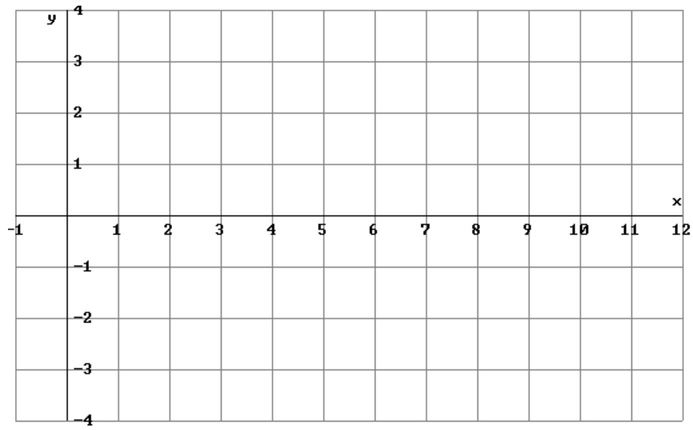
4.10 Gráficas de funciones logarítmicas.

Empecemos por recordar las que ya hicimos en la sección 4.8, en esta sección trazamos la función logaritmo base 2 de x, conociendo su inversa y reflejándola sobre la recta $y = x$ o sea invirtiendo los valores de x y y, también se trazaron otras, pero ahora ya las puedes trazar con ayuda de la calculadora, evaluando en algunos valores de x y conociendo la forma puedes delinear la gráfica de la función logaritmo en cualquier base y además analizarla. Hagamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1) Trazar la función $f(x) = log_3\, x$ y analizarla
Solución: Una forma de trazar su gráfica es recordando la definición y escribiéndola en forma exponencial, $y = f(x) = log_3\, x$, $x = 3^y$ y le damos valores a y para encontrar los de x, completa la tabla y localízalos puntos sobre el plano uniéndolos con una curva suave.

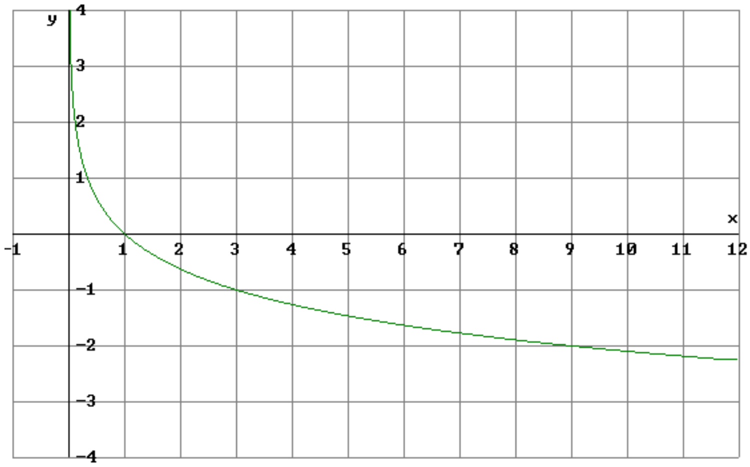
$x = 3^y$	$y = f(x)$
	-2
	-1
	0
	0.5
	1
	2
	3



No cruza el eje y, conforme los valores de x se acercan a cero se pega al eje ______ por lo que tiene una asíntota ____________ de ecuación ________
El rango y el dominio son:
D = ____________________, R = ____________________
Cruza al eje x en el punto __________, por lo tanto esta función tiene un cero real
Conforme la x se extiende hacia los positivos la función ____________ y es cóncava hacia __________.
Como te puedes dar cuenta tiene la misma forma de las logarítmicas que ya trazaste con la base mayor que 1 ($a > 1$)

Ejemplo 2) Trazar la gráfica de $g(x) = log_{1/3}\, x$ y analízala.

