen 6 zonas, y otros casos en que se obtienen 7, con lo que se podrá descartar cierto tipo de construcciones y analizar la construcción que genera el máximo de zonas.

Solución:



Con 1 calle se obtienen 2 zonas como máximo.



Con 2 calles se obtienen 4 zonas como máximo.

Con 3 calles, ? zonas.

Recuerda que quieres trazar calles de manera que obtengas la mayor cantidad de zonas.

Número de calles	Número de zonas
1	2
2	4
3	?
4	?
	?

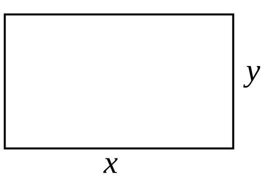
Entonces:

$$2,\ 4,\ 7,\ 11, \dots, \frac{c(c+1)}{2} + 1$$

Actividad 5. Escribir la fórmula del área de un círculo en función del radio. ¿Qué tipo de función es?

Actividad 6. Se tienen 100 metros de malla y se quiere cercar un terreno rectangular, expresar el área del terreno en función de su ancho (y) o su largo (x).

Solución:



$$2x + 2y = 100; \qquad A = xy$$

$$A = y(-y + 50) = -y^2 + 50y$$

En algunos casos, se daría por terminado el problema, sin embargo, se puede reflexionar sobre: *¿Qué valores puede tomar y? ¿Cuáles no? ¿Por qué?*
¿Cuáles son las dimensiones del terreno para obtener la máxima área?

Actividad 7. Después de varios días de observación un biólogo planteó una hipótesis acerca del comportamiento de las mariposas. “El número de mariposas que se ven en el campo es proporcional al cuadrado de la temperatura”. Para una temperatura de 32° C, el biólogo contó 81 mariposas.
¿Cuántas mariposas habrá cuando la temperatura sea de 15° C?

Solución:

$m = mariposas$

$t = temperatura$

$Modelo\ de\ variación \ \rightarrow \ m = kt^2$

Remplazando $m = 81$, $t = 32$ en el modelo de variación, se tiene: $81 = k(32)^2$, de lo cual se deduce que $k = \frac{81}{1024}$. Ahora, sustituyendo k se tiene: $m = \frac{81}{1024}t^2$.
Para $t = 15$, $m = \frac{81}{1024}(15)^2 = 17.79$. Por lo tanto, cuando la temperatura es de 15° C habrá 17-18 mariposas.

Actividad 8. El director de un teatro estima que si cobra $30 por localidad, podría contar con 500 espectadores. Y que por cada $1 de descuento estima 100 personas más. Calcular los ingresos obtenidos en función del número de rebajas del precio.

Solución:

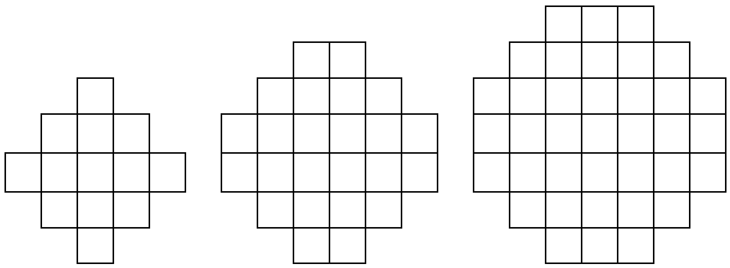
Descuento	0	1	2	3 . . .	x
Precio	30	30 – 1	30 – 2	30 – 3	30 – x
Num. espectadores	500	500 + 100(1)	500 + 100(2)	500 + 100(3)	500 + 100(x)
Ingresos	(30)(500)	(30 – 1)[500 + 100 (1)]	(30 – 2)[500 + 100 (2)]	(30 – 3)[500 + 100 (3)]	(30 – x)[500 + 100 (x)]

$I(x) = (30 - x)(500 + 100x) = -100x^2 + 2500x + 15000$

a) ¿Cuánto deberá descontarse para obtener el máximo ingreso?

Ejercicios 1.1

1) ¿Qué figuras siguen en la siguiente secuencia?



a) Si la figura tiene 5 cuadrados en su base, ¿cuántos cuadrados del mismo tamaño (de su base) contendrá la figura en total?
b) ¿Cuántos cuadrados en total tendrá una figura si su base consta de 55 cuadrados?
c) ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura que tiene n cuadrados en su base?

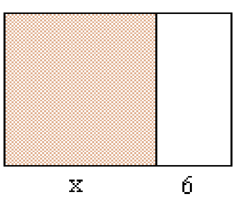
2) La distancia de seguridad que deben guardar los coches entre sí, en circulación, se organiza en la tabla siguiente:

Velocidad (km/h)	Distancia de seguridad (m)
10	1
20	4
30	9
40	16
50	25
…	…

Expresar la distancia de seguridad en función de la velocidad.

3) Expresar el área del triángulo equilátero en función del lado. ¿Qué función se obtiene?

4) Si en un cuadrado aumentamos en 6 unidades dos lados paralelos obtenemos un rectángulo. Calcular el área del rectángulo en función del lado x del cuadrado.



5) Construcción de un rectángulo bajo ciertas condiciones y cálculo de su área, donde su base sea una magnitud x.

a) Construye un rectángulo de tal manera que: se encuentre en el primer cuadrante, uno de sus vértices sea el origen del sistema coordenado; otro vértice se encuentre sobre la recta $y = -2x + 8$, donde el segmento que une a éstos vértices sea una diagonal del rectángulo.
b) Bajo estas mismas condiciones, ¿cuántos rectángulos se pueden construir? Construye al menos 4.

Con base a los rectángulos que se pueden obtener en b), responde el resto de los incisos.

c) Construye una tabla en donde se muestre la longitud de los lados de cada rectángulo y sus áreas correspondientes.
d) Determinar el área de un rectángulo donde su base sea una magnitud x.
e) ¿Existe un rectángulo que tenga un área de $9cm^2$?
f) Describe lo que observas respecto al comportamiento del área de los rectángulos.
g) ¿Existe un valor de área máxima en donde sólo exista un rectángulo con esa área? ¿Puedes calcular el valor del área y las dimensiones de ese rectángulo?

NOTA. Este último ejercicio 5, puede ser utilizado para iniciar una reflexión sobre la importancia de estudiar la función cuadrática.

1.2 COMPARACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON LA FUNCIÓN LINEAL.

Dado que en este apartado se van a destacar algunas características de la función cuadrática y contrastarlas con la función lineal, se sugiere iniciar el manejo de un lenguaje donde intervengan cada uno de los términos que caracterizan a la función cuadrática, con el fin de que el alumno se vaya familiarizando y se forme una idea al momento de trabajar con estos conceptos.

Por otra parte, se sugiere intercalar temas que muestren cierta relación, como lo es el caso del Tema 1.5, donde conceptos como concavidad, máximo y mínimo se encuentran estrechamente relacionados con otros, desde el análisis de este apartado como a lo largo de la unidad. Por tal motivo, se sugiere integrar estos conceptos y no trabajarlos de manera aislada (hasta el tema 1.5), lo cual permitirá que el alumno desarrolle un lenguaje más amplio, y su tratamiento en diversas situaciones ayudará a una mejor conceptualización.

Iniciemos la comparación entre la función lineal y la cuadrática.

Como recordarás una función lineal es de la forma $y = ax + b$, y las actividades anteriores dieron lugar a expresiones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$, que reciben el nombre de funciones cuadráticas o función polinómica de grado dos.

PARA REFLEXIONAR: ¿Por qué en la definición de función cuadrática, a debe ser distinta de cero? ¿Puede b o c ser cero?

Actividad 1. Las siguientes tablas representan una función ¿cuál de ellas representa a una función lineal y cuál a una función cuadrática?

a)

x	y
-3	14
-2	11
-1	8
0	5
1	2
2	-1
3	-4

b)

x	y
-3	31
-2	17
-1	7
0	1
1	-1
2	1
3	7

En esta actividad es posible que los alumnos observen la relación entre la variable y y la variable x, y determinar el modelo algebraico. Otros, pueden hacer las gráficas correspondientes, sin embargo, para nuestros fines hay que explorar la *variación* calculando las *primeras y segundas diferencias* de la función.

Las primeras diferencias se calculan restando dos términos consecutivos de la sucesión (valores de y); y las segundas diferencias, restando dos términos consecutivos de las primeras diferencias.

Para calcular las primeras y segundas diferencias de una función, la tabla de valores debe estar compuesta de manera que las diferencias en x sean constantes.

Así, las diferencias quedan como sigue:

a)

x	y	Diferencia en x	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-3	14			
-2	11	1	$11-14=-3$	
-1	8	1	$8-11=-3$	$-3-(-3)=0$
0	5	1	$5-8=-3$	$-3-(-3)=0$
1	2	1	$2-5=-3$	$-3-(-3)=0$
2	-1	1	$-1-2=-3$	$-3-(-3)=0$
3	-4	1	$-4-(-1)=-3$	$-3-(-3)=0$

b)

x	y	Diferencia en x	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-3	31			
-2	17	1	-14	
-1	7	1	-10	4
0	1	1	-6	4
1	-1	1	-2	4
2	1	1	2	4
3	7	1	6	4

Actividad 2. Calcular las primeras y segundas diferencias de las funciones: a) $y=-x^2+3x+4$ b) $y=5x-2$ c) $y=\frac{2}{3}x^2+4x-6$ d) $y=-7x+3$, para $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Solución:

a)

x	$y = -x^2 + 3x + 4$	Diferencia en x	Primeras diferencias en y	Segundas diferencias
-1	$y = -(-1)^2 + 3(-1) + 4 = 0$	1		
0	$y = -(0)^2 + 3(0) + 4 = 4$	1	4	
1	6	1	2	-2
2	6	1	0	-2
3	4	1	-2	-2

De manera similar, trabaja con tus alumnos el resto de los incisos, y al terminar, reflexionar sobre:

a) ¿Qué pasa con las primeras y segundas diferencias?
b) ¿Existe alguna relación entre las primeras y segundas diferencias con la función lineal y cuadrática?
c) ¿Cómo son las diferencias de una función lineal?
d) ¿Cómo son las diferencias de una función cuadrática?

Esto, para que los alumnos observen por si mismos la característica que presenta la primera, segunda diferencia para cierto tipo de funciones:

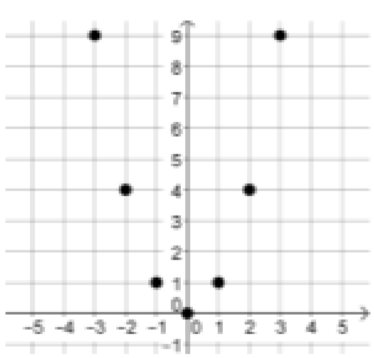
"Si las primeras diferencias son costantes, entonces, la función que representa esta tabla es lineal. Por otra parte, si las segundas diferencias son costantes, entonces, la función que representa esta tabla es cuadrática".

