1.4 TEOREMAS Y TÉCNICAS DE EXPLORACIÓN APLICABLES A FUNCIONES POLINOMIALES PARA LA OBTENCIÓN DE SUS CEROS.

Como ya vimos la función lineal es una función polinomial de primer grado donde el coeficiente de x es la pendiente y el término independiente es la ordenada al origen, tiene la forma $f(x) = mx + b$.

Las raíces o ceros de una función f son las soluciones o raíces de la ecuación que resulta al igualar la función a cero ($f(x)=0$), así que dada cualquier función lineal tu puedes encontrar su raíz o su cero ya que sabes resolver ecuaciones de primer grado, en cuanto a su gráfica también la reconoces como una línea recta que solamente cruza el eje de las x en un punto.

Ejemplo1) Encuentra los ceros de cada una de las funciones y traza su gráfica

a) $f(x) = 2x - 5$ b) $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

Solución

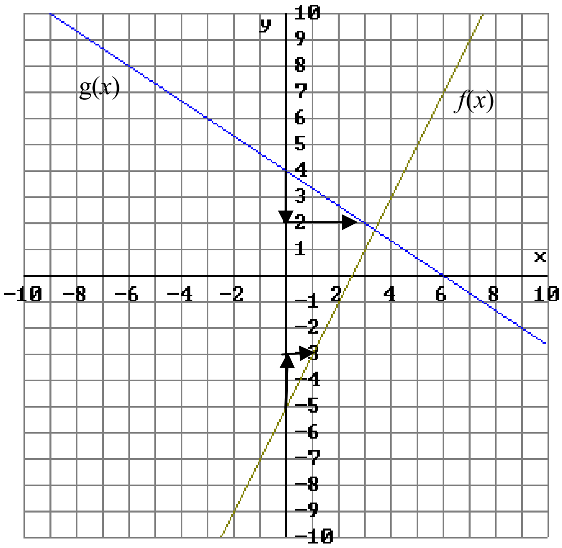
Las dos son funciones lineales, sus gráficas son líneas rectas y para encontrar la raíz igualamos la función a cero

a) $2x - 5 = 0$, $2x = 5$, $x = 5/2$ esta es la raíz de f

en cuanto a su gráfica como tiene pendiente 2 y ordenada al origen –5, localizamos el punto (0, –5) aumentamos 2 y avanzamos 1, unimos estos puntos y prolongamos en ambas direcciones como se muestra en la figura.

b) $-\frac{2}{3}x + 4 = 0$, $-\frac{2}{3}x = -4$, $-2x = -4(3)$, $x = \frac{-12}{-2}$, $x = 6$ esta es la raíz de g

ahora la pendiente es $-\frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es 4, localizamos el punto (0, 4) disminuimos 2 y avanzamos 3 llegamos al punto (3, 2) los unimos, prolongamos y ya tenemos su gráfica.



Como te puedes dar cuenta la raíz de f es $x = 2.5$ y la raíz de g es $x = 6$ ya que son los puntos donde cada una de ellas cruza al eje x.

Ejercicio 1) En tu cuaderno encuentra las raíces de las siguientes funciones y traza su gráfica

a) F(x) = $-3x + 2$ b) G(x) = $\frac{5}{4}x - 2$ c) H(x) = $-\frac{7}{3}x - 4$

Sigamos con las funciones cuadráticas o funciones polinomiales de segundo grado que también ya conocemos y son de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ y su representación gráfica nos da una parábola, las raíces de estas funciones siempre son 2 y las obtenemos como ya vimos igualando a cero la función.

Ejemplo 2) Encuentra las raíces de cada función y has un bosquejo de su gráfica

a) F(x) = $-x^2 + 2x + 8$ b) H(x) = $2x^2 + 8x - 3$

Solución:

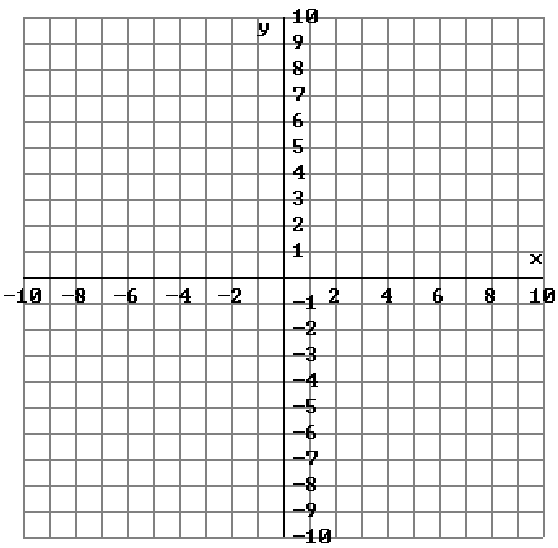
Para encontrar las raíces de estas funciones igualamos a cero cada una de ellas y resolvemos las ecuaciones resultantes.