Solución: Escribiéndola como $x = (1/3)^y = 3^{-y}$, completa la tabla y marca los puntos sobre la gráfica ya dada.
Su dominio y rango son:
D = ______________________, R = ____________________
No cruza al eje y así que tiene una asíntota __________, cuya ecuación es: _______________
La función g es _______________
Cruza al eje x en el punto ___________, por lo que tiene un ______________



x	$y = g(x)$
	-3
	-2
	-1
	-0.5
	0
	1
	2

Ahora la curva es cóncava hacia _____________.
También es una función uno a uno (biunívoca), ya que si trazamos rectas horizontales, sólo cruzan a la curva en un solo punto.
La gráfica la podemos trazar reflejando sobre el eje x a la gráfica anterior (f), si le cambiamos de signo a y se invierte sobre el eje x

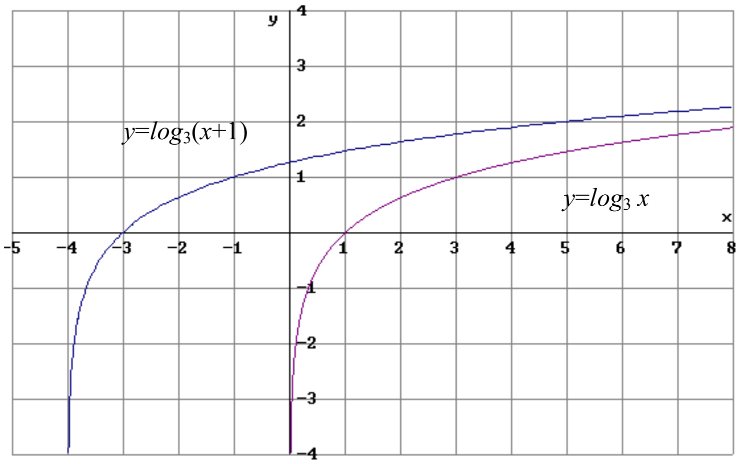
Ahora ya puedes enumerar las propiedades de la función logarítmica $f(x) = log_a\, x$ cuando a es mayor que 0 y diferente de 1 (a >0 y $a \neq$ 1)

1) ____
2) ____
3) ____
4) ____
5) ____
6) ____
7) ____
8) ____

Ejemplo 3) Traza la gráfica de la función $h(x) = log_3\,(x + 4)$ y encuentra: su dominio, rango, ecuación de la asíntota vertical y las intersecciones con los ejes.
Solución:
El dominio de la función lo obtenemos resolviendo la desigualdad $x + 4 > 0$, ya que solo podemos sacar logaritmos de números positivos.

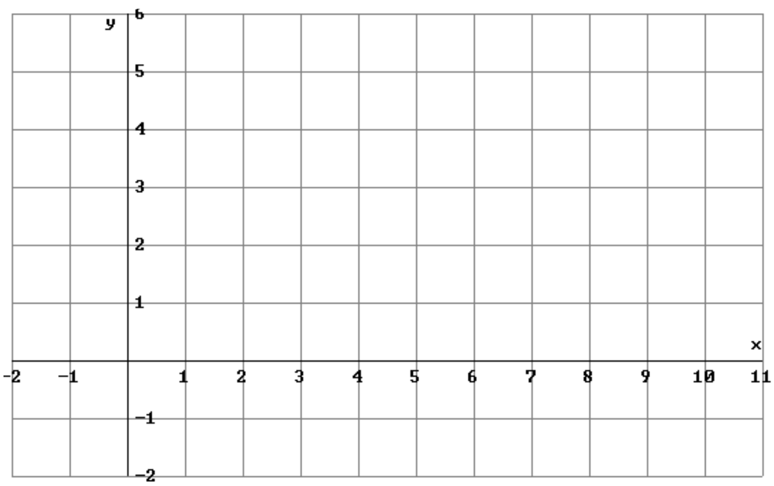
$x + 4 > 0$, $x > -4$, así que su dominio es: ______________________
La asíntota vertical tiene ecuación ___________, márcala sobre la gráfica
Como ya conocemos la gráfica de $y = log_3\, x$, la gráfica de h la podemos obtener desplazando hacia la izquierda 4 unidades esta gráfica (si a x le sumamos o le restamos una cantidad la gráfica se desplaza sobre el eje x a la izquierda o a la

derecha respectivamente). Puedes darle algunos valores a y para encontrar x, pasando la expresión a su forma exponencial $x + 4 = 3^y$, $x = 3^y - 4$, para verificar la siguiente gráfica.