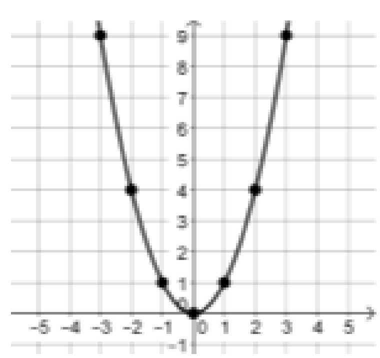
De esta manera, analizamos la variación lineal y cuadrática de una función, pero ¿qué más las hace diferentes?
¿Cómo es la gráfica de una función cuadrática?

Actividad 3. Trazar la gráfica de la función $y = x^2$.

Solución:

x	$y = x^2$
-3	$y = (-3)^2 = 9$
-2	$y = (-2)^2 = 4$
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9





De la tabla se obtienen las parejas ordenadas $(-3,9),(-2,4),(-1,1),\ldots$, las ubicamos en el plano cartesiano y unimos mediante una curva suave. La cual recibe el nombre de parábola.

> Para ejercitar un poco más esta parte y obtener diversas características de la parábola se sugiere graficar diferentes funciones cuadráticas.

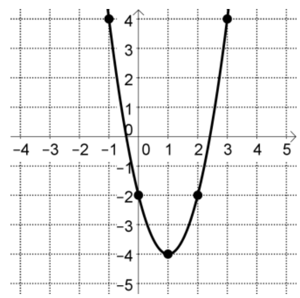
Actividad 4. Trazar las gráficas de las funciones: a) $y = 2x^2 - 4x - 2$
b) $y = -x^2 - 2x + 5$ c) $y = 3x^2 + 18x + 27$ d) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 7$

Solución:

a)

x	$y = 2x^2 - 4x - 2$
-2	$y = 2(-2)^2 - 4(-2) - 2 = 14$
-1	$y =$
0	
1	
2	
3	

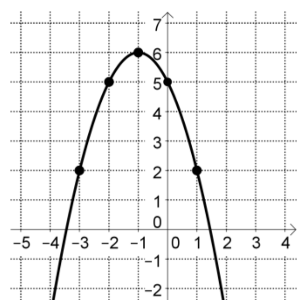
→



b)

x	$y = -x^2 - 2x + 5$
-3	$y = -(-3)^2 - 2(-3) + 5 = 2$
-2	$y = -(-2)^2 - 2(-2) + 5 = 5$
-1	$y =$
0	
1	
2	

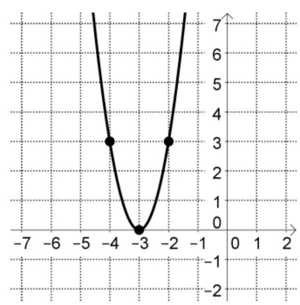
→



c)

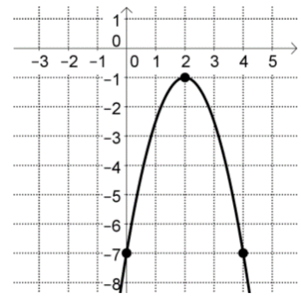
x	$y = 3x^2 + 18x + 27$
-5	$y = 3(-5)^2 + 18(-5) + 27 = 12$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	

→



d)

x	$y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 7$
0	
1	
2	
3	
4	



Como se puede ver, la gráfica de una función cuadrática presenta diversas características y muy específicas. Permite que el propio alumno las identifique.
Este análisis se puede hacer con respecto a las caracteristicas de una función lineal, por ejemplo, se le puede cuestionar sobre:

a) ¿Cuántas raices o ceros tiene una función lineal? ¿Cuántas tiene una función cuadrática?
b) ¿La gráfica de una función lineal crece y después decrece, o viceversa? ¿Qué pasa con la parábola?
c) ¿Existe un punto en el que la parábola cambia de creciente a decreciente, o viceversa? ¿Cómo se le llama a ese punto?
d) Algunas parábolas abren hacia arriba, otras, hacia abajo ¿cómo se le llama a este comportamiento?
e) ¿La recta presenta algun tipo de simetría (un reflejo respecto al eje x, al eje y o al origen? ¿Qué pasa con la parábola?

Partiendo del caso más característico, $y = x^2$, el valor de la ordenada y es igual para x y $-x$. Esto provoca que la gráfica sea simétrica respecto al eje y.

La recta del eje de simetría resulta importante cuando se trata de graficar una función cuadrática, pues divide a la parábola en dos partes congruentes, es decir, cualquier punto de la parábola tendrá un punto homólogo al otro lado de este eje.

NOTA. Las preguntas propuestas en este como en otros apartados de la presente guía, se pueden omitir algunas, según el desempeño de sus alumnos.

Ejercicios 1.2

1) Con base en la gráfica de una función cuadrática:
a) ¿Qué es la concavidad?
b) ¿Qué es el vértice?
c) ¿Qué es el punto mínimo/máximo?
d) ¿Qué es el eje de simetría?

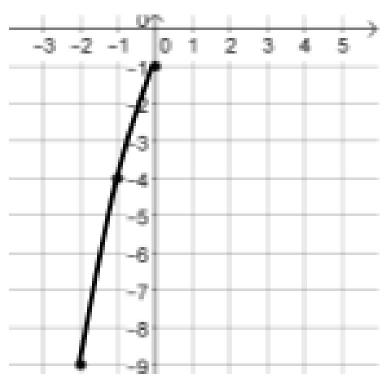
2) Calcular las primeras y segundas diferencias de las funciones:

a) $y = 2x^2 - 4x - 3$ b) $y = -6x + 5$ c) $y = -\frac{5}{7}x^2 + 3x + 8$

para $x = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

3) Una parábola corta al eje de las abscisas en (4, 0) y (9, 0). ¿Cuál es su eje de simetría?

4) En la siguiente figura, se muestra una parte de la curva representativa de una función cuadrática, completa el trazo suponiendo que el vértice es (1, 0).



5) Trazar la gráfica de las siguientes funciones e indica su concavidad, su punto mínimo o máximo, su vértice y su eje de simetría.

a) $y = -2x^2 - 4x - 5$ b) $y = 3x^2 - 1$ c) $y = -4x^2$ d) $y = \frac{4}{5}x^2 - 6x$

1.3 INTERSECCIONES DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON EL EJE *X*.

Considerando que los alumnos son constructores de su propio conocimiento, y que los conceptos no se pueden reducir a su definición, pues de hacerlo, corremos el riesgo de no producir aprendizajes entre los estudiantes. Por ejemplo, en lugar de indicarle directamente al alumno la relación entre las intersecciones de la gráfica de una función cuadrática y el eje x, con sus raíces, lo cual genera que el alumno no desarrolle pensamiento matemático alguno, nosotros sugerimos que sea el propio alumno quien lo descubra, en este sentido se propone lo siguiente.

Como recordarás, una ecuación cuadrática o de segundo grado es aquella que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a,\ b$ y c son números reales, con $a \neq 0$. Y su función asociada es $y = ax^2 + bx + c$.

Cuando se tiene una ecuación y se pide trazar su gráfica, algunos estudiantes no recuerdan cómo hacerlo, pues sólo observan una ecuación con una variable. Ante esta situación, hay que hallar la función asociada de la ecuación, donde basta con sustituir a la y por el cero. Así, en el caso de la ecuación cuadrática se tiene: $ax^2 + bx + c = 0 \ \rightarrow \ y = ax^2 + bx + c$.

Las siguientes actividades 1, 2 y 3 se pueden dejar de tarea y continuar con el análisis de las raíces de una función cuadrática en clase.

Actividad 1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas y trazar la gráfica de su función asociada. a) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ b) $-x^2 - 3x + 4 = 0$

Solución:

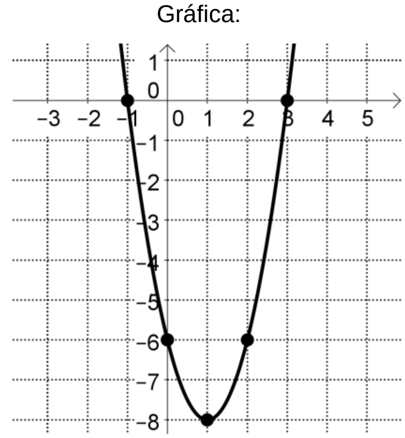
a) Utilizando cualquier método algebraico, las soluciones son:

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 3$$

Tabla:

x	$y = 2x^2 - 4x - 6$
-2	$y =$
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Gráfica:



b) Utilizando cualquier método algebraico, las soluciones son:

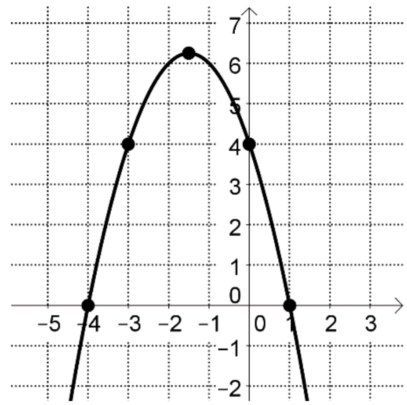
$x_1 = -4$

$x_2 = 1$

Tabla:

x	$y = -x^2 - 3x + 4$
-5	$y =$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

Gráfica:



Actividad 2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas y trazar su gráfica.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$ b) $-3x^2 + 12x - 12 = 0$

Solución:

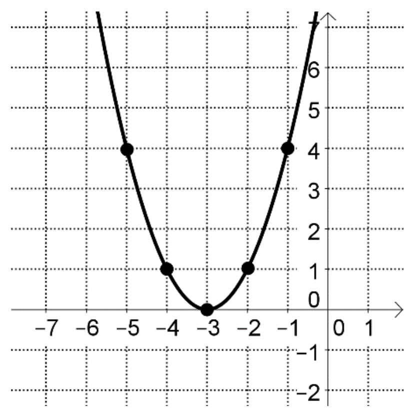
a) Utilizando cualquier método algebraico, las soluciones son:

$x_{1,2} = -3$

Tabla:

x	$y = x^2 + 6x + 9$
-6	$y =$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	

Gráfica:



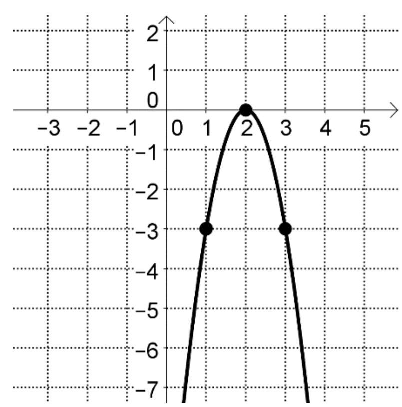
b) Utilizando cualquier método algebraico, las soluciones son:

$x_{1,2} = 2$

Tabla:

x	$y = -3x^2 + 12x - 12$
-2	$y =$
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Gráfica:



Actividad 3. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas y trazar su gráfica.
a) $3x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $-2x^2 - 8x - 9 = 0$

Solución:

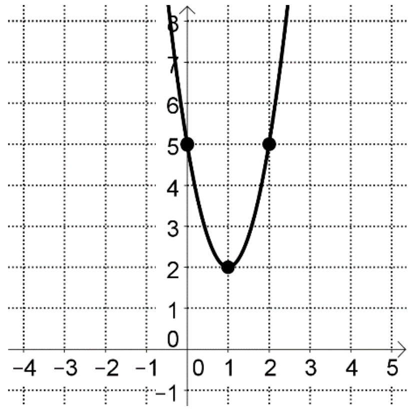
a) Utilizando cualquier método algebraico, las soluciones son:

No tiene soluciones reales. Son complejas.

