1.6 Problemas de Aplicación

Ejemplo 1) La posición de una partícula al cabo de t segundos es $P(t) = 2t^3 - 11t^2 + 13t - 1$, y su posición al cabo de 1 segundo es 3. ¿En qué otros instantes la posición es igual a 3?

Solución

Lo que se pide es en que otros instantes la posición es igual a 3 o sea $P(t) = 3$, igualando la función a 3 tenemos:

$$3 = 2t^3 - 11t^2 + 13t - 1$$

esta es una ecuación de tercer grado que podemos escribir como:

$$2t^3 - 11t^2 + 13t - 4 = 0$$

Se nos dice en el problema que al cabo de 1 segundo la posición es igual a 3, esto quiere decir que t=1 es una raíz y lo podemos comprobar por medio de la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -11 & 13 & -4 \\ & & 2 & -9 & 4 \\ \hline & 2 & -9 & 4 & 0 \end{array}$$

Residuo igual a cero por lo tanto $t_1 = 1$ si es raíz y $(t - 1)$ es un factor

$$2t^3 - 11t^2 + 13t - 4 = (t - 1)(2t^2 - 9t + 4)$$

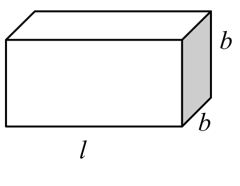
igualando a cero el segundo factor encontramos las raíces que nos faltan:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \qquad t_2 = \frac{-(-9) + \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{9 + \sqrt{49}}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$t_3 = \frac{-(-9) - \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{9 - \sqrt{49}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Los otros instantes donde la posición es igual a 3 son cuando t=1/2 segundo y cuando t= 4 segundos.

Ejemplo 2) Una caja con base cuadrada tiene una longitud que sumada al perímetro de su base da 108 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la caja si su volumen es de 2 200 pulgadas^3?



Solución

La longitud l más el perímetro de su base $4b$ dan 108 pulgadas:

$$l + 4b = 108$$

Como se nos pide la longitud de la caja necesitamos una expresión en términos de l, así que despejamos a b

$$4b = 108 - l, \qquad b = \frac{108 - l}{4}$$

El Volumen de una caja es: V = (Área de la base)(longitud) = $b^2(l)$

Sustituimos el valor de b y el volumen $2200 = \left(\frac{108 - l}{4}\right)^2 l$ multiplicamos por 16 y desarrollamos el binomio al cuadrado $35200 = (11664 - 216l + l^2)l$

$$35200 = 11664l - 216l^2 + l^3$$

igualamos a cero y tenemos una ecuación cubica en l

$$l^3 - 216l^2 + 11664l - 35200 = 0$$

hay tres cambios de signo en esta ecuación por lo que puede tener tres o una raíces positivas que son las que nos interesan ya que la longitud no puede ser negativa. Probemos con algunos múltiplos de 35200

1	1	-216	11664	-35200
		1	-215	11449
	1	-215	11449	-23751

2	1	-216	11664	-35200
		2	-428	22472
	1	-214	11236	-12728

4	1	-216	11664	-35200
		4	-848	43264
	1	-212	10816	8064

Entre 2 y 4 hay una raíz

8	1	-216	11664	-35200
		8	-1664	80000
	1	-208	10000	44800

20	1	-216	11664	-35200
		20	3920	154880
	1	-196	7744	119680

40	1	-216	11664	-35200
		40	-7040	184960
	1	-176	4624	149760

80	1	-216	11664	-35200
		80	10880	62720
	1	-136	784	27520

Ya va disminuyendo

88	1	-216	11664	-35200
		88	-11264	35200
	1	-128	400	0

Por fin 88 es una raíz

$l = 88$ pulgadas es una raíz, las otras dos las encontramos al resolver la ecuación de segundo grado: $l^2 - 128l + 400 = 0$

$$l = \frac{128 \pm \sqrt{(-128)^2 - 4(1)(400)}}{2} = \frac{128 \pm \sqrt{14784}}{2} = \frac{128 \pm 121.589}{2}$$