El rango es: ____________________
Cruza al eje y en el punto (resuelve la ecuación que resulta cuando $x = 0$): ______
Cruza al eje x en el punto (resuelve la ecuación que resulta cuando $y = 0$): ______

Ejemplo 4) Traza la gráfica de $y = 2 - log\,x$ y analízala.
Solución:
Como antes de la función logaritmo hay un signo negativo, este hace que se refleje sobre el eje x y el 2 se le suma a la función, así que ahora sube 2 unidades, recordemos que la inversa de la función logaritmo en base 10 era 10^x y esta pasaba por (-🗁, $10^{-1/2}$), (0, 1), (🗁, $10^{1/2}$) (1,10) si invertimos los puntos tenemos por donde pasa la función logaritmo base 10: ______, ______, ______, ______
Localiza los puntos sobre el plano para delinear la función logaritmo en base 10



Para trazar la gráfica que se nos pide, reflejamos sobre el eje x y subimos dos unidades, ahora delinéala sobre el plano. Puedes probar si es la correcta evaluando directamente en la calculadora.

La curva es cóncava hacia _______

El dominio y su rango son:

D= ____________________, R = _________________

La ecuación de la asíntota vertical es: ___________

No cruza al eje y, y al eje x lo cruza en el punto que resulta al resolver la ecuación

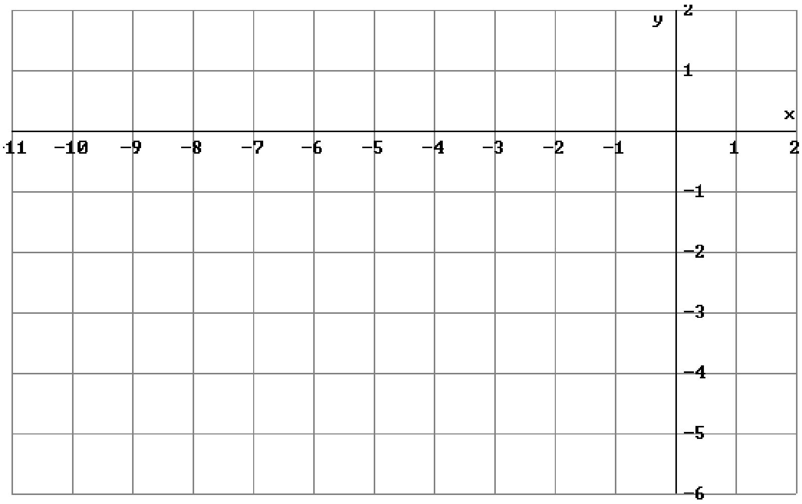
$$0 = 2 - \log x, \qquad 2 = \log x, \qquad x = 10^2 = 100$$

Este punto es __________, tiene un cero real

Ejemplo 5) Traza la gráfica de F(x) = $\ln(-x) - 3$

Solución:

Como no se pueden sacar logaritmos de números negativos x debe tomar valores negativos, así que el signo negativo antes de x refleja la función sobre el eje y. La inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial y esta pasa por los puntos (-1, e^{-1}), (0, 1), (1, e) (1, e^2) los invertimos y tenemos los puntos por donde pasa la función logaritmo natural ________, _______, ________, ________; como ya conocemos la forma de estas funciones con estos puntos la podemos delinear y para trazar la función F reflejamos sobre el eje y y bajamos 3 unidades, trázala sobre el siguiente plano. Puedes probar escribiendo la expresión en forma exponencial ___________ y dándole algunos valores a y para conocer x o evaluando directamente en tu calculadora.



