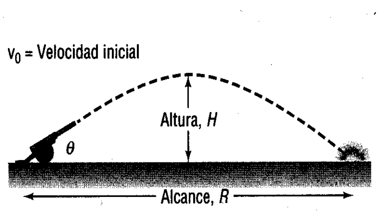
3.1 Situaciones que involucran funciones trigonométricas

Ejemplo 1) La trayectoria de un proyectil disparado con una inclinación θ respecto a la horizontal y con una velocidad inicial v_0 es una parábola. Expresa el alcance R del proyectil, es decir, la distancia horizontal que viaja, en función de θ.



Solución.-

En $t = 0$, $x(0) = y(0) =$ ________

La velocidad tiene dos componentes una en ______ y la otra en ________,

$v_{0x} =$ _____________ y $v_{0y} =$ ____________

Las ecuaciones de la trayectoria del proyectil son: $x(t) =$ __________= _________________

$y(t) =$ ___________ = _________________

Si t_R es el tiempo que tarda el proyectil en recorrer la distancia horizontal R, entonces $y(t_R)$ = _______ y tenemos la ecuación:

$$0 = (v_0\, sen\theta)t_R - (½)g(t_R)^2$$

despejando a t_R, $t_R =$ ___________

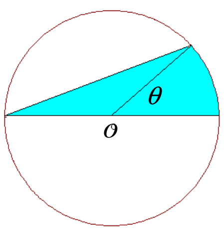
sustituyendo en: $x(t_R) = R =$ _________________

como $2sen\theta\cos\theta = sen2\theta$, podemos escribir a la distancia horizontal recorrida por el proyectil como sigue: $R(\theta) = \dfrac{v_0^{\,2}\, sen\, 2\theta}{g}$

Ejercicio 1) Expresa la altura máxima H que alcanza el proyectil en función del ángulo de inclinación θ.

Ejercicio 2) Expresa la longitud d de una cuerda de un círculo de radio 6 cm en función del ángulo central θ formado por los radios a los extremos de la cuerda.

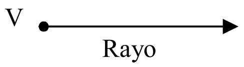
Ejercicio 3) La figura muestra un círculo de radio r con centro en O. Encuentra el área A de la región sombreada en función del ángulo central θ.

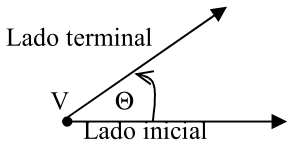


3.2 Generalización en el plano cartesiano de las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera

Ángulos positivos y negativos

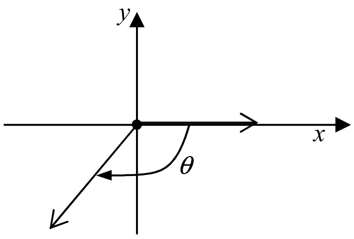
Un ángulo está formado por la rotación de una semirrecta, llamada rayo, alrededor de su vértice.



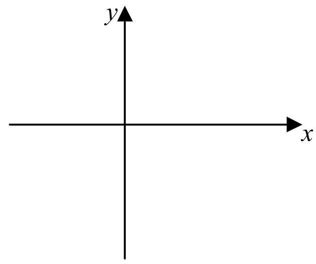


Si la rotación tiene el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo es **positivo**; si la rotación tiene el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es **negativo.** Dibuja un ángulo positivo y otro negativo.

Un ángulo θ se dice que esta en posición estándar si su vértice coincide con el origen de un sistema coordenado rectangular y su lado inicial está sobre el eje x positivo, en la figura se muestra un ángulo negativo en posición estándar dibuja un ángulo positivo en posición estándar.



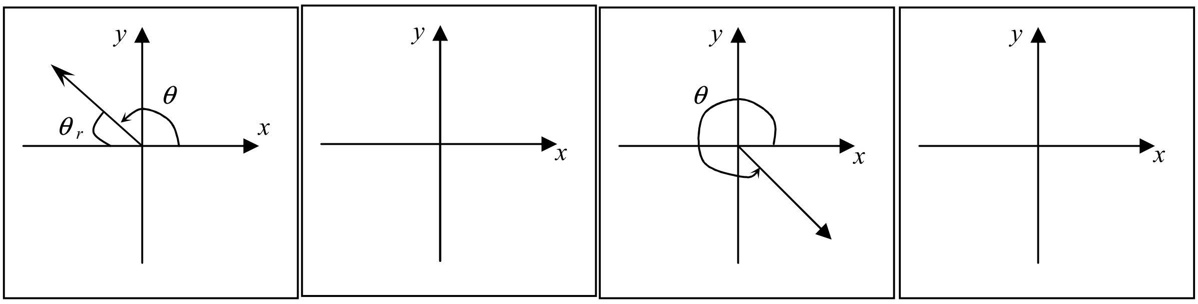
θ negativo en posición estándar



Ángulos de referencia

Un ángulo de referencia es un ángulo agudo (siempre tomado como positivo) que forma el lado terminal del ángulo y el eje horizontal positivo o negativo.