$l_1 = 124.795$ pulgadas

$l_2 = 3.205$ pulgadas, esta es la raíz que esta entre 2 y 4

- ❖ l no puede valer 124.795 pulgadas ya que la suma del perímetro de la base y la longitud deben de ser 108 pulgadas;

- con l = 88 pulgadas, el valor de b = (108 – 88)/4 = 5 pulgadas por lo que el volumen de la caja es: V = $5^2(88)$ =2200 pulgadas^3;
- por último con l = 3.205 pulgadas, el valor de b=(108 – 3.205)/4 = 26.199 pulgadas y V=$(26.199)^2(3.205)$ = 2199.87 ≈ 2200 pulgadas^3.

Se tienen dos cajas que cumplen con las condiciones del problema.

Si en lugar de despejar a b en términos de l, despejamos a l en términos de b y expresamos el volumen como función de b es más sencillo encontrar los valores de b y luego encontrar el valor de l.

Ejemplo 3) Se observa que la población de conejos en una pequeña isla está dada por la función

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$$

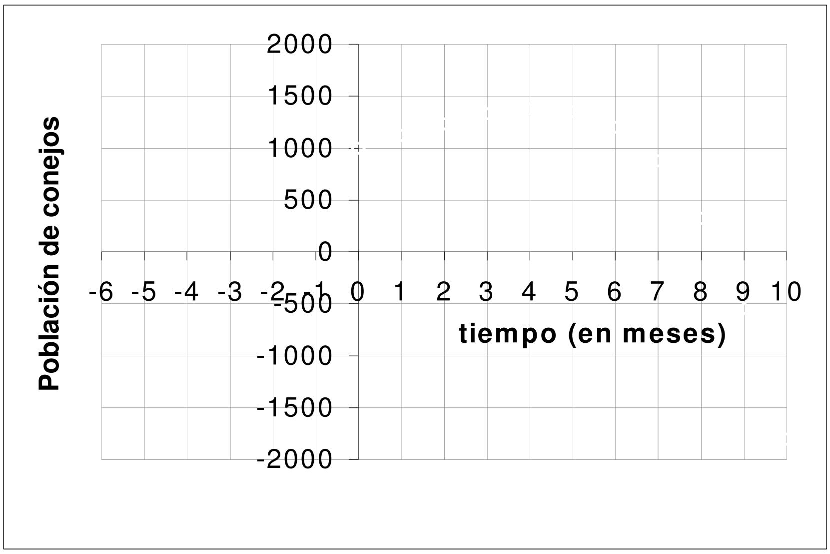
Donde t es el tiempo (en meses) desde que se iniciaron las observaciones.

a) ¿Cuándo se alcanza la máxima población, y cuál es ésta?
b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?

Solución

La población de conejos esta dada por la función P que es de cuarto grado y el coeficiente de t^4 es negativo, así que si trazamos la gráfica esta abre hacia abajo, o sea que tanto su extremo derecho como izquierdo se extienden hacia abajo, la parte que nos interesa es desde t = 0 hasta donde desaparece la población, cuando la función P es igual a cero. Dándole valores positivos a t tenemos la siguiente tabla ahora tu puedes trazar la gráfica

t	P(t)
0	1000
1	1119.6
2	1233.6
3	1327.6
4	1377.6
5	1350
6	1201.6
7	879.6
8	321.6
9	-544.4
10	-1800



Observando tanto la tabla como la gráfica y realizando los cálculos necesarios contesta las preguntas

a) ¿Cuándo se alcanza la máxima población y cuál es ésta?

b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos en la isla? (aproxima el punto donde la gráfica de la función dada cruza al eje x).

Ejercicios

1) Suponga que cierto día, t horas después de la media noche, la temperatura está dada por T(t) = $\left(\frac{-t}{16}\right)(t-6)(t-18)+55$ en °F.
   Si t está entre 6 y 18, ¿en que tiempo (racional) la temperatura T es de 75 °F?

2) Si en un parque se encuentran 34 osos y se sabe que al cabo de x años el número de osos en el parque esta dado por el polinomio
   $$N(x) = -x^3 + 7x^2 + 60x + 34$$
   ¿Cuántos años deberán transcurrir para que haya 450 osos? Determina solo la solución racional.