La función es ________________ y cóncava hacia _____________

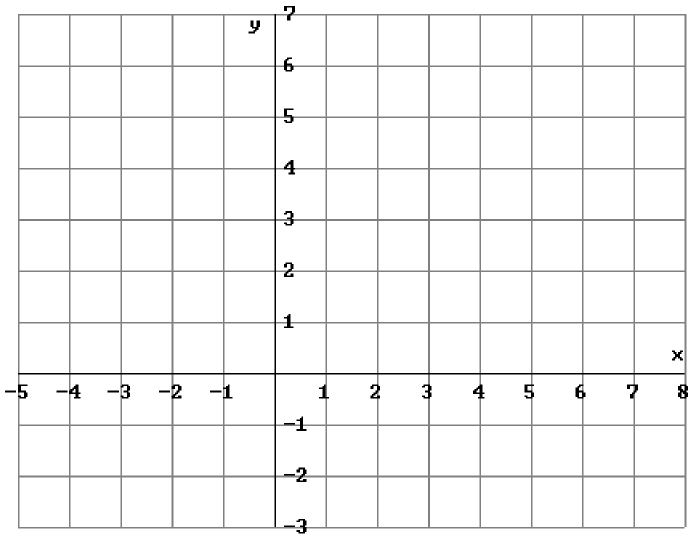
La ecuación de la asíntota vertical es ________

Su dominio y rango son:

________________________, ________________________

Cruza al eje y ________________ y al eje x lo cruza en el punto en donde y o F vale cero, así que las coordenadas de este punto son: ____________

Ejemplo 6) Traza la gráfica de la función $f(x) = log_5(5 - x) + 4$
Solución:
La inversa de la función logaritmo en base 5 pasa por (-1, 1/5), (0, 1), (0.5, $5^{1/2}$) (1, 5), así que la función logaritmo base 5 pasa por los puntos: _________, ________, ________, _________, conociendo su comportamiento con estos puntos puedes delinear la gráfica de la función, se refleja sobre el eje y debido a que x tiene un signo negativo; se recorre 5 unidades hacia la derecha ya que $5 - x > 0$, $5 > x$ o x menor que 5 y sube 4 unidades, trázala sobre el siguiente plano y comprueba evaluando en algunos valores de x, utilizando el cambio de base.

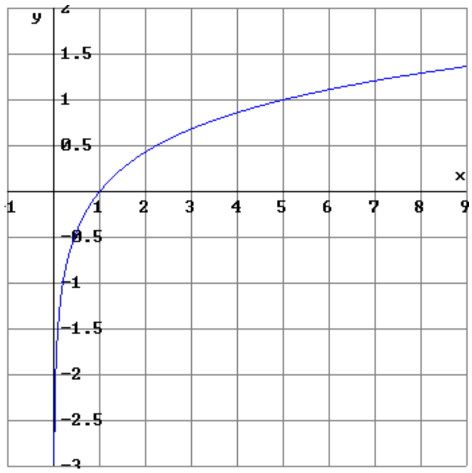


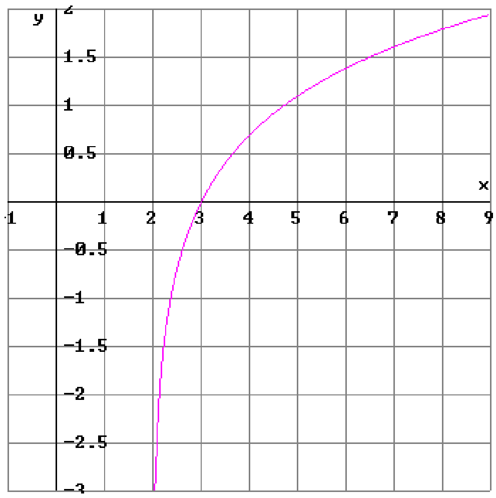
La ecuación de la asíntota vertical es: ____________
El dominio y el rango de la función son:
_________________________, _____________________
La gráfica es ________________ y cóncava hacia ___________
Cruza al eje y en el punto ____________ y al eje x lo cruza en el punto _________

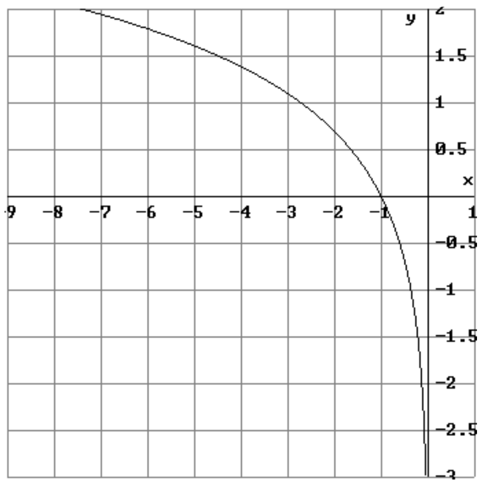
Ejercicio I) Traza la gráfica de cada función y encuentra su dominio y rango, así como los puntos donde cruzan a los ejes.