Completa las siguientes figuras, marca los ángulos de referencia para ángulos con lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.



La magnitud de un ángulo de referencia se encuentra entre _______ y ________

Encuentra el ángulo de referencia para cada uno de los siguientes ángulos:

a) 145°, θ_r = __________ b) – 60°, θ_r = __________

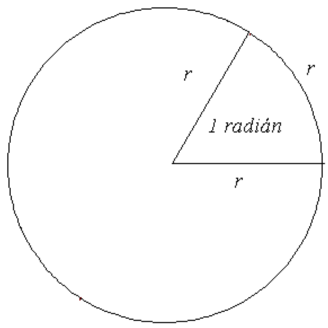
c) 213°, θ_r = __________ d) 287°, θ_r = __________

e) –100°, θ_r = __________ f) 74°, θ_r = __________

Medida de ángulos con distintas unidades

Las unidades más comunes que se usan para medir ángulos son los grados y los radianes. Los grados se basan en la asignación de 360 grados (360°), al ángulo que se forma mediante la rotación completa en sentido contrario a las manecillas del reloj, o sea cuando el lado inicial gira de manera que vuelve a quedar en su lugar completa una revolución. Un ángulo de 1° se forma de 1/360 de una rotación completa (1/360 de revolución).

La medición de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco de una circunferencia, un radián es el ángulo central subtendido por un arco con una longitud igual a la del radio del círculo



Para un círculo de radio r, un ángulo de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es: $s = r\theta$

Si consideramos un círculo de radio r, un ángulo central de 1 revolución (360°) subtenderá un arco igual a _______________ del círculo. Cómo la circunferencia del círculo es igual a __________, usamos s = 2πr y tenemos que para un ángulo θ de una revolución; $2\pi r = r\theta$, θ =1 revolución = 2π radianes = 360°

Dividimos entre 2, **180° = π radianes**

Con esta relación ya podemos transformar los grados a radianes o viceversa.

1 radián = _________ grados y 1 grado = ________ radianes

Ejercicio 1) Completa la siguiente tabla:

Grados	30		60	90			150	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$		π
Grados		225		270		315		360
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Ejercicio 2) Convierte cada ángulo de grados a radianes (en forma decimal)

a) 17° = ________ b) 73° = __________ c) –51° = ____________

d) 200° = ________ e) –350° = ________ f) 125° = ____________

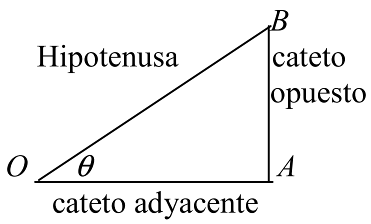
Ejercicio 3) Convierte cada ángulo de radianes a grados (en forma decimal)

a) 10.25 rad = ________ b) 3 rad = ________ c) 0.75 rad = __________

d) –2 rad = ___________ e) 2.34 rad =________ f) 6.32 rad = __________

Cálculo del seno y el coseno para ángulos mayores de 90°

Primero definiremos las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, como las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y las abreviaremos como sen, cos, tan, respectivamente.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

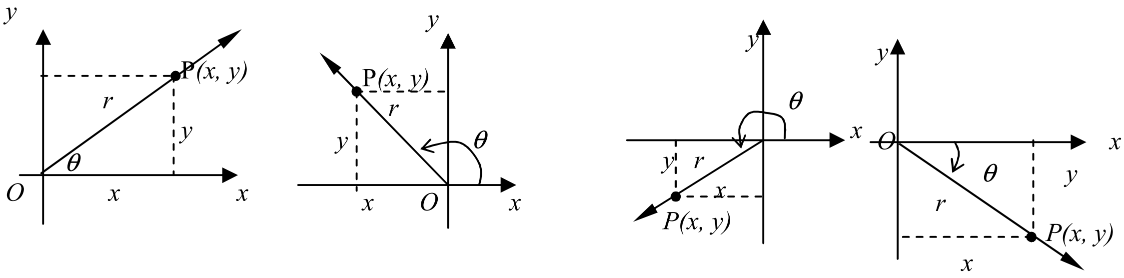
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Para definir las funciones trigonométricas para ángulos mayores de 90° empezaremos por ubicar el ángulo en un sistema de coordenadas rectangulares en su posición estándar o normal y un punto P(x, y) en el lado terminal del ángulo diferente del origen, con el ángulo de referencia formamos un triángulo rectángulo de hipotenusa, r, igual a la distancia del origen al punto P, entonces las funciones seno, coseno y tangente se pueden definir como:

