2.2 Noción de intervalo en la recta real

Un intervalo es un conjunto de números reales x que satisfacen una desigualdad, por lo que un intervalo puede ser cerrado, abierto o semiabierto, lo podemos representar en forma de intervalo, en forma de desigualdad o en forma gráfica sobre la recta numérica, lo que necesitamos para tener un intervalo es en primer lugar dos extremos, izquierdo y derecho que pueden ser números o símbolos y el número más pequeño siempre va a la izquierda; para abrir o cerrar el intervalo se usan paréntesis ( ) o corchetes [ ] o una combinación de los dos para el semiabierto.

Cuando iniciamos con paréntesis significa que el extremo izquierdo no esta incluido en el intervalo y si iniciamos con corchete ahora si esta incluido; cuando terminamos con paréntesis ahora el extremo derecho no esta incluido y si lo hacemos con corchetes si esta incluido.

Las desigualdades involucran los símbolos: $<$ menor que, $>$ ____________, $\leq$ ______________________ y $\geq$ _______________________.

La recta numérica esta representada por el intervalo $(-\infty, \infty)$, donde el símbolo infinito se refiere a que se extiende hacia la izquierda y hacia la derecha indefinidamente y este intervalo representa el conjunto de los números reales R.

Completa la siguiente tabla

Intervalo	Desigualdad	Gráfica	Tipo de intervalo
$(-2, 5)$			
$[4, \infty)$			Semiabierto
$(-\infty, 5]$			
	$3 < x \leq 10$		
	$-5 \leq x \leq 2.5$		
$(-\infty, -1)$			
	$-8 < x < -2$		
$[5, 20]$			
$(-3, 7]$			
	$\sqrt{5} \leq x < 5$		
$(½ , \infty)$			

2.3 Estudio del comportamiento analítico y gráfico de las funciones racionales

Una función racional se puede escribir como el cociente de dos funciones polinomiales $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$

y esta definida para todo valor de x tal que $q(x) \neq 0$

Aquí analizaremos de acuerdo al grado de p(x) y de q(x) la forma de su gráfica y la información que obtenemos al encontrar los ceros de estas dos funciones.

Vamos empezar por analizar una de las funcionas racionales más sencillas, cuando p(x) es 1 y q(x) = x, (f(x) = constante/lineal). También veremos que es lo que sucede tanto en su comportamiento como en su dominio y rango al hacerle diferentes cambios.

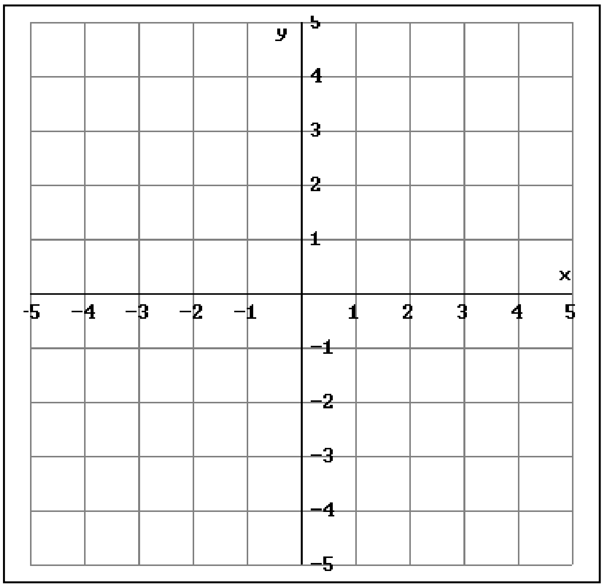
Funciones de la forma $f(x)=\dfrac{a}{x+b}+c$

Ejemplo 1) Encuentra el dominio de f(*x*) = $\dfrac{1}{x}$ y traza su gráfica

Solución.-

El denominador no puede ser cero porque no esta permitida la división entre cero, así que su dominio son todos los números reales y quitamos a x = 0.

Para trazar la gráfica démosle valores a *x* tanto positivos como negativos menos el 0 y localicemos estas parejas sobre el plano



x	f(*x*)=1/x	x	f(x)=1/x
0.2	5	-0.2	-5
0.4	2.5	-0.4	-2.5
0.6	1.666667	-0.6	-1.66667
0.8	1.25	-0.8	-1.25
1	1	0.1	10
1.5	0.666667	-1.5	-0.66667
2	0.5	2	0.5
2.5	0.4	-2.5	-0.4
3	0.333333	-3	-0.33333

Esta gráfica tiene dos ramas y ninguna de las dos cruzan al eje *y,* y tampoco al eje *x*, le puedes dar un valor a *x* muy cercano a cero ya sea positivo o negativo y veras que si es positivo el valor de *y* se hace muy grande y si es negativo el valor de *y* se hace muy grande pero con signo negativo, esto quiere decir que el eje *y*, cuya ecuación es ________ es una asíntota vertical de esta función. De la misma manera si le das a *x* un valor muy grande el valor de *y* se hace muy pequeño, se acerca al eje *x* por arriba, pero nunca es cero y si le das un valor negativo muy pequeño (x = -100) el valor de *y* se acerca a cero por abajo pero no toca al eje *x*, por lo que el eje *x*, cuya ecuación es _________ es una asíntota horizontal. Una recta es una asíntota, si la distancia de esta a la curva se hace cada vez más pequeña, pero nunca se tocan.

En cuanto a su dominio son todos los números reales menos el cero, como ya lo mencionamos la división entre cero no esta permitida y lo podemos escribir como: $D = \{ x \in R \mid x \neq 0\}$; en cuanto el rango también son todos los números reales menos el cero ya que como puedes observar por más grande que sea el valor de *x* (tanto positivo como negativo) f(*x*) no se hace cero, Rango = $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

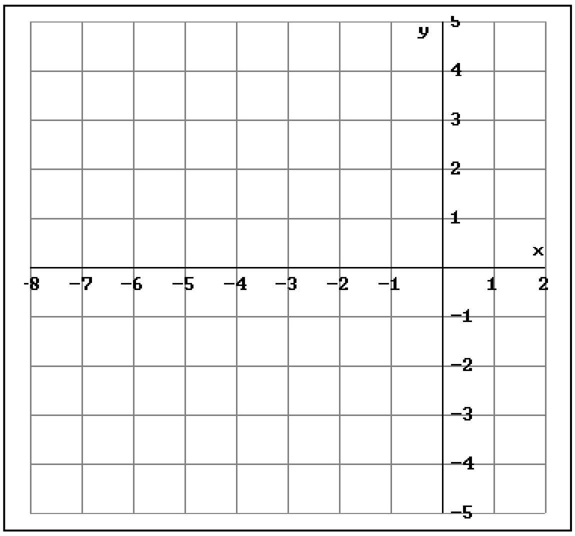
Se puede observar de la tabla que f(-x) = -f(x) por lo que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

Si ahora a *x* le sumamos o le restamos un valor dado veamos que pasa con la gráfica y como cambian el dominio y el rango.