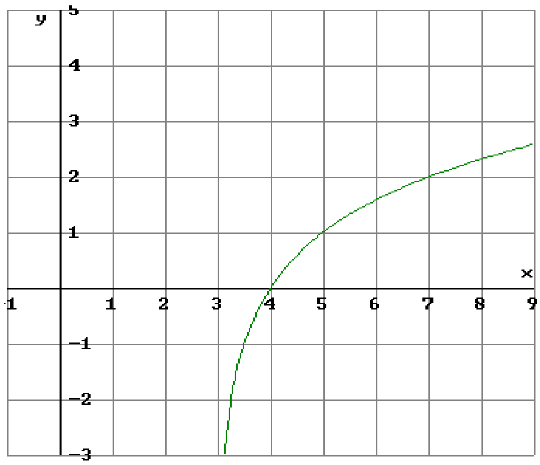
1) $f(x) = log_2(-x)$	2) $g(x) = - log_2 (x + 6)$	3) $h(x) = log (3 - x)$
4) $k(x) = ln (x^2 + 1)$	5) $m(x) = log_{1/3} (2 - x)$	6) $n(x) = log_4 (x - 3) - 2$
7) $p(x) = - 2 log_{1/2} (5 + x) + 3$	8) $q(x) =- ln (x - 4) + 2$	9) $F(x) = log (x - 5) - 4$

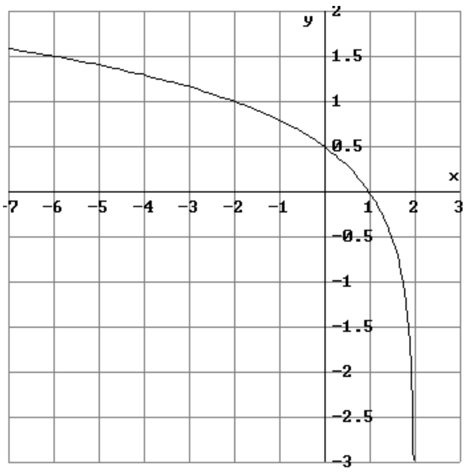
Ejercicio II) En cada una de las gráficas determina la función que representa

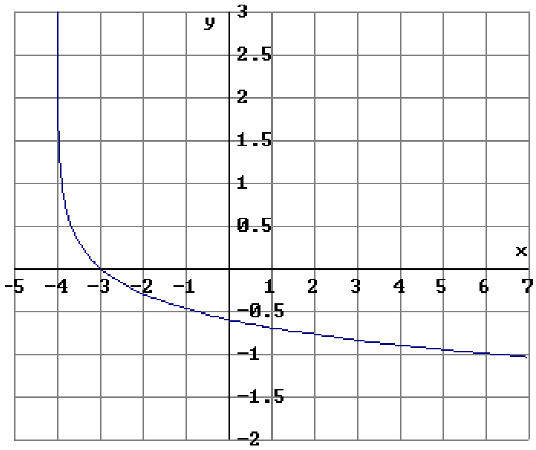

y
x
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
1 2 3 4 5 6 7 8 9


y
x
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
1 2 3 4 5 6 7 8 9


y
x
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
1 2 3 4 5 6 7 8 9


y
x
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3


y
x
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7

4.11 Problemas diversos de aplicación

Regresemos al ejemplo 1 de la sección 4.7

Ejemplo 1) Un esqueleto contiene la centésima parte de su cantidad original de carbono 14 (^{14}C). Calcula la antigüedad del esqueleto, con precisión de1000años. (La vida media del ^{14}C es de aproximadamente 5750)

Solución:

Vimos que la expresión que relaciona la cantidad de carbono 14 y el tiempo es de la forma ____________ , cuando t = ____________, entonces A = ______

Con lo anterior podemos calcular el valor de k, despejándola de la ecuación

____

Dividiendo entre A_0 ______________

Aplicando logaritmo natural de ambos lados, ln (1/2) = ______

Así que $k = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = -0.000120547$

Este valor de k es mucho más preciso que el que obtuvimos por ensayo y error

Para calcular la antigüedad del esqueleto, ahora sustituimos el valor de A y el valor de k que ya obtuvimos y ahora necesitamos despejar a t de la siguiente expresión

____

haciendo lo mismo que cuando despejamos a k, llegamos

$t = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} =$ ____________

Así que el esqueleto tiene una antigüedad de _________ años, como nos dicen que con una precisión de 1000 años, este valor esta más cercano a ___________________.