$$sen\,\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

En las siguientes figuras se muestra la definición para cualquier ángulo θ en posición normal.



Si tenemos las coordenadas del punto P entonces r = ___________
¿Puede r valer cero? ____
Entonces las funciones seno y coseno siempre están _______________ para cualquier ángulo θ, por lo que su dominio es: D = __________________________
La función tangente tiene como denominador a _____ y la coordenada x es cero cuando el lado terminal del ángulo se encuentra ____________________, entonces su dominio consta de todos los ángulos θ menos {±90°=π/2, ±______=3π/2, ±450°= __π/2, y así sucesivamente}.

Ejercicio) Un punto P(a, b) se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de un círculo unitario, comenzando en (1, 0) recorre una distancia de 29.37 unidades. Explica cómo determinarías las coordenadas del punto P en su posición final, y el cuadrante en el que estará P. Determina el cuadrante y las coordenadas (con 4 decimales), así como el número de vueltas o revoluciones que da el punto.

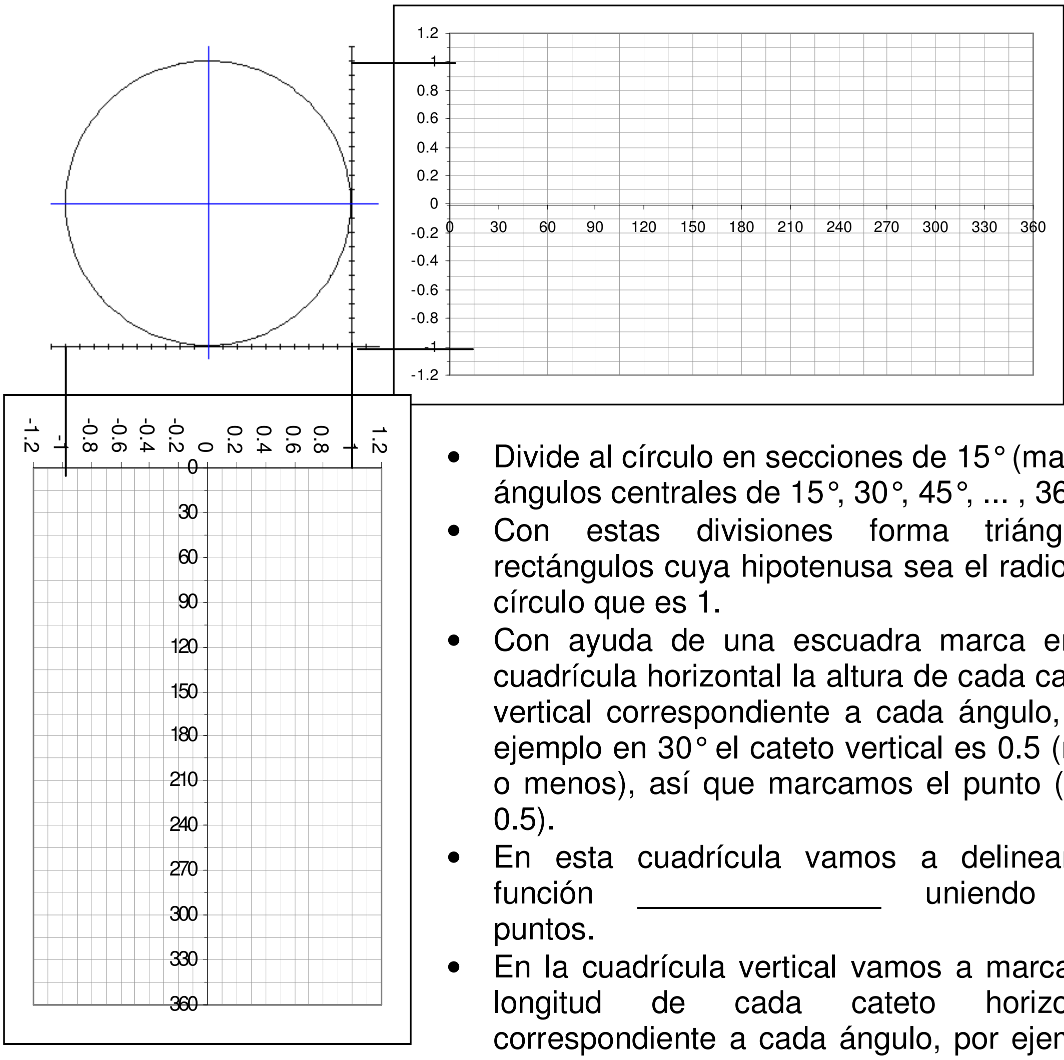
Círculo unitario: extensión de las funciones seno, coseno y tangente para ángulos no agudos.