a) $-x^2 + 2x + 8 = 0 = -(x^2 - 2x - 8)$ y resolvemos por factorización: dos números que multiplicados den –8 y sumados den –2, estos números son – 4 y 2 así que;

$$-x^2 + 2x + 8 = -(x - 4)(x + 2) = 0$$

las raíces son: $x = 4$ y $x = -2$

Teniendo las raíces podemos trazar la gráfica recordando que es simétrica y que la ordenada de su vértice se encuentra a la mitad de estas dos raíces en x= (4 +(-2) /2 = 1 y para conocer la ordenada evaluamos la función en 1, F(1) = $-(1)^2 + 2(1) + 8 = 5$, por lo que el vértice se encuentra en V(1, 9); abre hacia abajo ya que x^2 tiene un signo negativo, puedes marcar más puntos, colocándote en el vértice y desplazándote 1 a la derecha y bajamos 1 llegamos a (2,8), nuevamente en el vértice te desplazas 1 a la izquierda y bajas 1, se llega a (0,8);ahora 2 a la derecha y bajas 4 llegas a (3, 5); dos a la izquierda y bajas 4, llegas a (-1, 5) con estos puntos ya puedes trazar la gráfica ya que las dos ramas se extienden hacia abajo.



La gráfica cruza dos veces al eje x ya que las dos raíces son reales, también podemos escribir a la función en forma factorizada:

F(x) = $-(x - 4)(x + 2)$

b) $H(x) = 2x^2 + 8x - 3$ ahora vamos a utilizar el método de completar cuadrados

$H(x) = 2(x^2 + 4x) - 3$ factorizamos el coeficiente de x^2

$= 2(x^2 + 4x + (4/2)^2 - 3 - 2(4/2)^2$ completamos el trinomio cuadrado

$H(x) = 2(x + 2)^2 - 11$ y lo escribimos como un binomio al cuadrado

Con lo anterior por un lado tenemos el vértice de la parábola que es (-2, -11) y por otro igualamos a cero para obtener las raíces

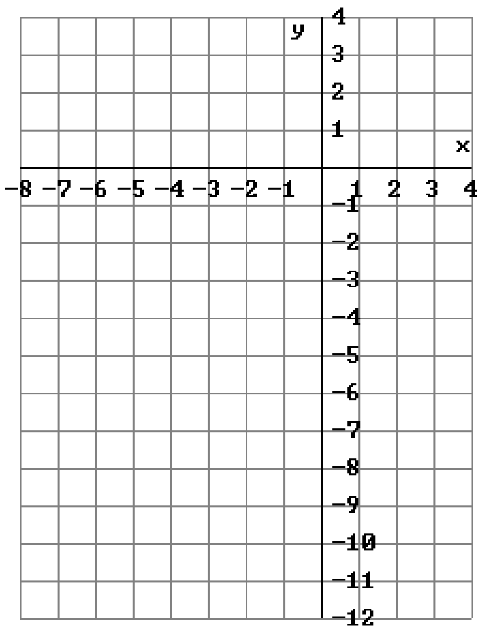
$$2(x + 2)^2 - 11 = 0,\ 2(x + 2)^2 = 11,\quad (x+2)^2 = \frac{11}{2},\quad (x+2) = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{\frac{11}{2}}$$

Las raíces son: $x = -2 + \sqrt{\frac{11}{2}} = 0.3452$ y $x = -2 - \sqrt{\frac{11}{2}} = -4.3452$

Para la gráfica realiza lo mismo que en el inciso anterior, recuerda colocándote en el vértice te desplazas y subes 2(1) o 2(4) ya que ahora la parábola abre hacia arriba y se alarga por un factor de 2.

Las dos raíces son reales y diferentes



Ejercicio 2) Encuentra las raíces de cada una de las siguientes funciones, traza su gráfica, menciona si las raíces son reales o complejas y si son reales di si son dobles o sencillas.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 10$ b) $g(x) = -x^2 - 6x - 9$ c) $h(x) = -3x^2 + 9x - 7$

De lo anterior te diste cuenta que una función cuadrática puede tener dos raices reales si es que cruza el eje x o dos raíces complejas si su gráfica se encuentra por arriba del eje x o por abajo, también si tiene raíces reales estas son sencillas cuando cruza de manera directa al eje x y cuando lo toca y se regresa ya sea por arriba o por abajo estas raíces son dobles o de multiplicidad 2.