Ejercicio 1) Resuelve los ejercicios 1 y 2 de la sección 4.7 utilizando logaritmos y compara los resultados.

Ejemplo 2) La concentración del ion de hidrógeno de una sustancia se relaciona con su acidez y basicidad. Debido a que las concentraciones del ion de hidrógeno varían en un rango muy amplio, se usan logaritmos para crear una escala de pH comprimida, que se define como sigue: $\mathrm{pH} = -\log [H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración del ion de hidrógeno, en moles por litro. Calcula el pH de cada una de las sustancias e indica si es ácido o base. Calcula las respuestas con una cifra decimal.

a) Agua de mar, 4.63×10^{-9} b) Vinagre, 9.33×10^{-4}

c) Leche, 2.83×10^{-2} d) La paja del cultivo, 3.78×10^{-6}

e) Si el agua de lluvia normal tiene un pH de 5.7, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno en moles por litro?

Solución:

En los primeros incisos solamente sustituimos la concentración de iones de hidrógeno que se nos da y las sustancias con un pH < 7 son ácidas, pH > 7 son bases.

a) $\mathrm{pH} = -\log [4.63 \times 10^{-9}] =$ ________, por lo tanto el agua de mar es ____________.

b) Para el vinagre, pH = $-log$ [________] = ______, el vinagre es _____________

c) La leche tiene un pH = ________________= _______, por lo que es ________

d) La paja del cultivo tiene un pH = ____________ = _____, es ____________

e) Si el agua de lluvia normal tiene pH = 5.7 = $-\log[H^+]$, tenemos que despejar a la concentración, pasamos a la forma exponencial y tenemos

________________, por lo que H^+ = ______________

Así que la concentración de iones de hidrógeno es de 2 x 10^{-6} moles por litro.

Ejemplo 3) Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura T de un objeto en el tiempo t satisface la ecuación, $\ln|T - T_0| = -kt + C$, donde T_0 es la temperatura del medio circundante y k y C son constantes. Si se tiene una taza de café con temperatura de 82 °C y se coloca en una habitación a 22 °C en el tiempo $t = 0$.

a) Determina el valor de C hasta el diezmilésimo más cercano.
b) Después de 2 minutos la temperatura del café ha descendido hasta 66 °C. Encuentra el valor de k hasta el diezmilésimo más cercano.
c) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la temperatura del café disminuya hasta 38 °C?

Solución:

a) Sustituimos los valores de T = _______, t = ____ y T_0 = __________, en la ecuación dada, ______________________

por lo que C = _______ = __________

b) Ahora en la misma ecuación sustituimos t = ______, T = ______, T_0 sigue teniendo el mismo valor y C = ___________

____

$\ln 44$ = ____________

k= $\overline{\hspace{3cm}}$

k = ___________

c) Nuevamente sustituimos los valores de T = _____, T_0 = _____, C = ________ y k = ________ en la ecuación dada

__________________________ , ahora despejamos a t

$-0.1551\, t$ = _________________

t = $\overline{\hspace{4cm}}$ = _________

Deben transcurrir ___________ minutos para que la temperatura del café llegue hasta 38 °C.

Ejercicios)

1) La intensidad de un sonido se indica a menudo en decibeles (dB). La intensidad de un sonido L en dB se define en términos de su intensidad I mediante la ecuación, $L = 10\,log\dfrac{I}{I_0}$, donde I_0 representa la intensidad mínima audible promedio para la persona (el "umbral de audición"), 1.0×10^{-12} W/m^2.
   a) Un concierto de rock común puede tener una intensidad de 1 W/m^2. ¿Cuál es la intensidad en decibeles de un concierto de este tipo?
   b) Un murmullo tiene una intensidad de 20 dB. ¿Cuál es su intensidad?