Si el lado terminal del ángulo lo giramos y elegimos al punto P sobre una circunferencia de radio 1, r=1, las funciones seno y coseno se convierten en

$$sen\ \theta = y \qquad cos\ \theta = x$$

Así que ahora vamos a utilizar un círculo de radio 1 y vamos a variar el valor del ángulo θ para analizar el comportamiento de estas funciones.

A continuación tenemos un círculo de radio uno, con dos planos uno horizontal y el otro vertical, la escala del círculo y los planos es aproximadamente la misma en el eje y, y en el je x la escala esta en grados, pero también la puedes expresar en radianes, vas a necesitar tu transportador para marcar los grados y una regla o escuadra; sigue las instrucciones y contesta.



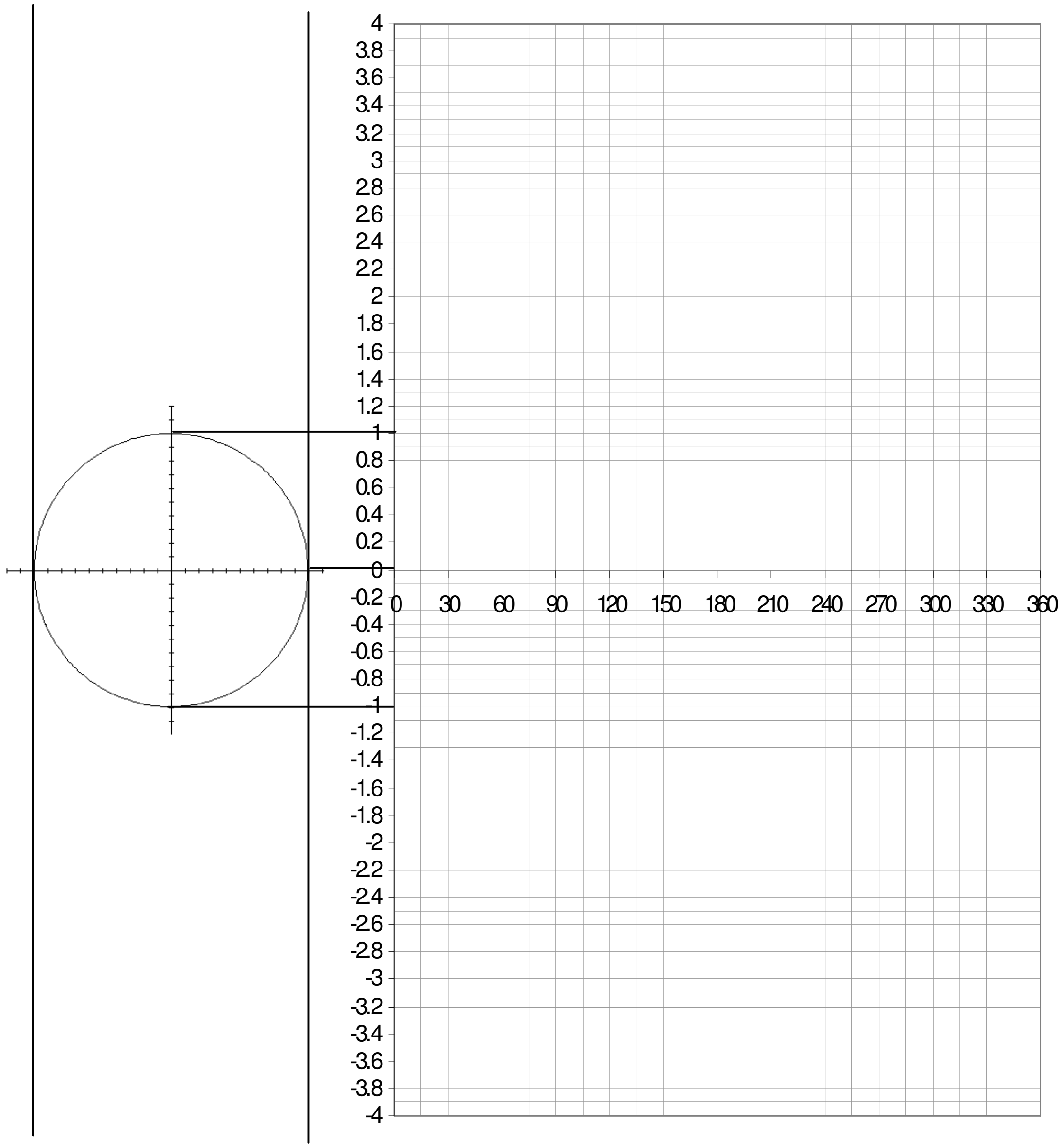
- Divide al círculo en secciones de 15° (marca ángulos centrales de 15°, 30°, 45°, ... , 360°)
- Con estas divisiones forma triángulos rectángulos cuya hipotenusa sea el radio del círculo que es 1.
- Con ayuda de una escuadra marca en la cuadrícula horizontal la altura de cada cateto vertical correspondiente a cada ángulo, por ejemplo en 30° el cateto vertical es 0.5 (mas o menos), así que marcamos el punto (30°, 0.5).
- En esta cuadrícula vamos a delinear la función _______________ uniendo los puntos.
- En la cuadrícula vertical vamos a marcar la longitud de cada cateto horizontal correspondiente a cada ángulo, por ejemplo en 60° el cateto horizontal es 0.5, marcamos el punto (60°, 0.5), así que en esta cuadrícula vamos a delinear la función _______________ uniendo los puntos con una curva suave.