Ejemplo 2) Encuentra el dominio y el rango de $F(x) = \dfrac{1}{x+3}$ y traza su gráfica así como las asíntotas.

Solución.-

Nuevamente quedamos que la división entre cero no esta permitida así que el dominio son todos los números reales menos el valor que hace que $x + 3 = 0$, o sea $x = -3$, por lo que ahora vamos a evaluar alrededor de $x = -3$. Completa la tabla y localiza los puntos sobre el plano.



x	F(x)=1/(x+3)	x	F(x)=1/(x+3)
-2.8	5	-3.2	-5
-2.6		-3.4	-2.5
-2.4		-3.6	-1.6666667
-2.2	1.25	-3.8	
-2	1	-4	-1
-1.5	0.6666667	-4.5	
-1		-5	-0.5
0		-6	-0.3333333
1	0.3125	-7	-0.25
2		-8	

Si te das cuenta se recorrió a la izquierda 3 unidades, pasó lo mismo que cuando lo hicimos para las funciones polinomiales, si a la variable x le sumamos una cantidad la gráfica se recorre a la izquierda las unidades que le sumamos. Ahora la asíntota vertical también se recorre, ya no es el eje y cuya ecuación es x = 0 ahora la asíntota vertical es la recta de ecuación x =–3,
la asíntota horizontal sigue siendo la misma, el eje x cuya ecuación es y = 0.
El dominio y el rango son: D = {x ∈ R | x ≠ – 3}, Rango ={y ∈R | y ≠ 0}

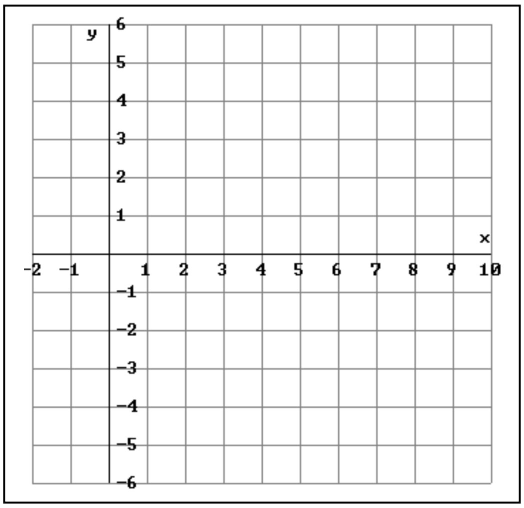
Si le restamos cierta cantidad a x se debe ahora recorrer a la derecha, hagámoslo.

Ejemplo 3) Encuentra el dominio y el rango de $G(x) = \dfrac{1}{x-5}$, traza su gráfica y las asíntotas.

Solución.-

En el dominio se quitan los ceros del denominador:
Como x – 5 = 0 cuando x = 5, entonces el dominio lo forman todos los números reales menos el 5, D = ______________________, así que vamos a evaluar alrededor del 5, como en la tabla y luego localizamos los puntos sobre el plano

x	$G(x)=1/(x-5)$	x	$G(x)=1/(x-5)$
4.8	-5	5.2	5
4.6	-2.5	5.4	
4.4		5.6	1.6666667
4.2	-1.25	5.8	1.25
4		6	1
3.5		6.5	0.6666667
3	-0.5	7	
2.5		7.5	0.4
2		8	0.3333333

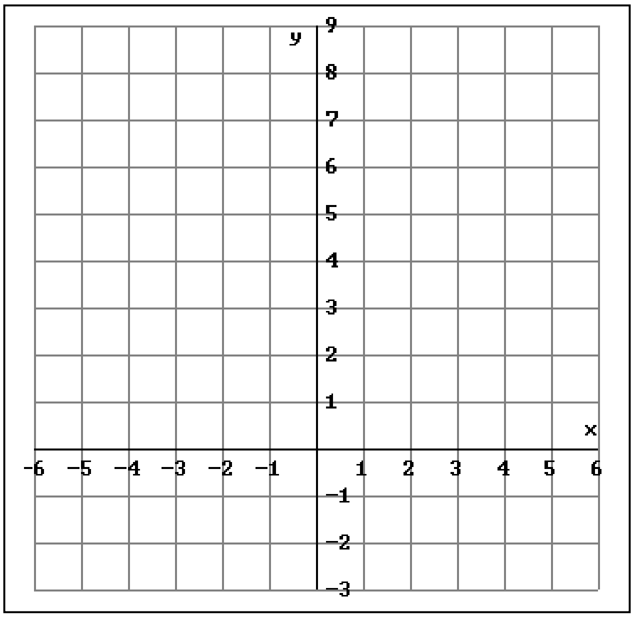


Sucedió lo que se esperaba la gráfica se recorrió hacia la derecha 5 unidades.
La asíntota vertical ahora es la recta de ecuación x = 5,
La asíntota horizontal es la recta de ecuación ____________
El rango esta formado por todos los números reales menos el cero,
Rango = ___________________________

Si a $\dfrac{1}{x}$ le sumamos o le restamos una cantidad, ya podrías decir que es lo que pasa y sino realicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4) Traza la gráfica de F(x) = $\frac{1}{x}$ + 3, y da su dominio y su rango

Solución.-
Su dominio esta formado por todos los reales menos el cero,
D = ________________________, así que evalúa alrededor del cero, traza la gráfica así como sus asíntotas.



x	F(x)= $\frac{1}{x}+3$
0.2	
0.4	5.5
0.8	
1	4
2	3.5
3	
-0.2	-2
-0.4	0.5
0.8	1.75
0.1	13
-2	2.5
-3	

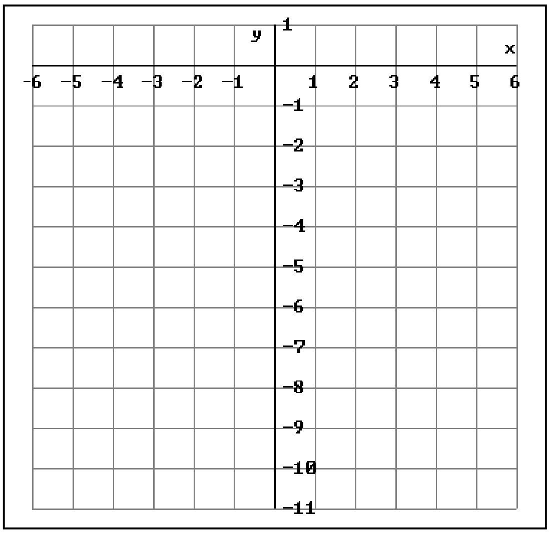
La gráfica se desplazo ahora sobre el eje y, 3 unidades hacia arriba, la que cambio fue la asíntota horizontal que ahora es la recta de ecuación $y = 3$,
La asíntota vertical es la recta de ecuación ___________
su rango es: Rango = __________________________.
La gráfica de esta función si cruza el eje x, así que la función G tiene un cero en _________________.