Para encontrar los ceros de una función polinomial de grado mayor a 2 existen varios métodos y así como en las de segundo grado hay una fórmula también la hay para las de tercero y cuarto grado pero son muy largas y complicadas, para las de grado 5 en adelante ya no existe una fórmula para encontrar su solución, por lo que estudiaremos algunos métodos generales que nos servirán para encontrar los ceros o raíces de funciones polinomiales de grado mayor que dos.

Lo primero que haremos será apoyarnos en lo que ya sabemos de álgebra y sobre factorización, para así poder resolver las ecuaciones resultantes al igualar a cero algunas funciones cubicas y cuartas sencillas y además podamos hacer un bosquejo de su gráfica.

Ejemplo 3) Encuentra los ceros de la función cúbica $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ y escríbela en su forma factorizada (has un bosquejo de su gráfica).

Solución

Para encontrar los ceros de esta función debemos igualar a cero y si observas a esta función le falta el término independiente por lo que podemos factorizarla de la siguiente forma

$$x(x^2 + 2x - 3)= 0$$

ahora lo que tenemos que hacer es resolver esta ecuación cubica que ya se encuentra factorizada con un factor lineal y otro factor de segundo grado, pero sabemos que si un producto de dos o más números es cero entonces alguno de ellos debe ser cero, en este caso se debe de cumplir:

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 + 2x - 3 = 0$$

Ya tenemos una solución de la ecuación y esta es $x = 0$, resolvamos la ecuación de segundo grado por factorización: dos números que multiplicados den –3 y sumados den 2, estos números son 3 y –1, así que la podemos escribir como:

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

cualquiera de estos dos factores puede ser cero

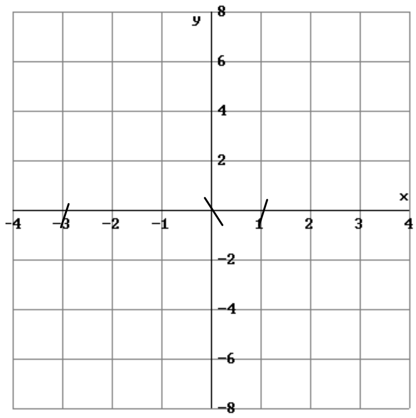
si $(x + 3) = 0,\quad x = -3$ y si $(x - 1) = 0,\quad x = 1$

Otras dos soluciones de la ecuación son $x = -3$ y $x = 1$

Por lo tanto los tres ceros o raíces de la función son: $x = 0$, $x = -3$ y $x = 1$

Y se puede factorizar como $f(x) = x(x + 3)(x - 1)$

Para delinear la gráfica localizamos estos puntos sobre el eje x y como ya sabemos que la gráfica de una función cubica en sus extremos una rama se extiende hacia arriba y la otra se extiende hacia abajo por lo que la región en donde no conocemos su comportamiento se encuentra entre –3 y 1, además como encontramos 3 raíces diferentes la curva cruza al eje x de manera directa, evaluemos la función en algunos puntos entre –3 y 1 para tener un mejor bosquejo.



Esta evaluación la puedes hacer en donde ya esta factorizada la función o en la original

$f(-2) =$

$f(-1) =$

$f(0.5) =$

localízalos en el plano y marca la curva que mejor se aproxime

Ejemplo 4) Encuentra las raíces de la función $f(x) = - 2x^3 + x^2$, escríbela en su forma factorizada y has un bosquejo de su gráfica.

Solución

Como puedes ver esta función no tiene término lineal ni cuadrático, así que podemos factorizar una x^2 y el signo negativo que tiene el término cubico e igualamos a cero para obtener los ceros de la función

$$-2x^3 + x^2 = -x^2(2x - 1) = -(x)(x)(2x - 1) = 0$$

cada uno de los factores puede ser cero

$$x = 0, \quad x = 0 \quad y \quad (2x - 1) = 0$$

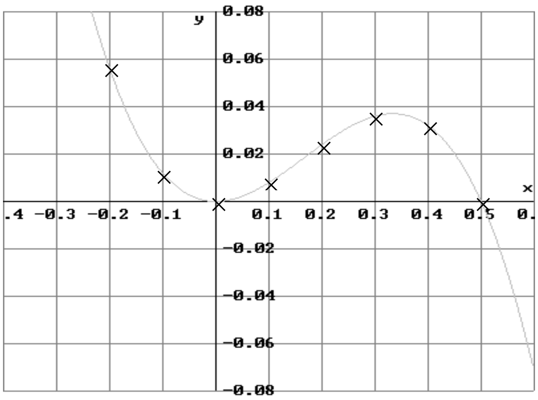
ya tenemos dos raíces, $x = 0$ y $x = 0$, **0 es una raíz doble,**