2) Una célula de leucemia que se inyecta en un ratón saludable, se dividirá en dos células en aproximadamente ½ día. Al finalizar el día estas dos células se dividirán en cuatro. La duplicación continuará hasta que se hayan formado mil millones de células; después el animal muere con el cuerpo invadido de células leucémicas.
   a) Escribe una expresión que dé el número N de células leucémicas después de t días.
   b) ¿Cuándo morirá el ratón? Aproxima al día más cercano.

3) El número de watts proporcionados por una batería de d días de vida de un satélite, esta dado por la fórmula, $w = 50\,e^{-0.004d}$
   a) ¿Qué tiempo pasará para que la potencia disponible disminuya a 30 watts?
   b) ¿Qué tiempo pasará para que la potencia disponible disminuya a sólo 5 watts?

4) Si usted invierte \$ 500.00 al 10 % de interés anual compuesto mensualmente, ¿Cuánto tiempo tardará en convertirse \$ 875.00? ¿Cuánto tardará si la composición es continua?

5) La demanda para un nuevo producto crece rápidamente al principio y luego se nivela. El porcentaje P de compras reales de este producto después de que ha estado en el mercado t meses es, $P = 90 - 80\,(\text{☟})^{t}$
   a) ¿Cuál es el porcentaje de compras del producto después de 5 meses?
   b) ¿Cuál es el porcentaje de compras del producto después de 10 meses?
   c) ¿Cuál es el porcentaje máximo de compras del producto?
   d) ¿Cuántos meses deben pasar antes de tener 40 % de compras?
   e) ¿Cuántos meses deben pasar antes de tener 70 % de compras?

6) La sal ($NaCl$) se descompone en agua en iones de sodio (Na^+) y cloro (Cl^-), según la ley de decaimiento. Si la cantidad inicial de sal es de 25 kg y después de 10 horas quedan sólo 15 kg, ¿cuánta sal queda después de 1 día? ¿Cuánto tardará en quedar ½ kg de sal?

7) Una pizza cocida a 230 °C se saca del horno a las 5. 00 PM y se lleva a una habitación con temperatura constante de 21 °C. Después de 5 minutos la pizza está a 148 °C. ¿A qué hora estará la pizza a 57 °C? (según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura T de un objeto en el tiempo t satisface la ecuación, $ln\,|T - T_0| = -kt + C$, donde T_0 es la temperatura del medio circundante y k y C son constantes)

8) Si un capacitor cargado se pone en un circuito donde el único otro componente es un resistor, entonces la carga fluirá hacia fuera del capacitor. La carga Q en el capacitor después de t segundos está dada por, $Q = Q_0\, e^{-t/RC}$, donde R es la resistencia, C es la capacitancia, y Q_0, la carga inicial sobre el capacitor. En un circuito con R = 20 000 ohms y $C = 4 \times 10^{-11}$ faradios, ¿cuánto tiempo tardará el capacitor en perder 40 % de su carga inicial?

9) La vida media del Paladio 100 es de 4 días. Después de 20 días una muestra ha reducido su masa hasta 0.375 g.
   a) ¿Cuál fue la masa inicial de la muestra?
   b) Determina una fórmula para la masa restante después de t días?
   c) ¿Cuál es la masa después de 3 días?
   d) ¿Después de cuántos días habrán únicamente 0.15 g?

10) Puede demostrarse que sí en cierto año se consume una cantidad de A_0 de petróleo, y si existe una tasa de crecimiento anual de consumo r, entonces la cantidad A de petróleo consumido en los siguientes t años está dada por.

$$A = \frac{A_0}{A}\left(e^{rt} - 1\right)$$

   a) Despeja t.
   b) En 1990 se estimó que las reservas de petróleo disponibles en el mundo eran de 983.4 miles de millones de barriles de petróleo y que en ese año se consumieron 21.3 miles de millones. Si existe una tasa anual de crecimiento del consumo de petróleo de 2.5 %, estima el año que pronostica la fórmula anterior que se terminará la reserva de 1990.