Si a la función f en lugar de sumarle 3 le restamos 6, la gráfica debe bajar 6 unidades, vamos hacerlo

Ejemplo 5) Traza la gráfica de F(x) = $\frac{1}{x} - 6$.

Solución.-
El dominio de la función es: D = _______________________
Evaluamos alrededor del cero, así que completa la tabla y localiza los puntos sobre el plano.

x	F(x)= $\frac{1}{x}-6$
0.2	-1
0.4	
0.8	-4.75
1	-5
2	-5.5
3	
-0.2	-11
-0.4	-8.5
-0.8	
0.1	4
-2	-6.5
-3	-6.333333



La asíntota horizontal es la recta de ecuación $y=-6$, por lo que el rango no incluye al –6. El rango es: Rango =________________________.
La asíntota vertical no cambia es la recta de ecuación _________ y el dominio sigue siendo el mismo (todos los números reales menos el cero).
Cruza al eje x en: ______________

Ejercicio 1) Encuentra el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones y traza su gráfica así como las asíntotas.

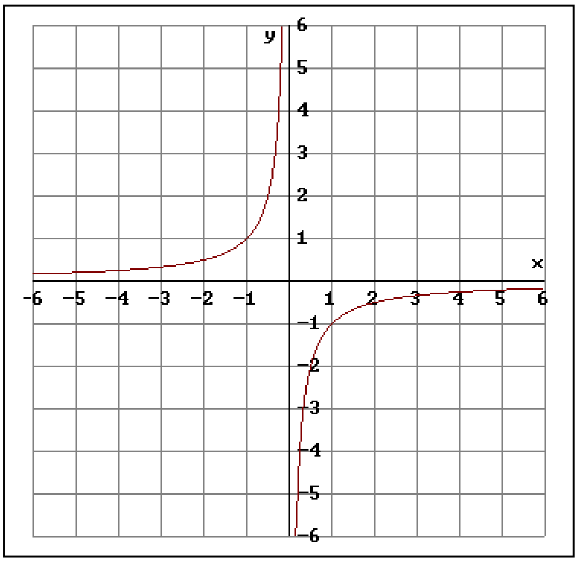
A) F(x) = $\frac{1}{x-3}$ B) G(x) = $\frac{1}{x+4}$ C) H(x) = $\frac{1}{x}+4$ D) I(x) = $\frac{1}{x}-3$

¿Qué pasa si le cambiamos de signo a la función $\frac{1}{x}$? Tendríamos que graficar la función $-\frac{1}{x}$,

Ejemplo 6) Traza la gráfica de $g(x)=-\frac{1}{x}$

Solución.-
Creemos que ya sabes la respuesta, pero sino evalúa en algunos puntos, y veras que la gráfica queda como sigue:

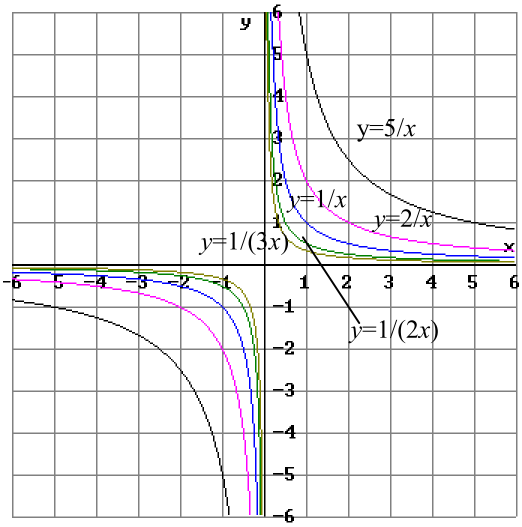
X	$g(x)=-\frac{1}{x}$
0.2	-5
0.4	
0.8	-1.25
1	
2	-0.5
3	
-0.2	
-0.4	2.5
-0.8	
0.1	
-2	0.5
-3	



Como observaras la gráfica se volteo sobre el eje x, el dominio y el rango quedan igual y con las asíntotas sucede lo mismo.
D = ______________________, Rango = _________________________
La ecuación de la asíntota vertical es: ___________________
La ecuación de la asíntota horizontal es: __________________

Ejemplo 7) Si multiplicamos a $f(x)=\frac{1}{x}$ por una constante vamos a ver que pasa, así que sobre el mismo plano vamos a graficar las siguientes funciones: $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5}{x}$, $\frac{1}{2x}$ y $\frac{1}{3x}$

x	$1/x$	$2/x$	$5/x$	$1/2x$	$1/3x$
0.2	5	10	25	2.5	1.66667
0.4	2.5	5	12.5	1.25	0.83333
0.8	1.25	2.5	6.25	0.625	0.41667
1	1	2	5	0.5	0.33333
2	0.5	1	2.5	0.25	0.16667
3	0.33333	0.667	1.667	0.167	0.11111
-0.2	-5	-10	-25	-2.5	-1.6667
-0.4	-2.5	-5	-12.5	-1.25	-0.8333
-0.8	-1.25	-2.5	-6.25	-0.625	-0.4167
0.1	10	20	50	5	3.33333
-2	-0.5	-1	-2.5	-0.25	-0.1667
-3	-0.33333	-0.667	-1.667	-0.167	-0.1111

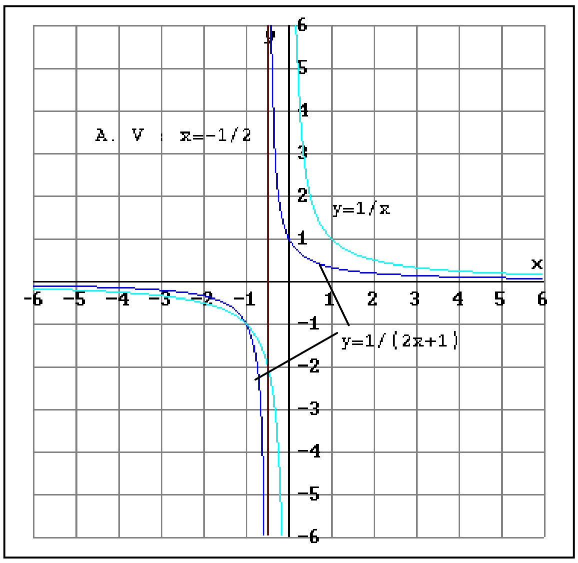


Conforme va creciendo el número por el que se multiplico a la función la gráfica tarda más en pegarse a los ejes o sea que decrece menos que la original y si la constante es menor que 1 entonces decrece más rápido que la original, se pegan más rápido a los ejes, en la figura se ve que la que esta más pegada a los ejes es $\frac{1}{3x}$ y luego le sigue $\frac{1}{2x}$ y así van separándose las otras, el número por el que multiplicamos nos da el índice de crecimiento o el alargamiento vertical si multiplicamos por un número mayor que 1 y la compresión vertical si multiplicamos por un número entre cero y uno.
El dominio y el rango de las funciones anteriores son:
D = ______________________, Rango = ____________________________

Con lo anterior ya podemos decir como es la gráfica de la función.