resolvemos $2x - 1 = 0$, $2x = 1$, **$x = ½$ es una raíz sencilla**

Los tres ceros o raíces de la función son: $x=0$, $x=0$ y $x= ½$

La función se puede factorizar como $f(x) = -(x)(x)(2x - 1)$

Para delinear su gráfica recordemos que como el término cubico tiene un signo negativo la rama de la izquierda se extiende hacia arriba y la rama derecha se extiende hacia abajo, además como 0 es una raíz doble no cruza al eje x en el origen sino que toca y se regresa, solamente lo cruza hasta $x=½$, ahora evaluemos entre 0 y 0.5 y démosle algunos valores a la izquierda de cero para que veas que la rama izquierda esta por arriba del eje x.



$f(0.1)= - 2(0.1)^3 + (0.1)^2 = 0.008$
$f(0.2)= - 2(0.2)^3 + (0.2)^2 = 0.024$
$f(0.3)= - 2(0.3)^3 + (0.3)^2 = 0.036$
$f(0.4)= - 2(0.4)^3 + (0.4)^2 = 0.032$
$f(-0.1)= - 2(-0.1)^3 + (-0.1)^2 = 0.012$
$f(-0.2)= - 2(-0.2)^3 + (-0.2)^2 = 0.056$

Ejercicio 3) Encuentra los ceros o raíces de las siguientes funciones, escríbelas en su forma factorizada y traza un bosquejo de sus gráficas.

a) $f(x) = – x^3 + 5x^2 + 8x$ b) $g(x) = x^3 – 5x^2$ c) $h(x) = 2x^3 +5x^2 + 9x$
d) $n(x) = – 4x^3 – 12x^2$ e) $k(x) = – 3x^3 – 6x^2 + 24x$ f) $j(x) = 5x^3 + 3x^2$

Es conveniente que escribas todo lo que observaste acerca de las funciones anteriores tanto de sus ceros como en el comportamiento de sus gráficas.

Ahora aumentemos el grado de estas funciones polinomiales y analicemos algunas sencillas de cuarto grado.

Ejemplo 5) Encuentra las raíces o ceros de la función $F(x) = x^4 + 3x^3$ y delinea su gráfica.

Solución

Solamente tiene 2 términos (cuarto y cubico), podemos factorizar una x^3 e igualamos a cero y nos queda: $x^4 + 3x^3 = x^3(x + 3) = (x)(x)(x)(x + 3) = 0$

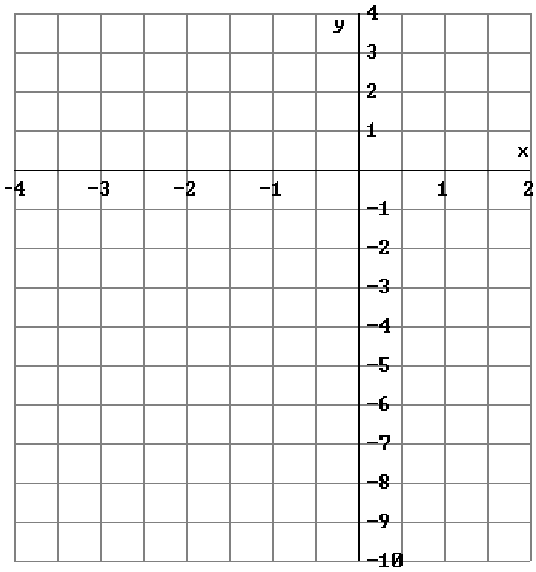
Ya tenemos los 4 factores donde 3 de ellos son iguales a x por lo que tiene tres raíces que son iguales a cero o sea que $x = 0$ es una raíz triple y la cuarta raíz la obtenemos con el factor que nos falta igualar a cero: $x + 3 = 0$, $x= – 3$ y esta es una raíz sencilla.

Las raíces de la función F son: x=0, x=0, x=0 y x= –3

Y la podemos factorizar como $F(x) = x^3(x + 3) = (x)(x)(x)(x + 3)$

En cuanto a su gráfica como F es una función polinomial de cuarto grado las dos ramas de los extremos se extienden hacia arriba, solo nos falta su comportamiento entre – 3 y 0 y tener en cuenta que como cero es una raíz triple en ese punto no va a cruzar el eje x directamente sino que se va a pegar al eje x tanto por abajo como por arriba, lo cruza cambiando su concavidad; evalúa en los siguientes puntos y únelos con una curva suave.