Tabla:

X	$y = 3x^2 - 6x + 5$
-3	$y =$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Gráfica:



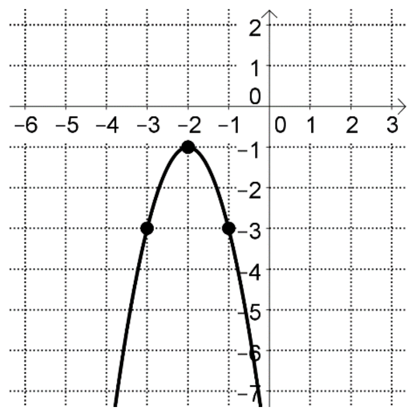
b) Utilizando cualquier método algebraico, las soluciones son:

No tiene soluciones reales. Son complejas.

Tabla:

X	$y = -2x^2 - 8x - 9$
-4	$y =$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

Gráfica:



Para establecer la relación entre las intersecciones de la gráfica de una función cuadrática y el eje x, con sus raíces, se pueden plantear las siguientes preguntas, donde no se proporciona la respuesta, sino se encamina al alumno en la dirección deseada.

De acuerdo a las actividades 1, 2 y 3,

a) ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado?
b) ¿Existe alguna relación entre las soluciones de una ecuación y su gráfica?
c) ¿Qué sucede con los valores donde interseca la parábola a los ejes y las soluciones de la ecuación?

d) ¿Existe alguna relación entre las intersecciones de la parábola y los ejes con el hecho de obtener una, dos o ninguna raíz?

PARA REFLEXIONAR: ¿Existe alguna forma en que una función cuadrática tenga una raíz compleja y una real?

Actividad 4. Ahora bien ¿puedes identificar las raíces de una función cuadrática a partir de la tabla? (Observa las gráficas de las actividades 1, 2 y 3, y sus respectivas tablas).

En caso de no obtener respuesta favorable, se puede preguntar:

a) ¿Si la gráfica interseca al aje x, qué coordenadas tienen esas intersecciones?
b) ¿Qué pasa con la gráfica cuando y toma el valor de cero? ¿Qué coordenadas tienen esas intersecciones?
c) ¿Se encuentra este punto en la tabla?

De esta manera, el estudiante se forma una idea (aunque muy limitada) para determinar las raíces de una función cuadrática a partir de la representación tabular, donde las raíces son aquellos valores que toma x cuando los valores correspondientes de y son cero. Queda a decisión del profesor si profundiza o no esta parte ya que se presentan diversos casos donde no es posible afirmar de manera directa cuáles son las raíces, por ejemplo:

Las siguientes tablas representan parte de una función cuadrática:

i)

x	y
-3	18
-2	3
-1	0
0	9
1	30
2	63

ii)

x	Y
-3	61
-2	21
-1	1
0	1
1	21
2	61

iii)

x	y
-3	25
-2	9
-1	1
0	1
1	9
2	25

iv)

x	y
-3	34
-2	14
-1	2
0	-2
1	2
2	14

Tal parece que la tabla i) tiene una raíz doble cuando $x = -1$, sin embargo, las raíces son $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{3}{2}$; mientras que la tabla ii) parece no tener raíces reales, no obstante, sus raíces son $x_1 \approx -0.8,\ x_2 \approx -0.1$; de igual manera, iii) parece no tener rices, sin embargo tiene una raíz doble $x = -\frac{1}{2}$. Por otra parte, en la tabla iv) hay un cambio de signo entre los valores que toma y, lo cual nos indica la existencia de raíces.

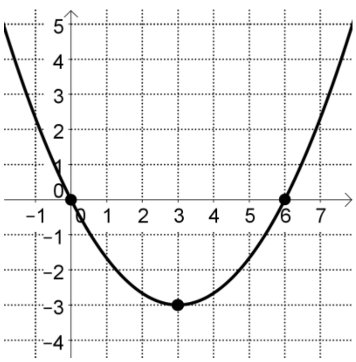
Para sintetizar la relación entre la tabla, la ecuación y su gráfica, se puede preguntar:

¿Qué pasa con el punto donde la gráfica interseca al eje x, con la solución de la ecuación y el valor que toma x cuando y toma el valor de cero en la tabla?

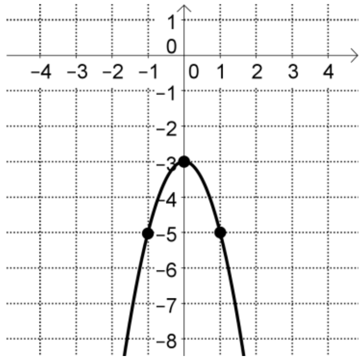
Actividad 5.

1. ¿Cuáles son las raíces de las siguientes funciones cuadráticas? ¿Y por qué?

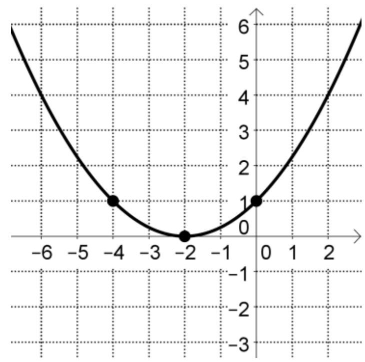
a)



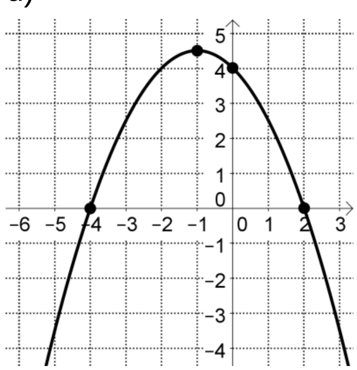
b)



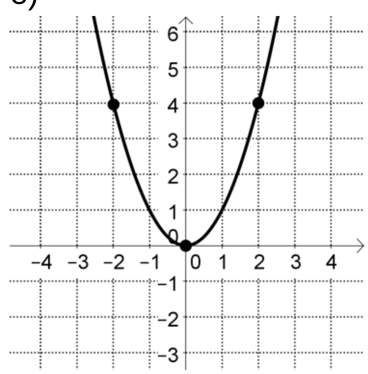
c)



d)



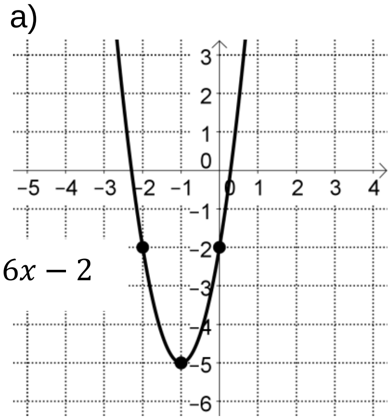
e)



2. ¿Cuáles son las raíces de las siguientes parábolas?

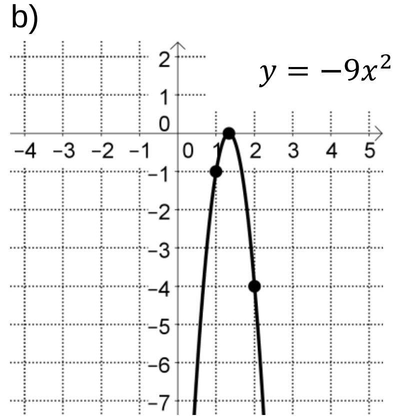
a)

$y = 3x^2 + 6x - 2$



b)

$y = -9x^2 + 24x - 16$



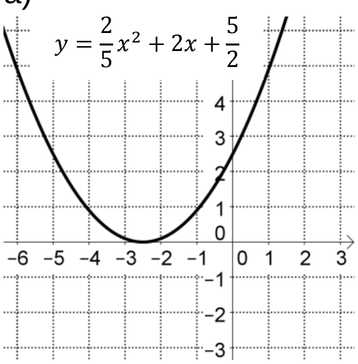
Como se puede ver, en las gráficas del ejercicio 2, visualmente no es posible afirmar con precisión cuáles son las raíces, para ello, es necesario resolver la ecuación asociada a la función.

Para obtener dicha ecuación, basta con sustituir a y por cero, por ejemplo, para a) $y = 3x^2 + 6x - 2 \quad \rightarrow \quad 0 = 3x^2 + 6x - 2$ ó $3x^2 + 6x - 2 = 0$, donde las raíces de la ecuación son: $x_1 \approx 0.30, \quad x_2 \approx -2.30$.

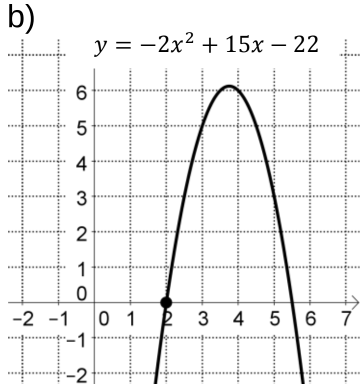
Para b) se tiene $-9x^2 + 24x - 16 = 0$, donde $x_{1,2} = \frac{4}{3}$.

Actividad 6. Determinar las raíces de las siguientes parábolas:

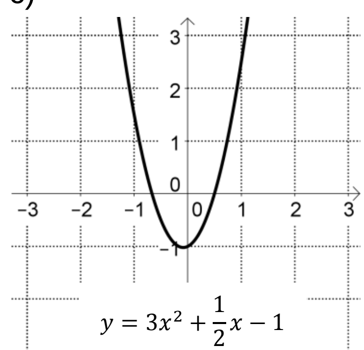
a)



b)



c)



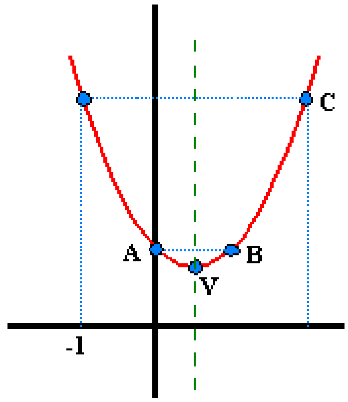
Actividad 7. Dada la función $y = -6x^2 - 3x + 15$, encuentra sus raíces y el valor donde interseca al eje y.