Ejemplo 8) Graficar F(x) = $\frac{1}{2x+1}$
Solución.-
Sabemos que se tiene que quitar del dominio el cero del denominador, entonces resolvemos la ecuación $2x + 1 = 0$, $x = -1/2$, así que podemos evaluar alrededor de $x = -1/2$; otra forma es factorizar el 2 en la ecuación y quedaría como: $2x + 1 = 2(x + ½)$ y ahora analicemos F(x) = $\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$;

Como a x le sumamos ½ la función $\frac{1}{x}$ se debe recorrer ½ hacia la izquierda, esta multiplicada por ½ entonces cada punto recorrido debe disminuir a la mitad, se pega más rápido a las asíntotas, que son: la vertical $\underline{x = -1/2}$ y la horizontal $\underline{y = 0}$, sino estas seguro has la tabla dándole valores a x alrededor de –1/2.

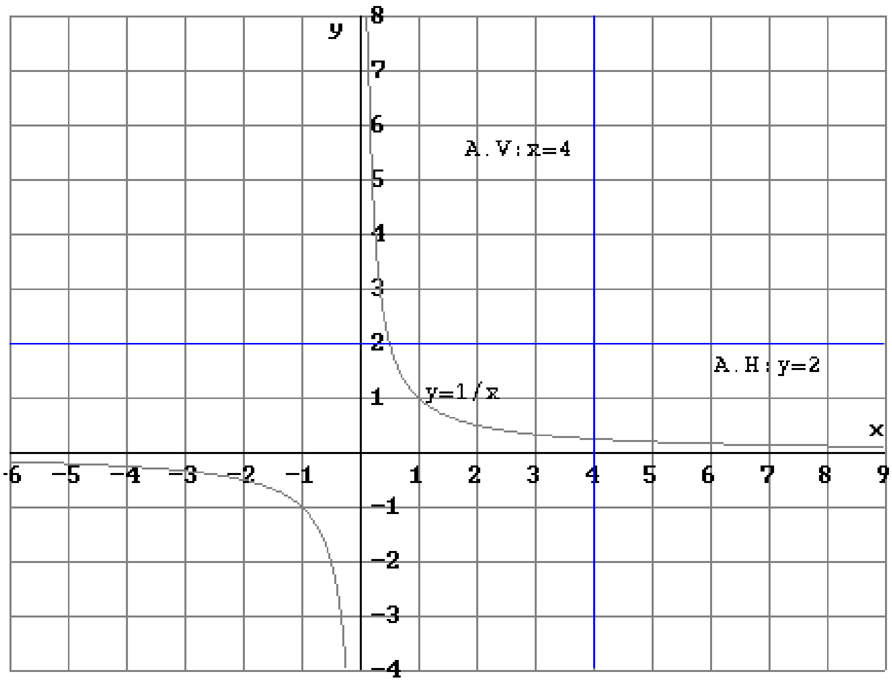


Su dominio y rango son: D = ________________, Rango = _______________

Ejemplo 9) Ahora tracemos la gráfica de F(x) = $\frac{1}{x-4}+2$

Solución.-

Con respecto a la gráfica de $\frac{1}{x}$, el –4 hace que la gráfica se recorra 4 unidades a derecha, y el 2 la va a subir 2 unidades entonces la asíntota vertical es $\underline{x = 4}$ y la horizontal $\underline{y = 2}$, traza la gráfica de F



Su dominio y rango son: D = ___________________, Rango = _______________
Cruza al eje y en __________________
Cruza al eje x en _____________ (resuelve la ecuación cuando F es igual a cero) por lo tanto x = ______ es un cero de la función F

Ejercicios:
En base a los ejemplos anteriores traza las gráficas de las siguientes funciones, da el dominio y el rango de cada una de ellas, así como también escribe las ecuaciones de sus asíntotas y encuentra los ceros si es que los tienen.

1) F(x) = $\frac{1}{4x}$ 2) F(x) = $\frac{3}{(x-5)}$ 3) G(x) = $-\frac{1}{x}-4$

4) G(x) = $\frac{1}{3x-2}$ 5) H(x) = $\frac{-5}{(x-2)}$ 6)H(x) = $\frac{3}{(x-1)}+5$

7) J(x) = $\dfrac{-1}{x}+5$ 9) F(x) = $-\dfrac{2}{x}+3$ 8) K(x) = $-\dfrac{5}{(x+1)}$

10) R(x) = $-\dfrac{1}{(x+3)}-2$ 11) S(x) = $\dfrac{2}{3x+5}-3$ 12) T(x) = $-\dfrac{3}{3x-7}+4$

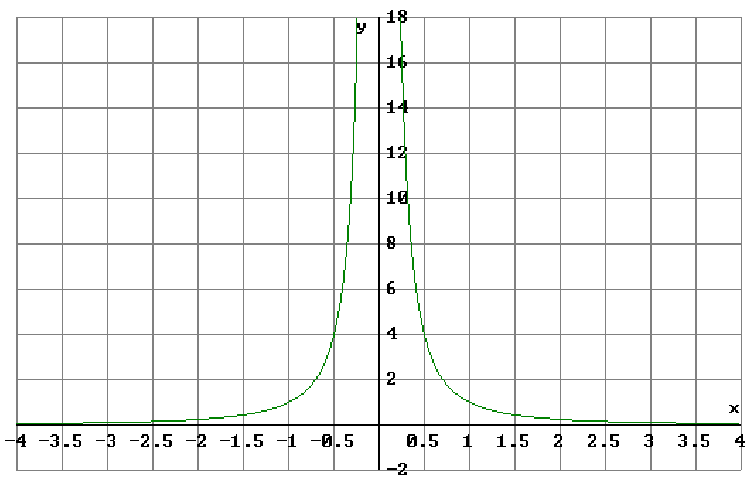
Funciones de la forma $f(x)=\dfrac{a}{(x+b)^2}+c$

La función más sencilla de este tipo es: $\dfrac{1}{x^2}$, así que empecemos por analizarla:

- El denominador nunca puede ser cero, por lo que su dominio son todos los números reales menos el cero, para valores positivos o negativos de x, al elevarla al cuadrado siempre es positiva por lo que el rango va a contener a todos los números reales positivos.
- Si x toma valores muy pequeños tanto positivos o negativos (nos acercamos al cero por la derecha y por la izquierda) los valores de la función crecen y la gráfica se acerca al eje y positivo por lo tanto éste es una asíntota vertical (x = 0).
- Ahora si x toma valores muy grandes tanto positivos como negativos, la función toma valores positivos pero muy pequeños, la gráfica se acerca al eje x pero no lo toca, por lo que el eje x es una asíntota horizontal, (y = 0).