$F(-3.5) = (-3.5)^4 + 3(-3.5)^3 =$
$F(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 = 0$
$F(-2.5) = (-2.5)^4 + 3(-2.5)^3 =$
$F(-2.25) = (-2.25)^4 + 3(-2.25)^3 =$
$F(-2) = (-2)^4 + 3(-2)^3 =$
$F(-1.5) = (-1.5)^4 + 3(-1.5)^3 =$
$F(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 =$
$F(0.5) = (0.5)^4 + 3(0.5)^3$
$F(1) = (1)^4 + 3(1)^3 =$



Ejemplo 6) Encuentra los ceros o raíces de la función $g(x) = -2x^4 + 7x^3 + 8x^2$ y bosqueja su gráfica.

Solución

A esta función le faltan los términos lineal e independiente, así que podemos factorizar una x^2 y el signo negativo e igualando a cero nos queda:

$$g(x) = -x^2(2x^2 - 7x - 8) = -(x)(x)(2x^2 - 7x - 8) = 0$$

De aquí que x= 0 es una raíz doble y las otras dos las encontramos resolviendo la ecuación de segundo grado $2x^2 - 7x - 8 = 0$ (utilizando la fórmula general)

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(-8)}}{2(2)} = \frac{7 \pm \sqrt{113}}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{113}}{4} \approx 4.4075$$

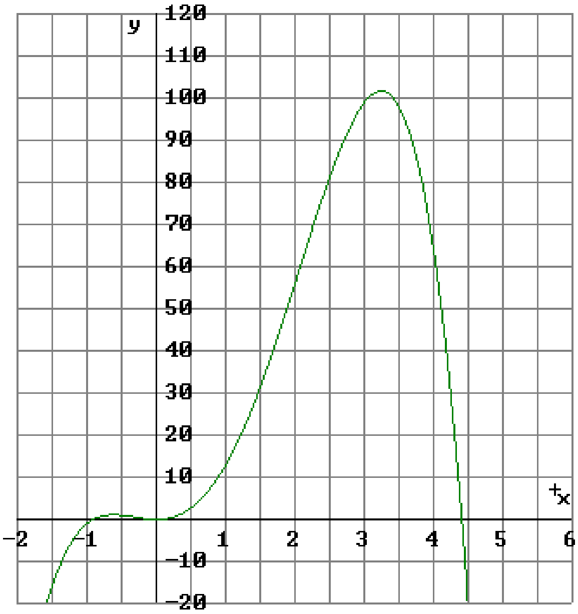
$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{113}}{4} \approx -0.9075$$

Las raíces de la función g son: x=0, x=0, x = 4.4075 y x= – 0.9075

La función nos queda fatorizada como: $g(x) = -x^2(2x^2 - 7x - 8)$ o también la podemos escribir con sus 4 factores

$$g(x) = -x(x)\left(x - \frac{7 + \sqrt{113}}{4}\right)\left(x - \frac{7 - \sqrt{113}}{4}\right)$$

Para el bosquejo de la gráfica de g, vemos que x^4 tiene un signo negativo, por lo que los dos extremos de la gráfica se extienden hacia abajo a partir de la raíz negativa y de la raíz positiva, como cero es una raíz doble no cruza al eje x en este punto sino que lo toca y se regresa; vamos a evaluar en algunos puntos entre –1 y 5 por ejemplo:



$g(-1) = -2(-1)^4 + 7(-1)^3 + 8(-1)^2 =$
$g(-0.5) = -2(-0.5)^4 + 7(-0.5)^3 + 8(-0.5)^2 =$
$g(0) = -2(0)^4 + 7(0)^3 + 8(0)^2 = 0$
$g(0.5) = -2(0.5)^4 + 7(0.5)^3 + 8(0.5)^2 =$
$g(1) = -2(1)^4 + 7(1)^3 + 8(1)^2 =$
$g(2) = -2(2)^4 + 7(2)^3 + 8(2)^2 =$
$g(3) = -2(3)^4 + 7(3)^3 + 8(3)^2 =$
$g(4) = -2(4)^4 + 7(4)^3 + 8(4)^2 =$
$g(5) = -2(5)^4 + 7(5)^3 + 8(5)^2 =$

Marca los puntos sobre la gráfica

Ejemplo 7) Encuentra los ceros o raíces de la función, escríbela en su forma factorizada y traza un bosquejo de su gráfica. $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Solución