3) La velocidad v del aire que se mueve por la tráquea de una persona durante un resfriado es:
   $$v(r) = 486(1 - r)(r^2)$$
   siendo r el radio de la tráquea. ¿Para qué valor de r la velocidad es de 72?

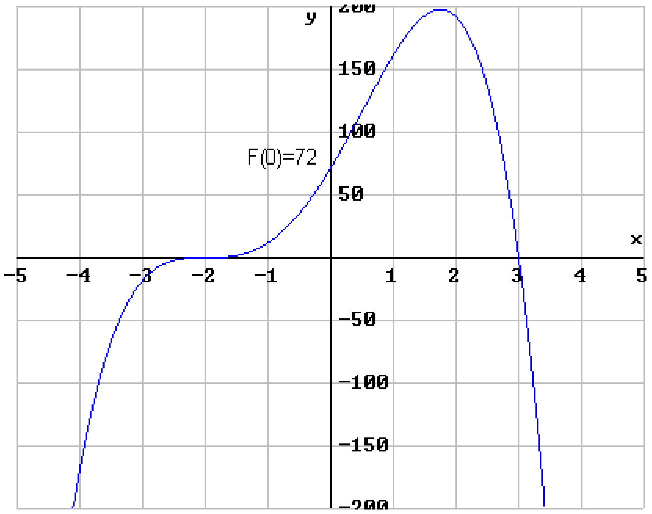
4) Una caja sin tapa se hace de una pieza metálica de 12cm por 15 cm, cortándole (a la pieza metálica) un cuadrado de área x^2 en cada esquina y doblando luego los lados.
   a) Expresa el volumen V de la caja como una función de x
   b) Encuentra los valores de x que hacen que el volumen de la caja sea de 176 cm^3.
   c) ¿Cuál de estos valores hacen que la caja tenga un área superficial mínima?

5) Un cohete está formado de un cilindro recto circular de 20 m de altura coronado por un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es el mismo que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser este radio (correcto a dos decimales) si el volumen total debe ser $500\frac{\pi}{3}$ m^3?

A U T O E V A L U A C I Ó N

1) Determina cuál de los conjuntos de pares ordenados representan una función de A a B y escribe porque. A = {0, 2, 4, 6} y B = {(–2, 0 , 2, 4, 5}
   a) {(0, –2), (2, 0), (4, 4), (6, –2)}
   b) {(0, 0), (2, 4), (0, –2) (4, 5), (6, 2)
   c) {(2, 0), (4, –2), (6, 5)
   d) {(2, 4), (0, 4), (6, 4), (4, 4)

3) Utiliza la gráfica de la función correspondiente para trazar las gráficas de las transformaciones indicadas.
   a) $f(x) = (3 - x)^3 + 4$ b) $g(x) = -(x + 2)^3 - 3$
4) Cuáles son los ceros de la función $P(x) = x(x - 3)(x + 1)(2x - 5)$, ¿de qué grado es? Bosqueja su gráfica.
5) Si –3 es un cero de la función $h(x) = x^3 - 3x^2 - 4x - 12$. ¿Cuáles son los otros ceros?
6) Encuentra los ceros de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ y traza un bosquejo de su gráfica.
7) Traza la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 13x - 7$ y aproxima sus raíces con 2 decimales.
8) Encuentra la función polinomial que tiene la siguiente gráfica.



9) Suponga que en un laboratorio el número de moscas de la fruta, en miles, es al cabo de x días $M(x) = x^3 + 14x^2 + 53x + 40$. ¿En cuántos días el número de moscas de la fruta será de 352?
10) Si una caja sin tapa se hace de una pieza metálica de 12 cm por 15 cm, cortándole (a la pieza metálica) un cuadrado de área x^2 en cada esquina y doblando luego los lados, el volumen esta dado por, $V(x) = x(15 - 2x)(12 - 2x)$. Determina dos valores de x entre 0 y 6 que hagan que el volumen de la caja sea igual a 176 cm^3