  Tracemos su gráfica dándole a x valores tanto positivos como negativos menos el cero, completa la tabla y localiza los puntos en el plano, remarca la gráfica.

x	F(x) = 1/x^2	x	F(x) = 1/x^2
0.01		-0.01	
0.1		-0.1	
0.2	25	-0.2	25
0.4	6.25	-0.4	6.25
0.5	4	-0.5	4
0.6	2.7778	-0.6	2.7778
0.8	1.5625	-0.8	1.5625
1	1	1	1
1.5	0.4444	-1.5	0.4444
2	0.25	-2	0.25
2.5	0.16	-2.5	0.16
3	0.1111	-3	0.1111
10		-10	
-100		-100	



Ejemplo 1) Encuentra el dominio, el rango y las ecuaciones de las asíntotas de cada una de las funciones, y da las intersecciones con los ejes

a) $f(x)=\frac{1}{x^2}+3$ b) $g(x)=\frac{1}{x^2}-2$

Solución.-

a) $f(x)=\frac{1}{x^2}+3$, quitamos x = 0 ya que no se vale la división entre cero, entonces su dominio es: D = ___________________________

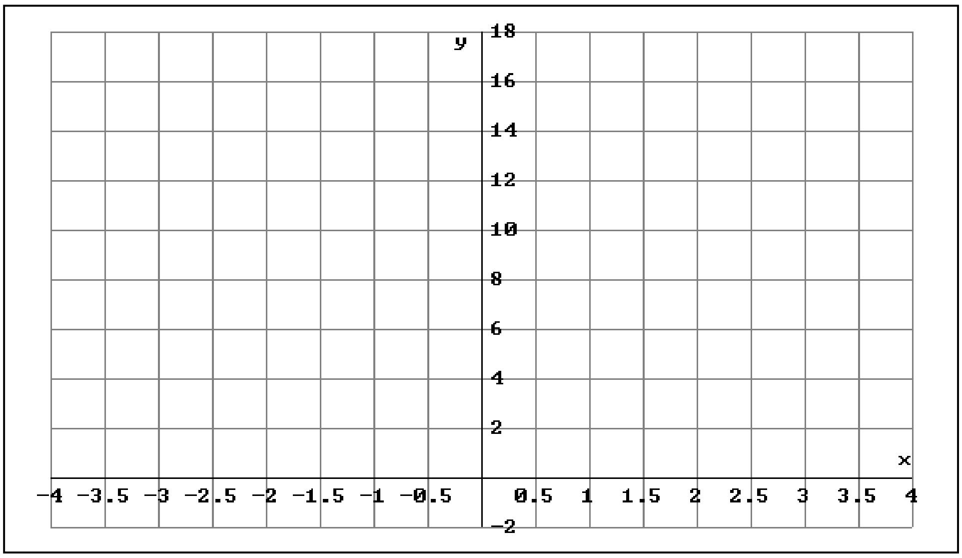
La asíntota vertical tiene ecuación ______________

Como le sumamos 3 a la función original ($1/x^2$), todos los valores van aumentar 3 unidades, así que la gráfica va a subir _______ unidades

La asíntota horizontal tiene ecuación ____________

El rango de f es: Rango = ____________________

Nunca cruza el eje x, no tiene ceros reales y tampoco cruza al eje y, ya que este es la asíntota vertical.



b) $g(x)=\frac{1}{x^2}-2$ su dominio es: D = _______________________

La asíntota vertical tiene ecuación ___________

Ahora le restamo 2 a la función original. Todos los valores de g van a disminuir 2 unidades, entonces la gráfica va a ________ _______ unidades.

La asíntota horizontal tiene ecuación ____________

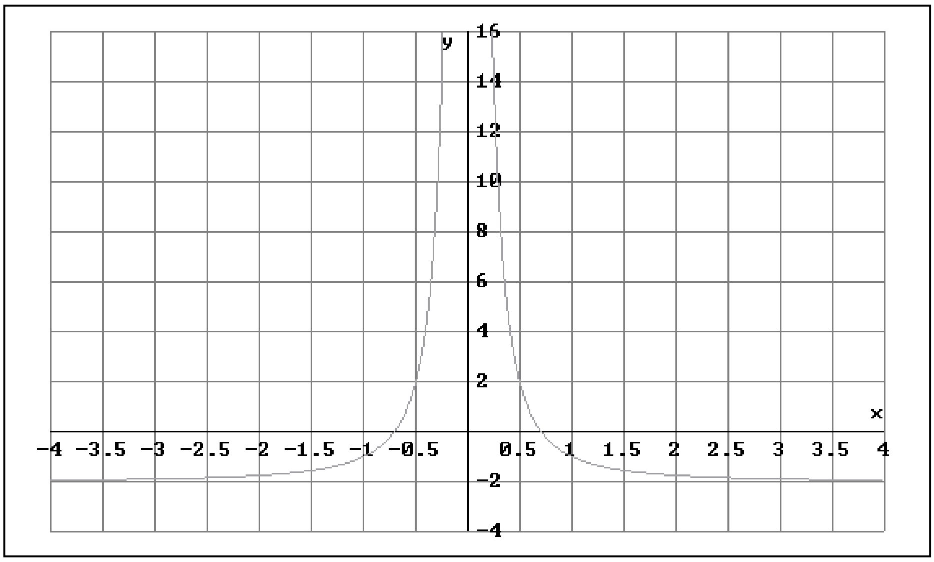
El rango de g es: Rango = $\{ y \in R \mid y > -2\}$

Al resolver la ecuación $\frac{1}{x^2}-2=0$ encontramos los ceros de la función que son:

x = ___________ y x = _________, estos son los puntos donde cruza al eje x

Al eje y nunca lo cruza.

Marca bien la gráfica verificando con algunos puntos.