Esta es una función en donde la variable independiente sólo tiene potencias pares y para encontrar los ceros podemos reducir la ecuación resultante a una cuadrática haciendo un cambio de variable por ejemplo: $x^2 = z$ y ahora nos queda:

$$g(z) = z^2 - 13z + 36 = 0$$

Podemos usar factorización para resolver (dos números que multiplicados den 36 y sumados den – 13)

$$z^2 - 13z + 36 = (z - 4)(z - 9) = 0$$

ahora regresamos a la variable original que era x recordando que $z = x^2$ y tenemos

$$(z - 4)(z - 9) = 0 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

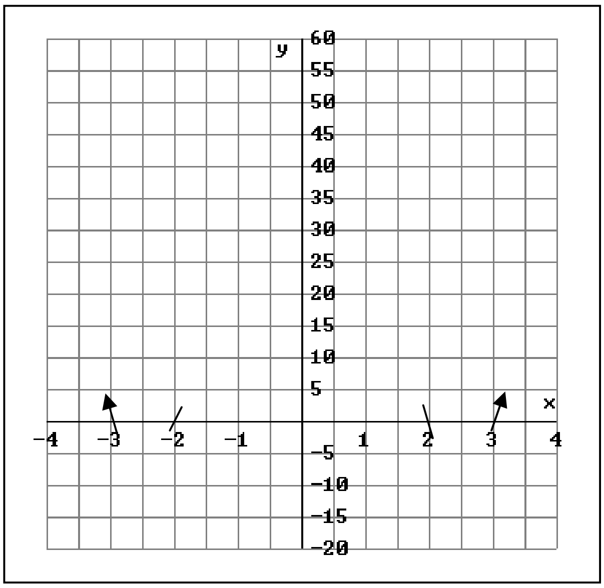
igualando a cero cada factor: $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm\sqrt{4}$, $x = 2$ y $x = -2$

$x^2 - 9 = 0$, $x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{9}$, $x = 3$ y $x = -3$

Las cuatro raíces de g son: x= 2, x= – 2, x= 3 y x= – 3

La podemos factorizar como: g(x) =(x – 2)(x + 2)(x – 3)(x + 3)

Todas las raíces son sencillas así que cruza al eje x cuatro veces y las dos ramas se extienden hacia arriba, la de la izquierda a partir de x=–3 y la de la derecha a partir de x=3, como las potencias son pares es simétrica con respecto al eje y; evalúa en algunos puntos, los que creas convenientes para delinearla.



Ejemplo 8) Encontrar los ceros de la función $S(x) = -2x^4 - 5x^2 + 12$, escribirla en su forma factorizada y trazar su gráfica.

Solución

La variable independiente solamente tiene potencias pares así que realizando el cambio de variable $x^2 = z$ y sustituyendo en la función e igualándola a cero nos queda: $S(z) = -2z^2 - 5z + 12 = 0$ aplicando la fórmula general para resolver esta ecuación de segundo grado en z en donde a= -2, b = -5 y c= 12

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-2)(12)}}{2(-2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{-4} = \frac{5 \pm 11}{-4}$$

$$z_1 = \frac{5+11}{-4} = -4$$

$$z_2 = \frac{5-11}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

regresando a x tenemos que $z_1 = x^2 = -4$, $x = \pm\sqrt{-4}$, $x = \sqrt{-4}$ y $x = -\sqrt{-4}$ estas dos raíces no son reales, son complejas.

Ahora con $z_2 = x^2 = \frac{3}{2}$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.2247$ y $x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \approx -1.2247$ estas raíces si son reales.

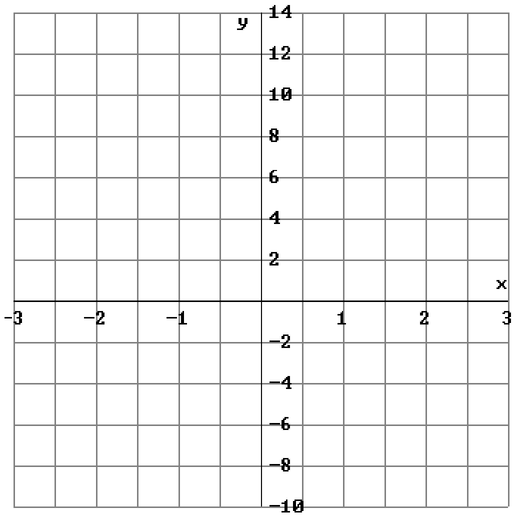
La función S tiene dos raíces reales y dos raíces complejas y estas son:

x = $\sqrt{\frac{3}{2}}$, **x =** $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\boldsymbol{x = 2i}$ **y** $\boldsymbol{x = -2i}$

La podemos escribir en forma factorizada

S(x) = $-\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)(x^2 + 4)$

Solamente cruza al eje x dos veces es simétrica con respecto al eje y, así que con sólo evaluar en números positivos tenemos el valor de la función del correspondiente negativo, como la x^4 tiene un signo negativo las dos ramas se extienden hacia abajo, así que evalúa entre 0 y 1.5 y traza la gráfica.