Solución:

Las coordenadas donde corta una gráfica al eje y son de la forma $(0, y)$. Como el punto pertenece a la gráfica sustituye el valor de la coordenada x en la función. Así, al sustituir $x = 0$, se tiene $y = -6(0)^2 - 3(0) + 15$, donde $y = 15$. Por lo tanto, la función corta al eje y en el punto (0, 15).

Ahora bien, las coordenadas donde corta una gráfica al eje x son de la forma $(x, 0)$. Como el punto pertenece a la gráfica, se sustituye el valor de la coordenada y en la función. Así, al sustituir $y = 0$, se tiene $-6x^2 - 3x + 15 = 0$, donde $x_1 \approx -1.8$, $x_2 \approx 1.3$. Por lo tanto, la función corta al eje x en los puntos (–1.8, 0), (1.3, 0).

Actividad 8. Dada la gráfica de la función $y = x^2 - x + 1$, determina con precisión las coordenadas de los puntos indicados.



Solución:

El punto *A* está situado en el eje y, por lo que sus coordenadas son de la forma $(0, y)$. Se sustituye $x = 0$ en la función, y se tiene $y = (0)^2 - (0) + 1 = 1$. Por lo tanto, $A = (0, 1)$.

El punto *B* tiene coordenadas $(x, 1)$. Puesto que *B* pertenece a la gráfica, sustituimos el valor de la coordenada $y = 1$ en la función, así, $1 = x^2 - x + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - x = 0$, donde, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Por lo tanto, $B = (1, 1)$.

El punto *V* es el vértice, su primera coordenada está situada en el punto medio del segmento *AB*, es decir, 0.5. Como el vértice pertenece a la parábola, sustituimos el valor de la coordenada de x, así, $y = (0.5)^2 - (0.5) + 1 = 0.75$. Por lo tanto, $V = (0.5, 0.75)$.

Para el punto *C*, se observa que por simetría de la parábola se puede calcular su primera coordenada, $x = 1.5 + 0.5 = 2$. Para encontrar la coordenada y, hacemos $y = (2)^2 - (2) + 1 = 3$. Por lo tanto, $C = (2, 3)$.

Ejercicios 1.3

1) Realizar el bosquejo de la gráfica de una parábola que tenga:

a) Una raíz doble b) Dos raíces reales diferentes c) Raíces complejas.

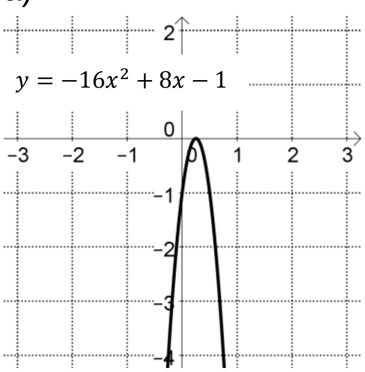
Y en cada caso, indica el valor de las raíces.

2) Trazar las gráficas de las siguientes funciones y encuentra sus raíces:

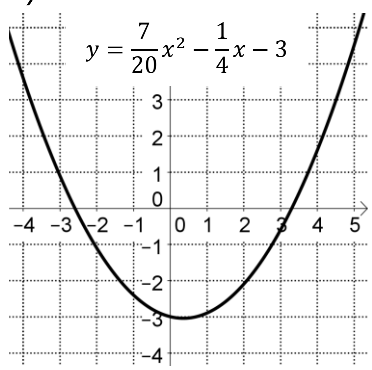
a) $y = \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{4}{5}$ b) $y = -3x^2 - 2x - 4$ c) $y = -x^2 + 6x - 9$

3) Encontrar las raíces de las siguientes parábolas:

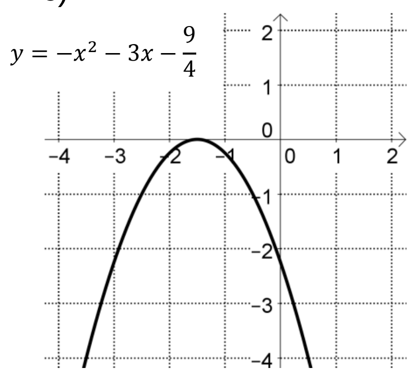
a)



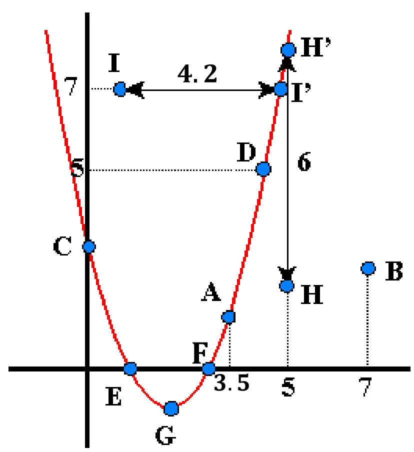
b)



c)

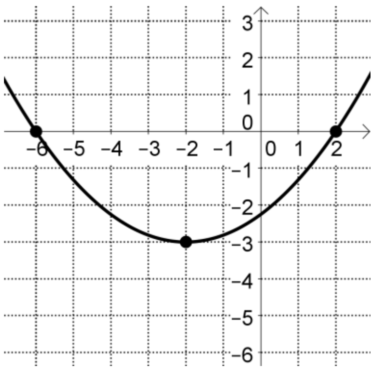


4) Dada la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 3$, determina con precisión las coordenadas de los puntos indicados:

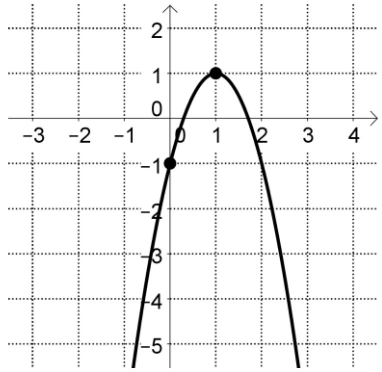


5) Determinar la expresión de la función que representa a cada una de las siguientes gráficas:

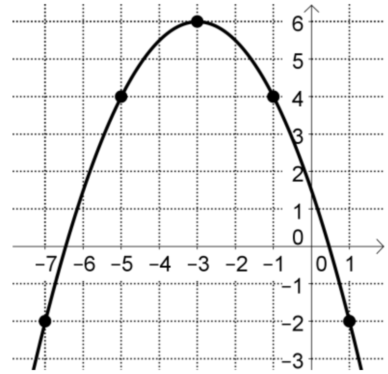
a)



b)



c)

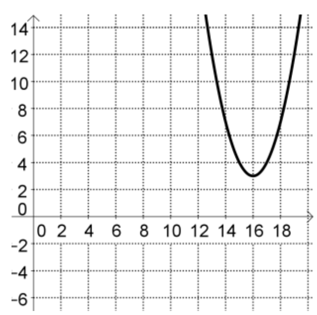


1.4 ESTUDIO GRÁFICO Y ANALÍTICO DE LA FUNCIÓN: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$. Casos particulares: $\boldsymbol{y = ax^2}$; $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$; $\boldsymbol{y = a(x-h)^2}$; $\boldsymbol{y = a(x-h)^2 + k}$.

Considerando lo medular del tema, que es graficar una función cuadrática sin tabular, se sugiere la siguiente actividad donde el alumno se vea en la necesidad de pensar y cuestionarse sobre otros métodos para graficar, ya que por medio de la tabla, a pesar de que se asignen valores positivos y negativos a x, no se llega a obtener rápidamente la forma de la parábola debido a que su vértice se encuentra muy alejado del origen.

Actividad 1. Graficar la función $y = x^2 - 32x + 259$.

Solución:



Ciertamente, existen algunas técnicas que pueden ayudar a realizar el trazo de una gráfica, y que resultan muy efectivas cuando se conocen las raíces. Por ejemplo, si una función tiene dos raíces diferentes $x_1,\ x_2$, que corresponden a las intersecciones de la parábola con el eje x, entonces, el vértice o también llamado punto extremo se encontrará justo entre éstas, donde su primera coordenada x se obtiene de la semisuma de las raíces, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, y su segunda coordenada y se obtiene al evaluar en la función el valor de la coordenada x. De esta manera, con las raíces y el vértice ajustamos la curva parabólica correspondiente a la función propuesta.

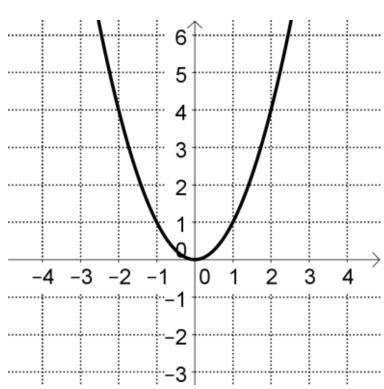
Por otro lado, si se tiene una raíz doble $x_1 = x_2$, la abscisa del vértice será la misma que la de la raíz, $(x_1, 0)$, pero se requieren más puntos para trazar la gráfica. Para obtener estos, tenemos que encontrar las coordenadas (x, y) de dos puntos simétricos, para las coordenadas x, hacemos $x = x_1 \pm 1$, y se obtienen las coordenadas y correspondientes al evaluar en la función el valor de las coordenadas x encontradas anteriormente. Con lo que ya es posible trazar la gráfica.

Pero ¿cómo hacerlo cuando no se tienen raíces reales? ¿Cómo ubicar el vértice? Ciertamente, existe una fórmula para encontrarlo, pero su aplicación no es objetivo tanto en esta guía como en el programa de estudios.

En este sentido, para poder trazar la gráfica de una función cuadrática sin tabular, escribimos la función $y = ax^2 + bx + c$ a su forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$, la cual nos permite ver características importantes de la gráfica: concavidad, vértice, punto mínimo/máximo, eje de simetría, etc. ¿Pero cómo vemos estas características en la expresión? Para ello, hay que analizar qué es lo que genera cada uno de los parámetros que intervienen en ella, en este sentido, hagamos un análisis por casos, primero, qué es lo que genera el parámetro a mientras los otros se mantienen fijos.

Caso 1: $\boldsymbol{y = ax^2}$.

1. Si se tiene la gráfica de $y = x^2$, cómo serán las gráficas de $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 5x^2$. Trázalas en un mismo plano cartesiano.



a) ¿Qué comportamiento observas entre las parábolas?
b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?
c) ¿Qué pasará con la gráfica de $y = 8x^2$?

2. Para que una gráfica sea "más abierta" que la gráfica de $y = x^2$, un estudiante contestó que el valor del coeficiente de x^2 debe ser mayor que 20. ¿Es cierto lo que dice este estudiante? ¿Por qué? Si tu respuesta es no, menciona un posible valor del coeficiente de x^2 que cumpla con cierta condición.

3. ¿Qué pasa con las gráficas de $y = 0.9x^2$, $y = 0.8x^2$, $y = 0.5x^2$? Grafícalas en un mismo plano.
   a) ¿Qué comportamiento observas entre las parábolas?
   b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?
   c) ¿Qué pasará con la gráfica de $y = 0.1x^2$?