Ejemplo 2) Encuentra el dominio, el rango y las ecuaciones de las asíntotas de cada una de las funciones, y da las intersecciones con los ejes

a) $F(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ b) $G(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Solución.-

a) $F(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$, El denominador no puede ser cero y esto sucede cuando ____________, así que su dominio es: D =______________________

La asíntota vertical tiene ecuación _________

Ahora a x se le está sumando 3, así que se va a recorrer hacia la ____________

Y va a quedar sobre el eje x por lo tanto el rango es: Rango = ________________

La asíntota horizontal tiene ecuación ___________

No cruza al eje x pero sí al eje y en ___________

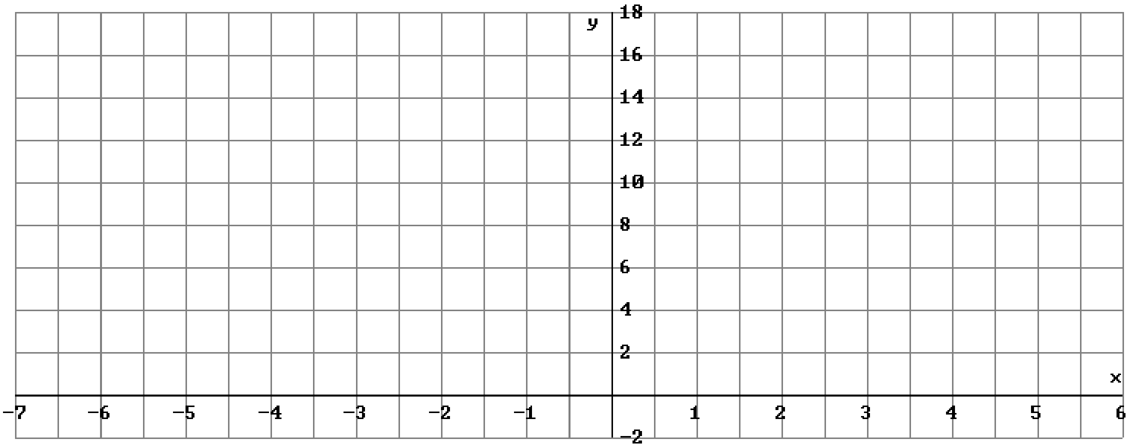
b) $G(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, el denominador se hace cero cuando ___________, el dominio de G es: D = _________________; la ecuación de la asíntota vertical es: ____

Como a x se le esta restando 2 ahora se recorre hacia la _________________ y sigue quedando sobre el eje x, por lo que el rango es: R = ___________________

La asíntota horizontal tiene ecuación ____________

No cruza al aje x pero sí al eje y en ___________

Traza las gráficas en el siguiente plano



Ejemplo 3) Traza la gráfica de $Q(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2} + 5$, encuentra su dominio, rango, las ecuaciones de las asíntotas y los puntos donde cruza a los ejes.

Solución.-

A x se le esta restando 3 por lo tanto se va a recorrer hacia la ______________

La asíntota vertical tiene ecuación ____________

El dominio de la función es: D = ___________________

El cuatro esta multiplicando a la función original, esto nos da un alargamiento vertical, cuando el valor de la original es 1 con el alargamiento va a tomar el valor de 4

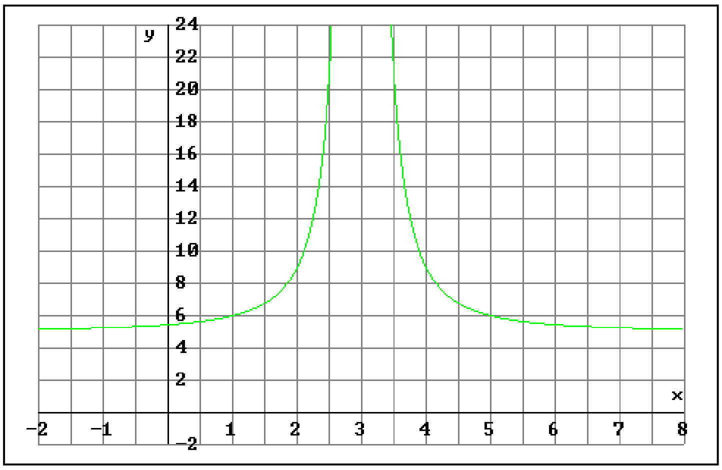
El 5 se le esta sumando a la función, así que sube ______ unidades

La ecuación de la asíntota horizontal es _________

Cruza al eje y en ___________ y no cruza el eje x ya que queda arriba de la recta y = 5

Traza las asíntotas y verifica con algunos puntos, remarca la gráfica de Q(x)

(Sobre la gráfica original se encuentra el punto (1, 1), el valor de y es 1 así que lo multiplicamos por 4 y llegamos a (1, 4), lo recorremos 3 unidades a la derecha y nos queda el punto (4, 4), lo subimos 5 unidades y llegamos a (1, 9) que se encuentra sobre la gráfica)



Ejercicios) traza en tu cuaderno las gráficas de las siguientes funciones y analízalas junto con tus compañeros.

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+4)^2}-5$ 2) $g(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ 3) $h(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+10$

4) $k(x)=\dfrac{-2}{(x+5)^2}-5$ 5) $m(x)=\dfrac{10}{(x-7)^2}+2$ 6) $q(x)=\dfrac{6}{(x-4)^2}-8$

En las funciones anteriores el denominador tiene un cero pero es doble por eso solamente tenemos una asíntota vertical, ahora vamos analizar que pasa cuando el denominador tiene dos ceros diferentes.

Funciones de la forma $f(x)=\dfrac{d}{ax^2+bx+c}$

Ejemplo 1) Analiza la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x}$ y traza su gráfica.