$S(0) = -12$
$S(0.2) = -2(0.2)^4 - 5(0.2)^2 + 12 =$
$S(0.4) = -2(0.4)^4 - 5(0.4)^2 + 12 =$
$S(0.6) = -2(0.6)^4 - 5(0.6)^2 + 12 =$
$S(0.8) = -2(0.8)^4 - 5(0.8)^2 + 12 =$
$S(1) = -2(1)^4 - 5(1)^2 + 12 =$
$S(1.5) = -2(1.5)^4 - 5(1.5)^2 + 12 =$
$S(-0.2) =$
$S(-0.4) =$
$S(-0.6) =$
$S(-0.8) =$
$S(-1) =$
$S(-1.5) =$

Ejercicio 4) Encuentra los ceros o raíces de cada una de las siguientes funciones, escríbelas en su forma factorizada y bosqueja su gráfica.

a) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 3x^2$ b) $G(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2$ c) $H(x) = -3x^4 - 12x^3$
d) $M(x) = -x^4 - 11x^2 + 60$ e) $L(x) = 3x^4 + 2x^2 + 11$ f) $T(x) = -x^4 + 9x^2 + 8$

Con lo que hemos venido realizando te podrás dar cuenta que al aumentar el grado de las funciones polinomiales aumenta el número de raíces que vamos encontrando y que estas no necesariamente son diferentes ya que se pueden repetir, además nos dan los factores en los que podemos descomponer al polinomio que representa a la función. A continuación enunciaremos algunos teoremas que consideramos que ya te pueden ir quedando más claros.

Teorema fundamental del álgebra:

Todo polinomio f(x) de grado n mayor o igual a 1 ($n \geq 1$) tiene al menos una raíz

Este es un teorema muy importante que fue demostrado por primera vez por Gauss (a la edad de 20 años) un matemático alemán en 1797, ayuda a demostrar otros teoremas relacionados a los polinomios y sus raíces, como el que sigue:

Todo polinomio f(x) de grado $n \geq 1$ puede ser expresado como el producto de polinomios lineales y cuadráticos en donde los factores cuadráticos no tienen raíces reales.

De este teorema vemos que el factor cuadrático no tiene raíces reales, en uno de los ejemplos anteriores llegamos a un factor cuadrático cuyas raíces no eran reales sino complejas y estas siempre van en pareja así que con esto podemos llegar a que:

Todo polinomio f(x) de grado n $\geq$ 1 tiene exactamente n raíces (no necesariamente distintas)

Hasta aquí realmente no hemos analizado funciones cubicas o de grado mayor que tengan todos sus términos completos, sino que nos hemos ayudado de lo que conoces sobre ecuaciones y factorización de tus cursos anteriores así que para continuar con el estudio de las funciones polinomiales de grado mayor a 2 tenemos que ampliar nuestros conocimientos de factorización para poder incrementar nuestra capacidad de análisis de estas funciones. Por esto seguiremos con dos teoremas que nos serán de gran utilidad y un proceso de división que te parecerá más sencillo y sobre todo rápido.

Teorema del Residuo y Teorema del Factor

Si te piden que encuentres las raíces de la función polinomial $P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$, podrías contestar que no puedes resolver la ecuación cubica resultante, pero si te dicen que el número 2 es raíz de P, rápidamente podrías decir que si, ya que al evaluar la función en 2 nos da cero: $P(2) = 2^3 - 8(2)^2 + 17(2) - 10 = 8 - 32 + 34 - 10 = 0$ y sabes que si el resultado es cero, quiere decir que es raíz o cero de la función P. Ahora ¿como encontrar las otras 2 raíces? Para contestar esta pregunta tenemos que recordar algunos aspectos de la división.