4. ¿Qué pasará con las gráficas anteriores si los coeficientes tienen signo negativo? Esto es, qué pasa con las gráficas de $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -3x^2$, $y = -5x^2$, $y = -0.9x^2$, $y = -0.8x^2$, $y = -0.5x^2$.

5. Con la finalidad de ver si el alumno realmente relacionó la concavidad de la parábola con el signo que presenta el coeficiente a, esto es, si a es positivo, entonces la parábola es cóncava hacia arriba, y si a es negativo es cóncava hacia abajo; y por otra parte, si el valor de $|a| > 1$, entonces la parábola se cierra, y si $0 < |a| < 1$ la parábola se abre más, con respecto a $y = x^2$, se puede hacer la siguiente pregunta, ¿cómo se comportan las gráficas cuando a toma diferentes valores en $y = ax^2$?

Por otra parte, concibe cuáles son las coordenadas del vértice de una parábola de la forma $y = ax^2$:

6. Completa la siguiente tabla.

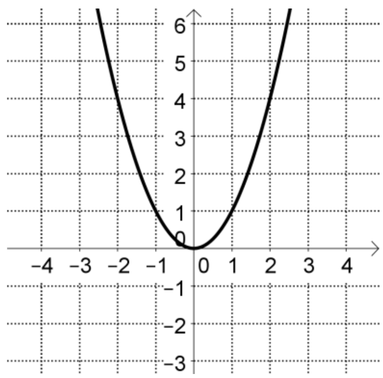
	$y = x^2$	$y = 4x^2$	$y = 0.3x^2$	$y = -5x^2$	$y = -0.8x^2$	$y = ax^2$
Vértice	$(0, 0)$					
Eje de simetría	$x = 0$					

Observemos ahora qué le pasa a la grafica de la función $y = ax$ al agregarle una constante. Si se suma 1, 2 ó 5 a la función $y = x^2$ se obtiene una nueva función, cómo cambia su gráfica con respecto a la gráfica de $y = ax$.

Caso 2: $\boldsymbol{y = ax^2 + k}$.

1. Dada la gráfica de la función $y = x^2$, qué sucede si se le suma 1 a x^2, esto es, $y = x^2 + 1$, ¿la gráfica de la nueva función sufre algún cambio? ¿Cómo?

2. ¿Qué pasa con $y = x^2 + 2$, $y = x^2 + 5$? Trázalas en un mismo plano.



   a) ¿Qué comportamiento observas entre las parábolas?
   b) ¿En qué se parecen las gráficas y en qué se diferencian?

3. ¿Qué pasará con la gráfica de $y = 2x^2$ al sumarle 1 ó 2 unidades, esto es, $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2 + 2$?

4. Un estudiante dice que las gráficas de $y = -x^2 + 1$, y $y = -x^2 + 2$ se desplazan hacia abajo 1 y 2 unidades, respectivamente, porque x^2 tiene signo negativo, ¿es cierto o falso? ¿Por qué?

5. ¿Qué pasa si en lugar de sumar una constante a las funciones anteriores se le resta?

6. A manera de sintetizar, ¿cómo se comportan las gráficas cuando se suma o resta k unidades a ax^2, esto es, $y = ax^2 + k$?

Así, se espera que el estudiante observe el comportamiento que genera el parámetro k en $y = ax^2 + k$, pues si k es positivo, la gráfica de $y = ax^2$ se desplaza verticalmente k unidades hacia arriba. Si k es negativo, la gráfica se desplaza verticalmente $|k|$ unidades hacia abajo.

Por otra parte, concibe cuáles son las coordenadas del vértice de una parábola de la forma $y = ax^2 + k$:

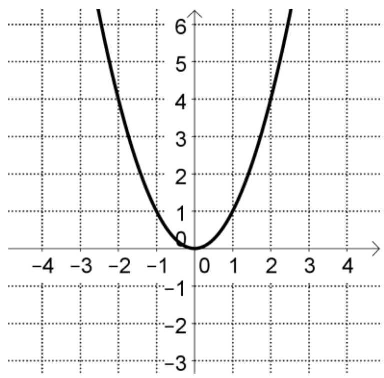
7. Completa la siguiente tabla.

	$y = x^2$	$y = x^2 + 2$	$y = x^2 - 7$	$y = -x^2 - 1$	$y = -3x^2 + 4$	$y = ax^2 + k$
Vértice	(0,0)					
Eje de simetría	$x = 0$					

Ahora, veamos qué sucede si se le suma o sustrae cierta cantidad a x.

Caso 3: $\boldsymbol{y = a(x - h)^2}$.

1. Si se tiene la gráfica de $y = x^2$, ¿cómo cambia la gráfica si le sumas 1 a x, esto es, $y = (x + 1)^2$?



2. ¿Qué pasa con $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 5)^2$? Trázalas en un mismo plano.

3. Si ahora tienes la gráfica de $y = 3x^2$, y a ésta le sumas 1 a x, $y = 3(x + 1)^2$, un estudiante dice que la gráfica de la nueva función se desplaza hacia arriba por que se está sumando 1 ¿es cierto lo que dice este estudiante?

4. Otro estudiante dice, si se suma 1 a x en $y = -x^2$, esto es, $y = -(x + 1)^2$, la nueva gráfica se desplaza hacia abajo por el signo menos ¿es cierto esto?

5. ¿Qué sucede si en lugar de sumar se le resta cierta cantidad a las funciones anteriores? Esto es, $y = (x - 1)^2$, $y = (x - 3)^2$, $y = 2(x - 5)^2$, $y = 3(x - 4)^2$.

6. Explica el efecto que genera h en $y = a(x - h)^2$.

De esta manera, se espera que el estudiante determine el efecto que genera el parámetro h en $y = a(x - h)^2$, esto es, si h es un número real positivo, la gráfica de $y = a(x - h)^2$ se desplaza horizontalmente h unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de $y = ax^2$; si h es un número real negativo, la gráfica de $y = ax^2$ se desplaza horizontalmente $|h|$ unidades hacia la izquierda.

Por otra parte, concibe cuáles son las coordenadas del vértice de una parábola de la forma $y = (x - h)^2$:

7. Completa la siguiente tabla.

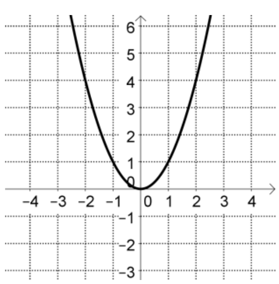
	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2$	$y = (x + 1)^2$	$y = -(x - 6)^2$	$y = 4(x + 3)^2$	$y = a(x - h)^2$
Vértice	(0,0)					
Eje de simetría	$x = 0$					

Caso 4: $\boldsymbol{y = a(x - h)^2 + k}$.

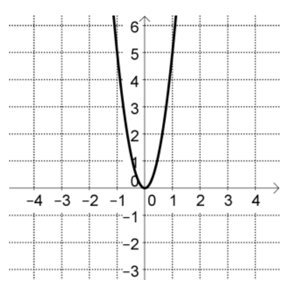
1. Con base en la gráfica de $y = x^2$, realiza el bosquejo de las siguientes funciones aplicando sólo los desplazamientos correspondientes. a) $y = 5(x - 1)^2 + 2$ b) $y = -(x + 3)^2 - 1$ c) $y = 3(x - 2)^2 - 4$ d) $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 3$

Solución:

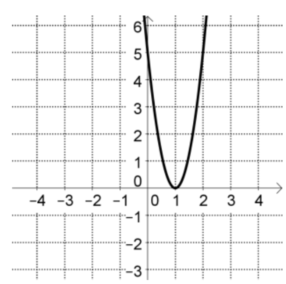
a)



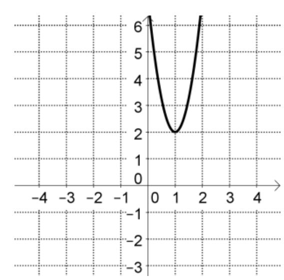
$y = x^2$: gráfica de base o referencia.



$y = 5x^2$: el 5 genera que la parábola se cierre un poco.



$y = 5(x - 1)^2$: el -1 hace que la parábola se mueva una unidad a la derecha.



$y = 5(x - 1)^2 + 2$: el 2 provoca que la parábola se mueva dos unidades hacia arriba.

De manera similar, resuelve el resto de los incisos.

2. Completa las siguientes tablas.

	$y = 5(x - 1)^2 + 2$	$y = -(x + 3)^2 - 1$	$y = 3(x - 2)^2 - 4$	$y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 3$	$y = a(x - h)^2 + k$
Vértice	(1,2)				
Eje de simetría	$x = 1$				

	$y=ax^2$	$y=ax^2+k$	$y=a(x-h)^2$	$y=a(x-h)^2+k$
Vértice				
Eje de simetría				

Además de dotar de significado a cada uno de los parámetros, también concibe la forma de determinar las coordenadas del vértice de una parábola, aspecto muy importante cuando se trata de encontrar el máximo o mínimo de una función cuadrática, y por otro lado, el eje de simetría que facilita el trazo de la gráfica por dividirla en dos partes homólogas.

Hacer el trazo de todas las funciones en los casos mencionados resulta tedioso y cansado para el estudiante, por ello, se recomienda trabajar en equipo para distribuir el trabajo. Por otra parte, en caso de contar con la herramienta tecnológica, se puede hacer este análisis con los programas Geogebra o Winplot donde, incluso,se puede dar animación a cada parámetro y así observar el comportamiento que se genera en cada caso.

Actividad 2. Hallar la expresión algebraica de la función correspondiente al desplazamiento de la gráfica $y=x^2$, según se indica en cada caso:

a) 4 unidades a la izquierda; 2 hacia abajo; abre en un factor de $\frac{1}{7}$; y es cóncava hacia arriba.
b) 1unidad a la derecha; 3 hacia arriba; se cierra en un factor de 6; y es cóncava hacia abajo.

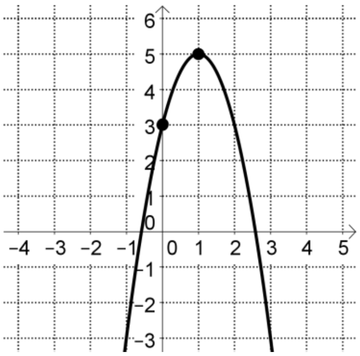
Actividad 3. ¿Cuánto vale $a,\ h$ y k en las siguientes funciones?

a) $y=-(x+1)^2$ b) $y=-7x^2$ c) $y=2x^2-3$ d) $y=5$

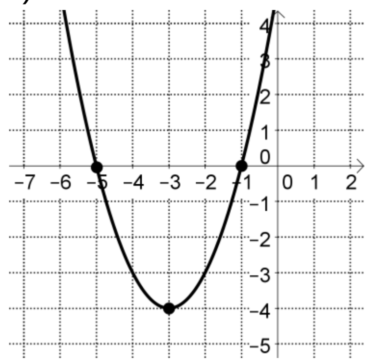
Actividad 4. ¿Cómo describirías la gráfica de la función $y=-3(x+5)^2-4$?