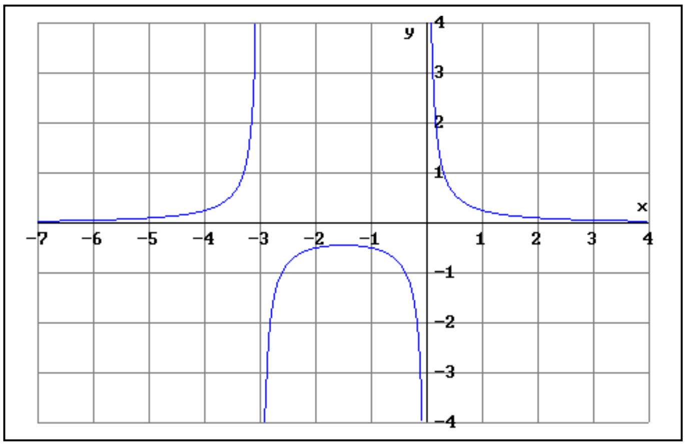
Solución.-
Igualamos el denominador a cero y encontramos las raíces de la ecuación
$x^2 + 3x = 0$, factorizando, $x(x+3) = 0$ las raíces son: x =_____ y x = _____
El dominio de la función es: D = _____________________________
Tiene dos asíntotas verticales y sus ecuaciones son: _________ y _________
Así que tenemos 3 regiones de – ∞ a – 3 o sea el intervalo ______________
De – 3 a 0, el intervalo ___________ y de 0 a ∞, el intervalo ____________
Evaluemos en algunos puntos de estos intervalos

(– ∞, – 3)	(– 3, 0)	(0, ∞)
f(-3.1) =	f(-2.9)=	f(0.1)=
f(-4) =	f(-2)=	f(0.5)=
f(-6) =	f(-1.5)=	f(1)=
f(-10)=	f(-1)=	f(10)=
f(-100)=	f(-0.2)=	f(100)=

Conforme x se aleja a la izquierda de –3 la función toma valores muy pequeños, pero no cruza el eje x y cuando x se aleja a la derecha de 0 de nuevo la función toma valores muy pequeños pero no cruza el eje x, así que el eje x es una asíntota horizontal y tiene ecuación ___________

En la región de en medio es negativa y las dos ramas se extienden hacia abajo,

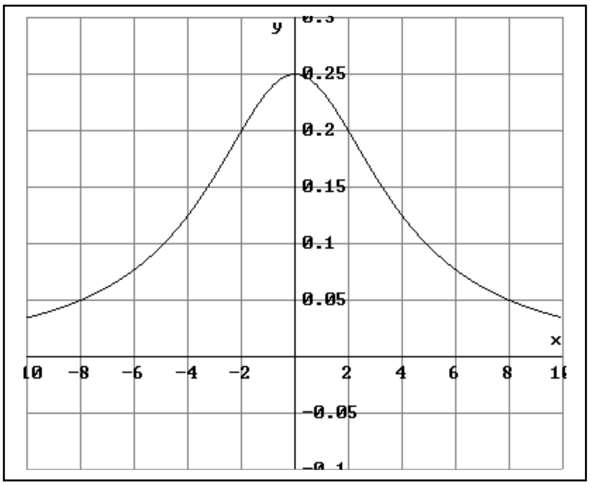
Localiza los puntos sobre la gráfica y marca las asíntotas.
En la región de en medio la curva es simétrica y el valor máximo de f se encuentra a la mitad del intervalo x= -1.5, por lo que el rango de la función esta formado por todos los reales menos el intervalo (-0.444, 0], o y esta en la unión de dos intervalos
$y \in (-\infty, \ -0.4444) \cup (0, \ \infty)$



No cruza al eje x ni al eje y.

Ejemplo 2) Traza la gráfica de $g(x) = \dfrac{4}{x^2 + 16}$ y analízala

Solución.-
Igualamos el denominador a cero para tener el dominio y además las asíntotas verticales, $x^2 + 16 = 0$, $x^2 = -16$, x = _________, las raíces no son reales
Por lo tanto el dominio de la función son todos los números reales,
No tiene asíntota vertical; evalúa en algunos puntos y localízalos sobre la curva ya dada



Es simétrica con respecto al eje y, así que su eje de simetría tiene ecuación ______
La asíntota horizontal tiene ecuación ______________

El rango es: R = __________________

Ejercicios.- Traza en tu cuaderno las siguientes funciones y analízalas.

1) H(x) = $\frac{1}{x^2-4}$ 2) F(x) = $\frac{1}{x^2-8x}$ 3) R(x) = $\frac{1}{x^2+1}$

4) G(x) = $\frac{1}{x^2-8x+12}$ 5) M(x) = $-\frac{2}{x^2+1}$ 6) N(x) = $\frac{4}{-x^2+6x-8}$

Funciones de la forma $f(x) = \frac{\textit{funcion lineal}}{\textit{funcion lineal}}$

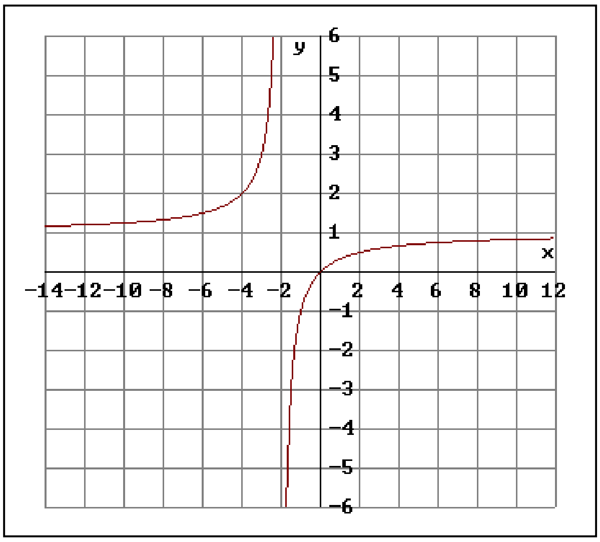
A continuación vamos a analizar algunos ejemplos de funciones de este tipo.

Ejemplo 1) Traza la gráfica de la función F(x) = $\frac{x}{x+2}$ y analízala.

Solución.-

El dominio de esta función esta formado por todos los números reales menos los ceros del denominador ($x + 2 = 0, x = -2$) y el denominador se hace 0 cuando x = –2, el dominio es: D= _____________________, x = –2 es una asíntota ______________, así que empecemos por evaluar alrededor de –2, localiza los puntos sobre la gráfica y marca las asíntotas

x	$x/(x+2)$	x	$x/(x+2)$
-1.8	-9	-2.2	11
-1.5	-3	-2.5	5
-1.3	-1.857	-2.8	3.5
1	0.333	-3	3
2	0.5	-4	2
3	0.6	-5	1.667
4	0.667	-6	1.5
5	0.714	-7	1.4
6	0.75	-8	1.333
10	0.333	-10	1.25
50	0.962	-50	1.042
100	0.980	-100	1.020



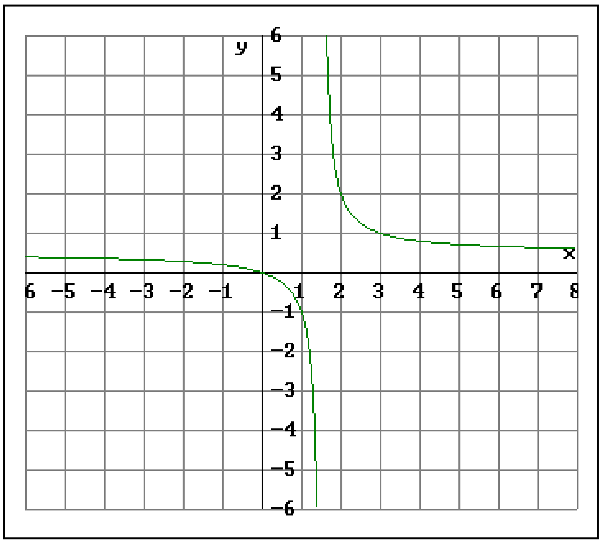
Si te das cuenta cuando le damos un valor a x muy grande (a la derecha de –2) se acerca a 1 por abajo y si le damos a x un número muy grande pero negativo (a la izquierda de –2) se acerca a 1 por arriba, por lo que podemos decir que y = 1 es una asíntota horizontal.