De acuerdo al círculo unitario encuentra el valor del seno y el coseno de los ángulos indicados. (marca los ángulos con tu transportador)

sen 6° = _________ sen115° = __________ sen 64°= ___________

cos 72°= _________ cos 127°= __________ cos 154°= __________

Para la función tangente vamos a trazar nuevamente un círculo de radio uno y ahora para que el cateto horizontal, x, siempre tenga el valor de uno, vamos a trazar dos tangentes al círculo, perpendiculares al eje x como se muestra en la figura, para formar los triángulos rectángulos prolongamos los lados finales de los ángulos marcados (que sean de 15 en 15 grados) hasta que lleguen a las tangentes.



¿Qué sucede cuando nos acercamos a 90°? ________________________________

____

¿Qué pasa cuando el ángulo es de 90°? ________________________________

Para ángulos en el primer cuadrante el valor de x es _____________ y el valor de y es __________ por lo que la tangente de estos ángulos es _____________

Cuando pasamos al segundo cuadrante el valor de x es _____________ y el valor de y es positivo, entonces el valor de la tangente de ángulos en este cuadrante es _____________. Para los ángulos del tercer cuadrante la tangente es ____________ y por último para los ángulos del cuarto cuadrante la tangente es ________________.

Si unes con una curva suave los puntos marcados sobre el plano tendremos un bosquejo de la función tangente.

En que otros puntos no se puede formar el triángulo rectángulo _______________

¿Qué le sucede a la gráfica de cada una de las funciones anteriores si seguimos dando vueltas? ________________________________

Y si nos vamos en sentido de las manecillas del reloj ¿qué pasa? ____

En la siguiente sección trazaremos las gráficas de estas funciones con ayuda de tu calculadora para hacer un mejor análisis de sus características como son su dominio, rango, la existencia de asíntotas, sus ceros y la relación entre ellas.

3.3 Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente.

Las funciones trigonométricas son: el seno, el coseno, la tangente, cosecante, secante y cotangente, las tres ultimas son las reciprocas de las primeras y cada una de estas seis funciones tienen que estar definidas sobre una variable a la que le llamaremos argumento, por ejemplo seno de x ($sen\ x$), coseno de x ($cos\ x$) o también le podemos poner letras griegas, seno de θ ($sen\ \theta$), y esta variable es la que nos define el dominio de cada una de estas funciones. Aquí solamente analizaremos las tres primeras.