Actividad 5. Determinar la expresión de la función que represente a cada una de las siguientes gráficas:

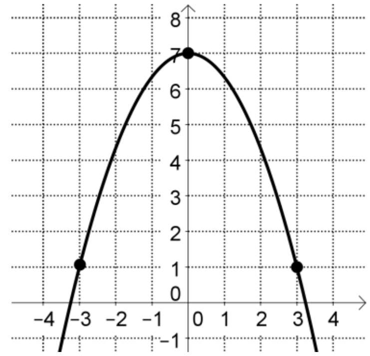
a)



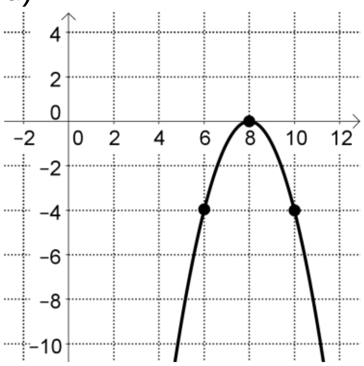
b)



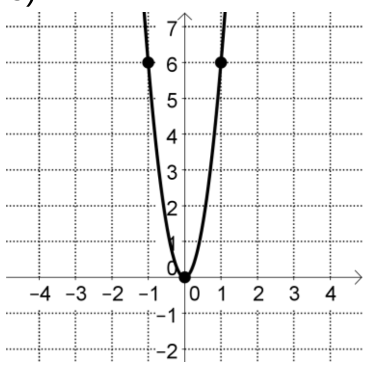
c)



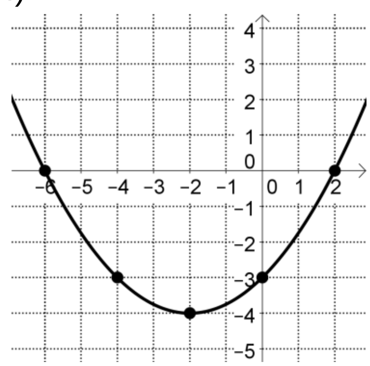
d)



e)



f)



Solución:

a)

De acuerdo al análisis anterior, en la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$ el vértice tiene coordenadas $V(h, k)$. Entonces, al sustituir las coordenadas del vértice de esta parábola, se tiene, $y = a(x-1)^2 + 3$.

Para encontrar el valor de a basta con sustituir las coordenadas de un punto que pertenezca a la parábola excepto el propio vértice. Por ejemplo, si se elige el punto $(0, 1)$, se tiene: $1 = a(0-1)^2 + 3$, donde $a = -2$.

Por lo tanto, la función que representa a esta gráfica es $y = -2(x-1)^2 + 3$.

De manera similar, resuelve el resto de los incisos.

Actividad 6. Hallar la expresión de la función cuadrática que cumpla los requisitos pedidos en cada caso.

a) Su gráfica interseca al eje y en $(0,3)$ y su vértice es $V(1,2)$.
b) Su gráfica pasa por el punto $(1,-1)$ y su punto máximo es $(-2,5)$.
c) Una de las raíces es $x=-6$ y el vértice es el punto $V(-\frac{1}{2},-4)$.

Actividad 7. Sin graficar, determinar la concavidad; el valor máximo o mínimo; el vértice y su eje de simetría de las siguientes funciones:

a) $y=-2(x+3)^2$ b) $y=\frac{5}{12}(x-1)^2+4$ c) $y=7x^2$
d) $y=-\frac{3}{10}x^2-9$ e) $y=-2x^2+12x-8$ f) $y=6x^2+14x$

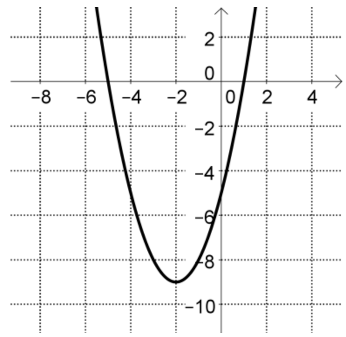
Actividad 8.
a) Escribe la expresión de una función cuadrática que tenga una raíz doble y traza su gráfica.
b) Escribe la expresión de una función cuadrática que tenga dos raíces diferentes y traza su gráfica.
c) Escribe la expresión de una función cuadrática que no tenga raíces reales y traza su gráfica.

1.4.1 Expresar una función cuadrática escrita en la forma general $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ a la forma estándar $\boldsymbol{y=a(x-h)^2+k}$.

¿Cómo graficar la función $y=-2x^2+12x-8$ aplicando sólo desplazamientos o transformaciones?

Ciertamente, la gráfica de esta función es cóncava hacia abajo y se cierra un poco dado que el coeficiente de x^2 tiene signo negativo y es mayor que 1. Pero, ¿cuál es su vértice? ¿Cuánto se desplaza horizontalmente o verticalmente?
Para saberlo, necesitamos convertir esta función escrita en su forma general a su forma estándar: $y=ax^2+bx+c \quad \rightarrow y=a(x-h)^2+k$. Para ello, utilizamos el método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP).

EJEMPLO 1. Convertir la función $y = x^2 + 4x - 5$ a la forma estándar y traza su gráfica.



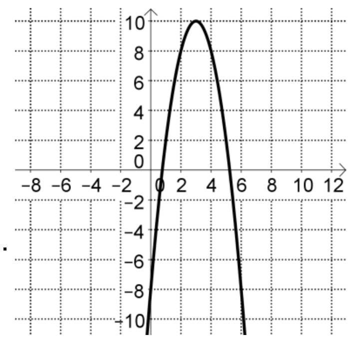
Solución:

$y = (x^2 + 4x) - 5$ Agrupamos las x.

$y = (x^2 + 4x + (2)^2) - 5 - (2)^2$ Completar el TCP para x.

$y = (x + 2)^2 - 9$ Factorizar el TCP y realizar la suma $-8 + 2(-3)^2$.

EJEMPLO 2. Convertir la función $y = -2x^2 + 12x - 8$ a la forma estándar y traza su gráfica.



Solución:

$y = -2x^2 + 12x - 8$

$y = -2(x^2 - 6x) - 8$ Factorizar -2.

$y = -2(x^2 - 6x + (-3)^2) - 8 + 2(-3)^2$ Completar el TCP para x.

$y = -2(x - 3)^2 + 10$ Factorizar el TCP y realizar la suma $-8 + 2(-3)^2$.

Actividad 9. Determinar la concavidad; el vértice; los valores extremos y traza las gráficas de las siguientes funciones aplicando los desplazamientos correspondientes.

a) $y = 3x^2 - 12x + 16$ b) $y = 7x^2 + 14x$ c) $y = -3x^2 - 24x - 43$

d) $y = -4x^2 + 2x + 1$ e) $y = 3x - 5 + 2x^2$

A modo de cerrar esta unidad, se sugiere trabajar el juego de memorama que se encuentra disponible en el apartado de anexos.

Ejercicios 1.4

1) Indicar cuál fue el desplazamiento aplicado a la función $y = x^2$ para obtener cada una de las siguientes expresiones:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = -2(x+3)^2$ c) $y = 0.2(x-1)^2 + 4$

2) Hacer un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones aplicando sólo los desplazamientos correspondientes:

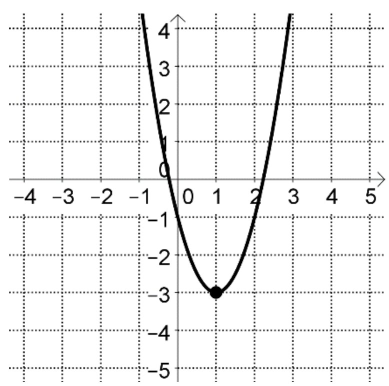
a) $y = -6(x+8)^2 - 3$ b) $y = \frac{7}{11}(x-5)^2 + 2$ c) $y = -(x-4)^2 - 1$

d) $y = 9x^2 + \frac{10}{6}$ e) $y = -0.25(x+3)^2$ f) $y = 12x^2$

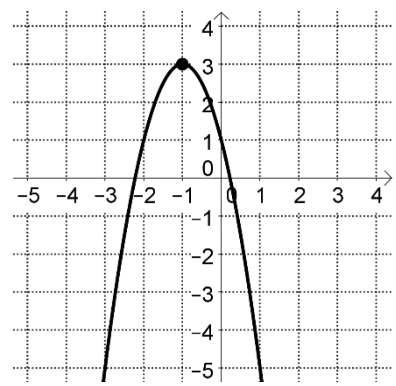
3) Asociar una de las funciones cuadráticas con su gráfica correspondiente.

a) $y = 2(x+3)^2 + 1$
b) $y = 2(x+1)^2 - 3$
c) $y = 2(x-3)^2 + 1$
d) $y = 2(x-1)^2 + 3$
e) $y = 2(x+3)^2 - 1$
f) $y = 2(x-3)^2 - 1$
g) $y = 2(x-1)^2 - 3$
h) $y = -2(x-3)^2 + 1$
i) $y = -2(x+1)^2 + 3$
j) $y = -2(x-1)^2 + 3$
k) $y = -2(x+3)^2 - 1$

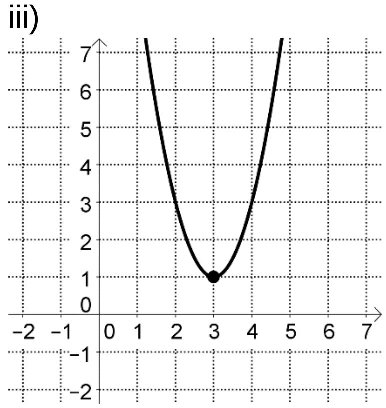
i)



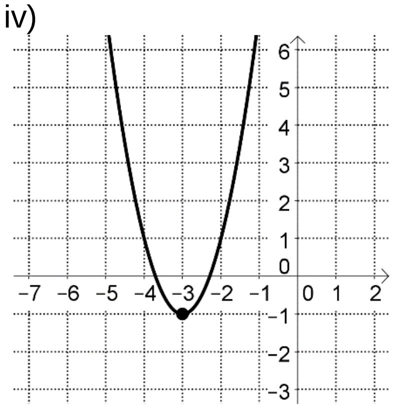
ii)



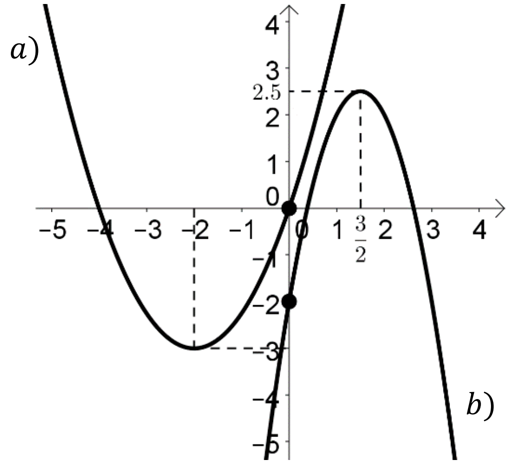
iii)



iv)

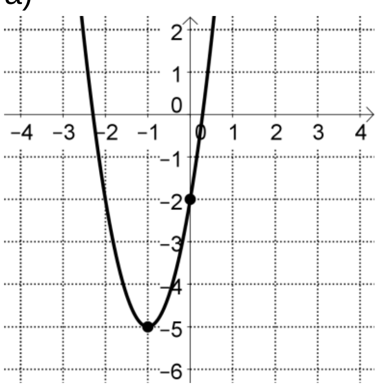


4) Determinar las raíces; la intersección con el eje y; la concavidad; el vértice; el punto máximo o mínimo; y su eje de simetría de las siguientes gráficas.