Con lo anterior nos damos cuenta de que el rango de la función son todos los números reales menos el 1, Rango = ________________________

Sigamos haciendo ejemplos para que te puedas dar cuenta que pasa con la asíntota horizontal.

Ejemplo 2) Analiza la función G(x) = $\frac{x}{2x-3}$ y traza su gráfica.

Primero encontramos los ceros del denominador que en este caso es 3/2 ya que, $2x-3=0$, $2x=3$, $x=3/2$, así que el dominio es: D = ________________
Nuevamente evaluemos la función alrededor de 1.5 y tracemos su gráfica y las asíntotas



x	$G(x)$	x	$G(x)$
1.7	4.25	1.3	-3.25
2	2	1	-1
3	1	0	0
4	0.8	-1	0.2
5	0.714	-2	0.286
6	0.667	-3	0.333
10	0.588	-10	0.435
50	0.515	-50	0.485
100	0.508	-100	0.493

Si observas tanto la tabla como la gráfica te puedas dar cuenta que cuando nos alejamos a la derecha de 1.5, o sea, cuando le damos valores a x muy grandes el valor de la función se acerca a 0.5 = ½ por arriba, y si nos alejamos a la izquierda de 1.5, o sea, x negativa también se acerca a 1.5 pero ahora por abajo, así que la asíntota horizontal es y = ½, el rango es: Rango = ________________

Si analizas lo anterior, podrás ver que para la asíntota horizontal en el primer ejemplo teníamos que era y = 1 y vemos que en el numerador, el coeficiente de x es 1 y en el denominador el coeficiente de x es 1, así que 1/1 nos da 1. Ahora en el segundo ejemplo resulto que la asíntota horizontal es y = ½ y de nuevo el coeficiente de x en el numerador es 1 y el coeficiente de x en el denominador es 2, por lo que la función tiende a ½.

Ejercicios) Analiza las siguientes funciones y traza su gráfica

1) F(x) = $\frac{x}{3x-2}$ 2) F(x) = $\frac{5-2x}{2x+7}$ 3) G(x) = $\frac{5x}{x-1}$

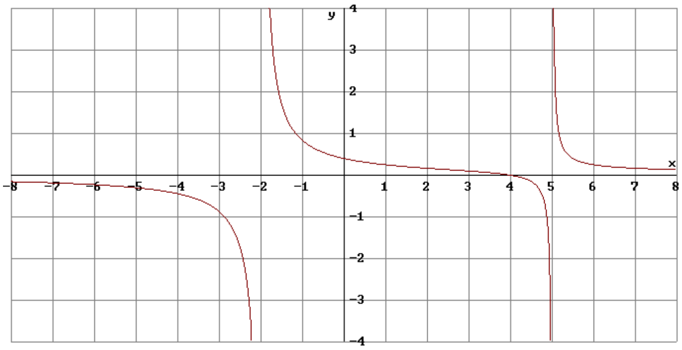
4) F(x) = $\frac{4x+8}{3x-4}$ 5)H(x) = $\frac{3x}{x+5}$ 6) J(x) = $\frac{2x-4}{x-3}$

Funciones de la forma $f(x) = \dfrac{funcion\ \ lineal}{funcion\ \ cuadratica}$

Ejemplo 1) Traza un bosquejo de la gráfica de la función $G(x) = \dfrac{x-4}{x^2-3x-10}$

Solución.-
Igualamos a cero la expresión del denominador para localizar las raíces y quitarlas del dominio $x^2 - 3x - 10 = 0$, $(x - 5)(x + 2) = 0$, soluciones: $x = 5$ y $x = -2$
El dominio de la función es D = ____________________________
Las asíntotas verticales son: ___________ y ___________
Si igualamos a cero la expresión del numerador tenemos los ceros de la función G o sea donde cruza ____________ y lo hace en __________
Al eje y lo cruza en G(0) = __________
Tenemos tres regiones formadas por los intervalos ________, _______y _______
Ahora evaluemos en algunos puntos dentro de estos intervalos

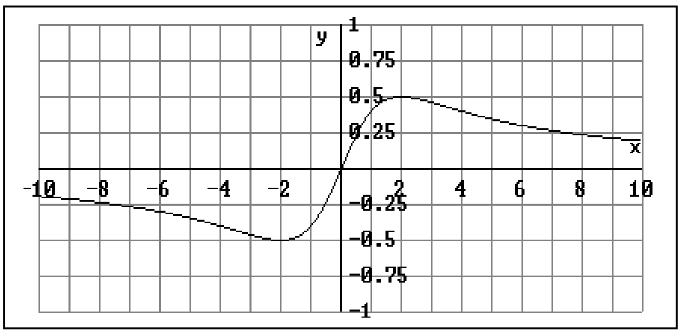
( )	( )	( )
G(-8)=	G(-1.8)=	G(5.1)=
G(-6)=	G(-1)=	G(5.5)=
G(-4) =	G(1)=	G(5)=
G(-3)=	G(3)=	G(6)=
G(-3.5)=	G(4.5)=	G(7)=
G(-3.2)=	G(4.8)=	G(8)=



Marca los puntos sobre la gráfica, así como las asíntotas
La asíntota horizontal tiene ecuación: __________
El rango de la función G es: Rango = _______________________

Ejemplo 2) Traza un bosquejo de la gráfica de la función $H(x) = \dfrac{2x}{4+x^2}$

Solución.-
Igualamos el denominador a cero para encontrar los ceros que hay que quitar del dominio, $4 + x^2 = 0$, $x^2 = -4$, no tiene raíces reales
El dominio es: D = _________________
No tiene asíntotas _____________, cruza al eje x en ______ y al eje y en ______
Completa la tabla y marca los puntos sobre la gráfica.



H(-1) =	H(1) =
H(-2) =	H(2) =
H(-3) =	H(3) =
H(-4) =	H(4) =
H(-5) =	H(5) =
H(-7) =	H(7) =
H(-10)	H(10 =
H(-100)	H(100) =