11) Dada la masa (m) medida en kg y la altura (h) medida en cm de una persona, los investigadores médicos utilizan la fórmula empírica

$$log\,A = -2.144 + 0.425\,log\,m + 0.725\,log\,h$$

Para calcular el área (A) de la superficie de su cuerpo.
   a) Calcula el área A de la superficie del cuerpo de una persona cuyo peso es de 75 kg y mide 180 cm.
   b) Calcula el área de la superficie de tu cuerpo.

A U T O E V A L U A C I Ó N

Traza las gráficas de las siguientes funciones, di cuál es el dominio, el rango y las asíntotas.

1) $F(x) = \mathbf{(1/3)}^x - 3$

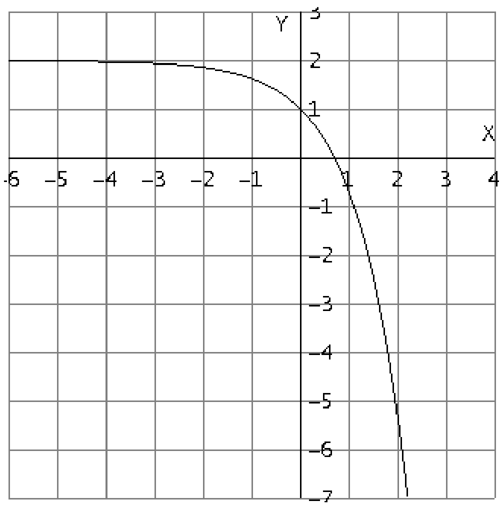
2) $M(x) = -3\,\mathbf{ln}\,(x) + 1$

3) $G(x) = log_4\,(x + 4) - 2$

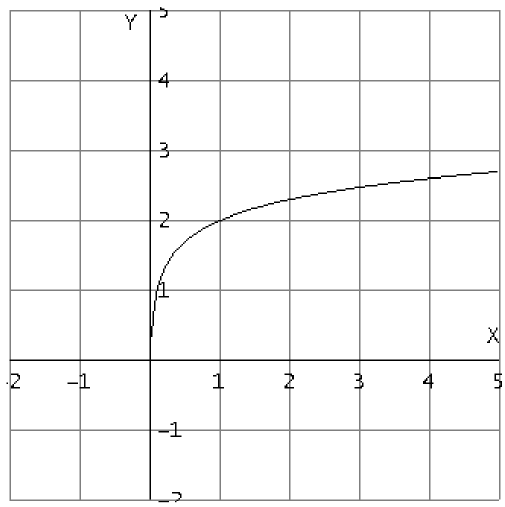
4) $K(x) = 4 - e^{(x-5)}$

Encuentra la regla de correspondencia para cada gráfica, y da su dominio, rango y asíntotas.

5)



6)



Puedes elegir entre: $J(x) = \mathbf{ln}\,(x) + 2$ $K(x) = \mathbf{log}\,(x) + 2$ $L(x) = -10^{x} + 2$ $M(x) = -\mathbf{log}\,(x) + 2$ $N(x) = -\boldsymbol{e}^x + 2$ $P(x) = -\mathbf{ln}\,(x) + 2$

7) Aplicar las propiedades de los logaritmos para desarrollar totalmente

$$ln\ \sqrt{x} \cdot \left[\frac{x}{b^3}\right]^2$$

Determina la solución de las siguientes ecuaciones:

8) $2^{x+1} = 5^{1-2x}$

9) $2\,log\,x = log\,2 + log\,(3x - 4)$

10) Los psicólogos usan a veces la función $L(t) = A(1 - e^{-kt})$ para medir la cantidad L aprendida en el tiempo t. El número A representa la cantidad por aprender y el número k mide la razón de aprendizaje. Suponga que un estudiante tiene una cantidad A de 200 palabras de vocabulario por aprender. Un psicólogo determina que el estudiante aprendío 20 palabras después de 5 minutos.

a) Determine la razón de aprendizaje k.
b) ¿Cuántas palabras aproximadamente habrá aprendido el estudiante después de 10 minutos?
c) ¿Qué tiempo le tomará al estudiante aprender 180 palabras?