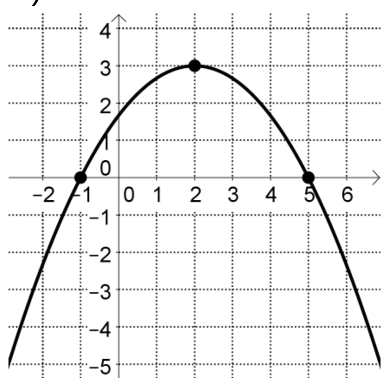


5) Determinar la expresión de la función que representa a cada una de las siguientes parábolas:

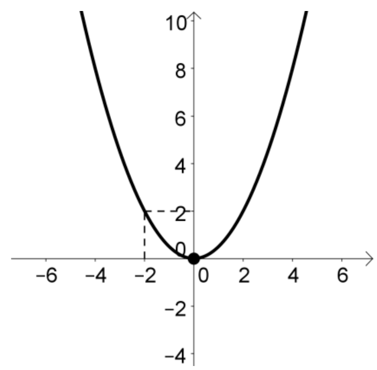
a)



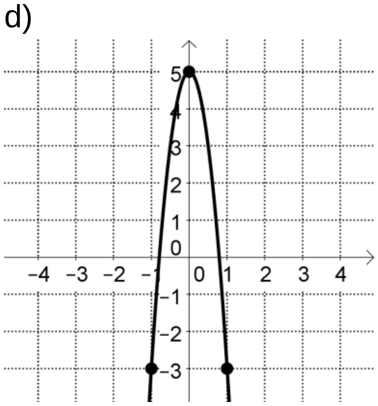
b)



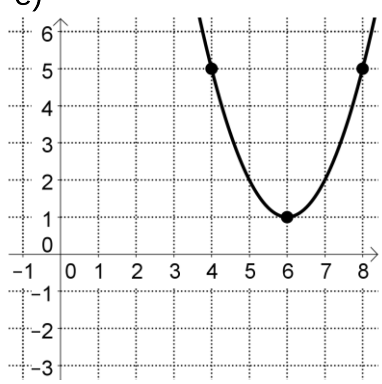
c)



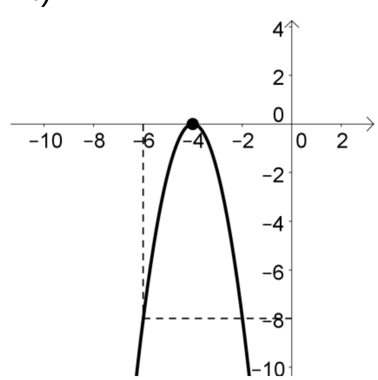
d)



e)



f)



6) Trazar las gráficas de las funciones cuadráticas, que cumplan con las siguientes condiciones, y determina su expresión algebraica.

Grafica 1:
a) Es cóncava hacia abajo.
b) Eje de simetría: $x = 4$
c) Pasa por el punto: $(-1, -2)$
d) Punto máximo: $(4, 5)$

Gráfica 2:
a) Es cóncava hacia arriba.
b) Ecuación del eje de simetría: $x = 0$
c) Pasa por el punto: $(2, 9)$
d) Punto mínimo: $(0, -7)$

7) Hallar la función cuadrática en su forma general, si su vértice es $\mathrm{V}\left(-\frac{1}{2},\ 6\right)$ y pasa por el punto (5, 1).

8) Determinar la concavidad; el vértice; el punto máximo o mínimo; su eje de simetría y bosqueja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = -x^2 - 9$
b) $y = 5x^2 - 3x$
c) $y = -4x^2 + 24x - 8$
d) $y = 2x^2 + 6x + 5$
e) $y = 3x^2 - 7x - 1$
f) $y = -6x^2 - 48x + 9$

9) ¿Cuál es el vértice de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$?

1.5 CONCAVIDAD, MÁXIMO O MÍNIMO.

Dado que hay aprendizajes que se repiten, como se mencionó en el apartado 1.2, se sugiere intercalar aquellos temas que muestran cierta relación. En este apartado, conceptos como concavidad, punto máximo y mínimo se han ido manejando desde el apartado 1.2 ya que se relacionan directamente con otros, y al integrarlos permite al alumno tener un lenguaje más amplio, y su tratamiento en diversas situaciones, desde ese momento, ayuda a una mejor conceptualización.

En este sentido, en este apartado no se hará mayor énfasis en la definición de estos conceptos, pero si se sugiere aplicar algunas actividades que refuercen cómo calcular el punto extremo (máximo o mínimo) de una función, que se vuelve fundamental para el siguiente tema.

Actividad 1.

a) Mostrar una gráfica que sea cóncava hacia arriba y otra que sea cóncava hacia abajo.
b) ¿Qué es lo que genera su concavidad?
c) Indicar la concavidad de las siguientes funciones:

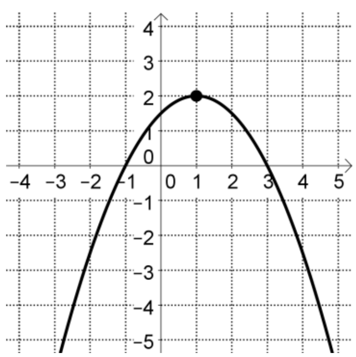
i) $y = -(x+7)^2 + 2$ ii) $y = \frac{1}{10}x^2$ iii) $y = -0.2(x-5)^2$

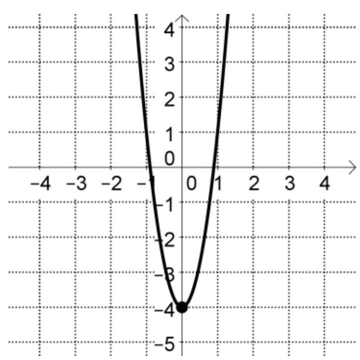
iv) $y = -8x^2 - 4$ v) $y = (x+3)^2$ vi) $y = 10x^2 + 3x - 1$

d) ¿Estas funciones tienen punto máximo o mínimo? ¿Cuál es?
e) ¿Cuál es el valor máximo/mínimo de cada función, y cuándo se obtiene este?

Actividad 2.

a) ¿Las siguientes gráficas presentan algún punto mínimo o máximo? ¿Cuáles son sus coordenadas?





b) En las gráficas de a), ¿cuál es el valor máximo/mínimo, y cuándo se obtiene este?

Actividad 3. Bosqueja las gráficas de las funciones cuadráticas que cumplen con las siguientes condiciones, y determina su expresión algebraica.

Gráfica 1: Su punto máximo es $(-3{,}7)$; interseca al eje y en 6.
Gráfica 2: Su punto mínimo es $(2, -5)$; una de sus raíces es $x = 4$.

Actividad 4. Dadas las siguientes funciones, determinar las raíces; la intersección en el eje y; el vértice; la concavidad; el valor máximo o mínimo y cuándo se obtiene este; su eje de simetría y bosqueja la gráfica de cada una.

a) $y = -(x + 5)^2 - 7$ b) $y = 8(x - 3)^2 + 11$ c) $y = -0.1(x - 2)^2$
d) $y = -3x^2 + 4$ e) $y = 2x^2$ f) $y = 6x^2 + 4x - 7$

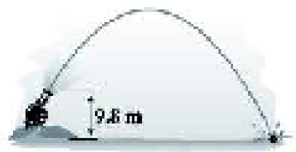
1.6 PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA.

A manera de concluir esta unidad, se sugiere trabajar diversos problemas que se puedan resolver por medio de las propiedades de las funciones cuadráticas. Esta parte, en lo particular, se nos hace muy interesante, pues el alumno descubre un pequeño campo donde aplicar el conocimiento construido hasta el momento y le da significado.

Por ejemplo, con las funciones cuadráticas se pueden resolver situaciones como: evaluar para algún valor de la variable independiente; resolver para algún valor de la variable dependiente. Así como para determinar el máximo o mínimo, por ejemplo, ¿Qué altura tiene el objeto después de 5 segundos? ¿Cuál es la temperatura mínima que alcanza la taza de café? ¿Después de cuántos segundos alcanza la taza de café su temperatura mínima?

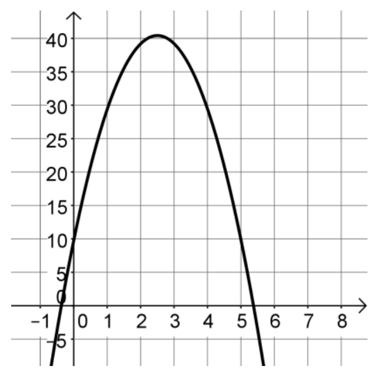
En este sentido, se sugieren los siguientes problemas:

Problema 1. Si un cañón se dispara a una altura de 9.8 metros desde el suelo, a cierto ángulo, la altura h de la bala con respecto al suelo, en el instante t, donde t es el tiempo en segundos, se determina por medio de la función: $(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$.



a) Determina la altura máxima que alcanza la bala del cañon.
b) Determina el tiempo que transcurre para que la bala obtenga su altura máxima.
c) Determina el tiempo que transcurre para que la bala choque contra el suelo.

Solución:
Como se trata de encontrar el valor máximo, escribimos la función $y = h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$ a su forma estándar, esto es, $y = -4.9(t-2.5)^2 + 40.425$. Y su gráfica es:

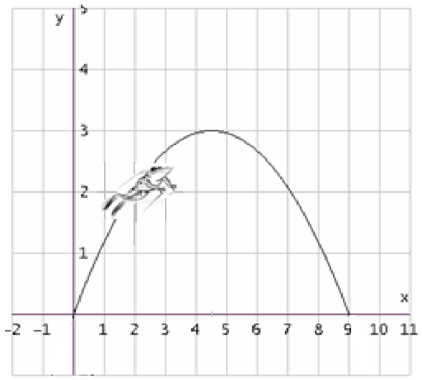


A partir de la forma estándar se deduce que el punto máximo es $(2.5, 40.425)$, por lo que:
a) La altura máxima que alcanza la bala es 40.425 m.
b) La cual se obtiene cuando han transcurrido 2.5 s.
c) Para determinar el tiempo que tarda en chocar contra el suelo, gráficamente será la intersección con el eje x, es decir, las raíces. En este sentido, las raíces son: $x_1 \approx -0.37,\ x_2 \approx 5.37$, de las cuales la respuesta correcta es 5.37 s.

Problema 2. Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está a 4 metros y puede cubrir saltando hasta 2.5 metros de altura. El jugador puede escoger para hacer el lanzamiento entre dos trayectorias, las correspondientes a las funciones $y = 0.4x - 0.05x^2$ y $y = 1.6x - 0.2x^2$. ¿Cuál es mejor? ¿Por qué?

Solución: $y = 1.6x - 0.2x^2$.
Max. $(4, 3.2)$.

Problema 3. Algunos animales al saltar siguen trayectorias parabólicas. La siguiente figura muestra el salto de una rana superpuesta a un sistema coordenado rectangular. La longitud del salto es de 9 unidades y la altura máxima es de 3 unidades. Hallar una función cuadrática que especifique la trayectoria de la rana.



Solución: $y = -\frac{12}{81}(x - \frac{9}{2})^2 + 3$

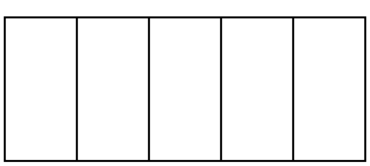
Problema 4. La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo vea una persona. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad *E* se mide en una escala de 0 a 10, entonces, la función que representa la efectividad es: $E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$ donde *n* es el número de veces que una persona ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿cuántas veces lo tiene que ver una persona?

Solución: 30 veces.

Problema 5. Separar al número 18 en dos partes, tal que el producto de las partes sea máximo.

Solución: $18 = 9 + 9$.

Problema 6. Un veterinario cuenta con 30 metros de tela de alambre y quiere construir cinco jaulas para perros, construyendo primero una cerca alrededor de una región rectangular y luego dividiendo la región en 5 rectángulos iguales mediante cuatro cercas paralelas a uno de los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la región rectangular con las que el área total es máxima?



Solución: altura $(x) = 2.5$;
largo $(y) = 7.5$

Problema 7. Se ha comprobado que cuando una pistola de señales es disparada verticalmente la altura del destello sobre la superficie es igual a $\mathrm{h} = 51\mathrm{t} - 0.85\mathrm{t}^2$, en donde t es el número de segundos que habrán transcurrido después del disparo. Si la pistola es disparada verticalmente, el destello puede verse desde un puesto de observación solamente cuando su altura es de 85 metros o más.

a) ¿A los cuántos segundos alcanza el destello su altura máxima?
b) ¿Cuál será la altura máxima que alcanza?
c) ¿Cuánto tiempo será visible el destello desde el puesto de observación?

Solución: $a)\ 30\ s\ ;\quad b)\ 765\ m\ ;\quad c)\ 56.6\ s\ Aprox.$

Problema 8. Si se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, ésta sube hasta un cierto punto y luego empieza a caer. La relación que existe entre el tiempo t (en segundos) que la piedra lleva en el aire cuando se encuentra a una altura y (en metros) está dada por la fórmula $y = -5t^2 + 20t + 10$. ¿Cuándo alcanzará el punto más alto? ¿A qué altura está ese punto?

Solución: $\text{A los } 2\ s \text{ tendrá una altura de } 30\ m$

Ejercicios 1.6

1) Determinar la expresión algebraica que representa la trayectoria del salto parabólico de un atleta que alcanza una altura máxima de 2 m y una longitud de 3.40 m.

2) La suma de dos números es 24. Encontrar dichos números con la condición de que su producto sea máximo.

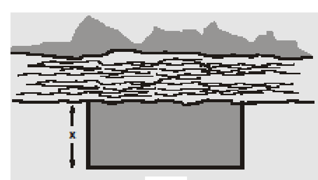
3) Encontrar dos números cuya suma es 56 y la suma de sus cuadrados es mínima.

4) El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresar el área del rectángulo en función del lado x de la base, y encuentra el valor de la base con el cual el área se hace máxima.

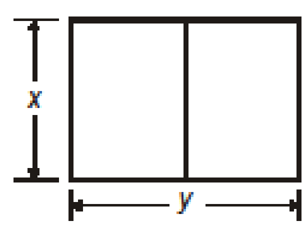
5) Si lanzamos una piedra al aire, un experimento señala que la trayectoria de la piedra está dada por la función $y = -5t^2 + 50t$, siendo t el tiempo en segundos, y y la altura en metros.
a) Calcular el segundo en que alcanza la máxima altura y cuál es la máxima altura.
b) ¿En qué segundo cae a tierra?
c) Representa gráficamente la función.

6) En un túnel de forma parabólica, dada por la función $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, se pide calcular:
a) La altura que alcanza a 2 m del pie del arco.
b) La altura máxima.
c) El ancho de la base del túnel.

7) Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por tres de sus lados, ya que el cuarto lado estará limitado por el cause de un río. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?



8) Con un rollo de 270 metros de alambrada se deben construir dos corrales adyacentes idénticos, como se muestra en la figura. Calcular las dimensiones que debe tener el cercado para que el área abarcada sea máxima.



Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

	PUNTOS PROBLEMÁTICOS	PROPUESTA DE SOLUCIÓN
1.1 SITUACIONES QUE INVOLUCRAN CAMBIO Y QUE DAN ORIGEN A FUNCIONES CUADRÁTICAS.	A los estudiantes se les dificulta mucho establecer un modelo algebraico que generalice cierta situación.	Se puede iniciar con ejemplos sencillos que den lugar a funciones cuadráticas e ir subiendo el nivel poco a poco. Se sugiere darles el tiempo suficiente y que escriban todas sus aproximaciones individualmente. Después, mediante una lluvia de ideas, escribirlo en el pizarrón. Esto permitirá observar diferentes formas algebraicas que se pueden descartar o relacionarse entre si hasta llegar a la respuesta correcta. Dependiendo de la situación, se puede orientar al alumno a través de preguntas que le permitan reflexionar al respecto.
1.2 COMPARACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON LA FUNCIÓN LINEAL.	Al contrastar ciertas características entre ambas funciones no surge mayor problema. Sin embargo, cuando se trata de trazar la gráfica de una función cuadrática algunos estudiantes si presentan dificultades. Presentan dificultades en la comprensión del concepto de función.	Ante esta situación, se sugiere ejercitarse en cuanto a las operaciones básicas, y la aplicación de la ley de los signos. Se sugiere proporcionar ejercicios extra clase y apoyar en lo que sea necesario. Hacer ver la relación entre 2 variables, se puede usar los diagramas de Venn, aprovechar las tabulaciones, y mostrar otras relaciones que no sean función. Ejemplificar la relación cada alumno con su silla, etc.
1.3 INTERSECCIONES DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON EL EJE *X*.	Cuando se trata de trazar la gráfica asociada a una ecuación, algunos estudiantes no recuerdan como hacerlo, pues sólo observan una ecuación con una variable. Por otra parte, presentan dificultades para transitar de la representación	Ante esta situación, hay que reafirmar que siempre se debe hallar la función asociada de la ecuación, donde basta con sustituir a la y por el cero. Así, en el caso de la ecuación cuadrática se tiene: $ax^2+bx+c=0 \;\rightarrow\; y=ax^2+bx+c$ Hay que ejercitar esta parte en clase, proporcionando tiempo suficiente para que el alumno observe e intente a prueba y error,

	tabular al algebraico ya que algunos no pueden determinar la función cuadrática a partir de la tabla. Y algunos otros, siguen presentando dificultades para trazar la gráfica. Porque tienen problemas en sus cálculos aritméticos. Por otra parte, se equivocan al resolver una ecuación cuadrática.	cómo se relacionan los valores de y con respecto a los de x. Hay que iniciar con ejercicios sencillos y subir el nivel poco a poco. Seguir ejercitándose en cuanto a las operaciones básicas y leyes de los signos. Así como acudir a Asesorías que brinda el plantel. Ejercicios extras de resolución de ecuaciones cuadráticas.
1.4 **ESTUDIO GRÁFICO Y ANALÍTICO DE LA FUNCIÓN:** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$	Los estudiantes suelen confundir el significado de alguno de los parámetros en $y = a(x-h)^2 + k$. Algunos presentan dificultades para determinar la expresión algebraica de una parábola dada. Donde, al momento de sustituir en la forma estándar, confunden el orden de las coordenadas del vértice, así como sus signos correspondientes. Asimismo, cometen errores al momento de despejar el parámetro *a*. Por otra parte, una de las dificultades muy frecuente es el escribir la función cuadrática dada en su forma general a su forma estándar.	Ante esta situación, se sugiere invitarlo a que revise nuevamente y se de cuenta por si mismo de su error. Situación que disminuye la probabilidad de equivocarse en ejercicios posteriores, que si uno mismo se los indica. Recordar que el vértice tiene coordenadas (h, k); y que el signo de h se sustituye con signo contrario. Además, mencionar que hay que tener cuidado con las operaciones básicas y la ley de los signos. Se sugiere dejar ejercicios extras con despejes similares pero sencillos. Repasar el método de completar un trinomio cuadrado perfecto, y factorización de expresiones sencillas. Enviarlos a las asesorías en el PIA o prepararles un formato con los pasos a seguir para hacerlo.

1.5 CONCAVIDAD, MÁXIMO O MÍNIMO.	En este tema no hay mayor dificultad, siempre y cuando se hayan ido trabajando estos conceptos desde la unidad 1.2	
1.6 PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA.	Dificultades en cuanto a establecer la expresión que represente la situación del problema. Por otra parte, algunos siguen presentando dificultades en convertir la expresión general a la estándar.	Resolver en clase los problemas de forma individual, en equipo, y por último, grupal. Lo cual permite que el alumno reorganice su forma de pensamiento, y su estrategia de solución. Como profesor, estar siempre atento a las respuestas e iniciar una reflexión al respecto.

Bibliografía básica y complementaria.

Gobran, A. “Álgebra elemental”. Iberoamérica, México, 1990.

Larson, R., y Hostetler, R. “Álgebra”. Cultural, México, 1996.

Miller, C., et al. “Matemática: Razonamiento y Aplicaciones”. Addison Wesley Longman, México, 1999.

Cantoral, R. y Montiel, G. “Funciones: visualización y pensamiento matemático.” Pearson Educación, México, 2001.

Santos, L. “La función cuadrática: enfoque de resolución de problemas”. Trillas, México, 2010.

Páginas Web, vistas el 28 de septiembre de 2014:

http://www.matematicasies.com

http://www.math2me.com

http://es.khanacademy.org