Si se divide 342 entre 5 se hace lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 68 \\ \cline{2-2} 5 & 342 \\ & \ \ 42 \\ & \ \ \ \ 2 \end{array}$$

Sabemos que 342 = 5(68) +2, es decir Dividendo = (Divisor)(Cociente) + Residuo

Este resultado también se cumple en los polinomios; ya que si dividimos a $P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ entre el polinomio $Q(x) = x - 3$, estamos haciendo lo siguiente:

$$\begin{array}{rll}
 & x^2 - 5x + 2 & \longleftarrow \text{Cociente} \\
\text{Divisor} \longrightarrow x - 3 & \overline{x^3 - 8x^2 + 17x - 10} & \longleftarrow \text{Dividendo} \\
 & \underline{-x^3 + 3x^2} & \\
 & 0 - 5x^2 + 17x - 10 & \\
 & \underline{\ 5x^2 - 15x} & \\
 & \ \ 0 + 2x - 10 & \\
 & \underline{\ \ - 2x - 6} & \\
 & \ \ \ \ 0 - 4 & \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

Es decir $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x - 3)(x^2 - 5x + 2) + (-4)$

En ambos casos estamos usando el **algoritmo de la división** que dice lo siguiente:

Si dividimos a un polinomio P(x) entre otro Q(x), con Q(x) $\neq$ 0, entonces existen dos polinomios únicos C(x) y R(x) tales que P(x) =Q(x) C(x) + R(x), donde R(x) = 0, o bien el grado de R(x) es menor que el grado de Q(x).

Vamos a usar el caso en que el polinomio divisor es lineal, es decir de la forma x – c; ya que si sucede esto podemos afirmar que el residuo es igual al polinomio evaluado en c, que es lo que nos afirma el **Teorema del Residuo**

Si un polinomio P(x) es dividido entre x – c, entonces el residuo es igual a P(c)

En la división anterior dividimos entre x – 3 y obtuvimos un residuo de – 4, si evaluamos en c = 3 tenemos: P(3) = 3^3–8$(3)^2$+17(3)–10 = 27– 72 + 51 –10= – 4

Entonces se cumple que P(3) = – 4 y – 4 es el residuo

Pero si al dividir un polinomio P(x) entre x – c resulta que el residuo es cero entonces por el Teorema del Residuo P(c) = 0, es decir c es una **raíz o cero** del polinomio y además x – c es un factor de P(x).

Con esta conjetura y los ejemplos y ejercicios vistos anteriormente no te dejarán la menor duda de la veracidad del siguiente teorema.

Teorema del factor:

Un número c es una raíz o cero del polinomio P(x) si y sólo si $x - c$ es un factor de P(x).

Ahora en nuestro ejemplo nos decían que 2 era raíz y lo comprobamos entonces x – 2 es un factor de P(x) = $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ y lo podemos factorizar como: P(x) = x – 2) C(x), donde C(x) es otro polinomio de grado menor que P(x) o sea de segundo grado y lo encontramos realizando la división de P(x) entre x – 2, ya que lo tengamos encontramos las dos raíces faltantes ¿puedes hacerlo?

C(x) =

$$x-2\,\overline{\big)\,x^3-8x^2+17x-10}$$

Sus raíces son:

Los ceros o raíces de la función polinomial P son: x_1 =___, x_2=___ y x= ___

Otra forma de hacer lo anterior es usando la división sintética que es una forma abreviada de la división usual entre polinomios, esta es muy usada para determinar las raíces de un polinomio ya que con esta podemos obtener más información, para explicarte el método desarrollaremos varios ejemplos.

Ejemplo 1) Dividir el polinomio Q(x) = $5x^3 + 6x - 3$ entre x – 2

1º) Colocamos los coeficientes de Q(x) en una línea horizontal y en orden de potencias descendentes de x, escribiendo cero como coeficiente de cada una de las potencias faltantes. Al principio o al final de la línea (como gustes) se escribe el número 2 de la expresión lineal x – 2. Traza una recta horizontal debajo de estos números, dejando un renglón:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2º) bajamos debajo de la raya el primer coeficiente que en nuestro caso es 5 y lo multiplicamos por 2, fíjate donde colocamos el resultado.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & 10 & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

3º) realizamos la suma de 0 + 10 = 10 y a esta la multiplicamos por 2 y la colocamos debajo del 6

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & 10 & 20 & \\ \hline & 5 & 10 & 26 & \end{array}$$

4º) nuevamente sumamos 6 + 20 = 26, lo multiplicamos por 2 y lo colocamos debajo de –3 y sumamos estos dos números y ya terminamos

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & 10 & 20 & 52 \\ \hline & 5 & 10 & 26 & 49 \end{array}$$

Los números del tercer renglón son los coeficientes del polinomio Cociente que es de un grado menor que el polinomio dado y estos coeficientes están en orden de potencias descendentes de x donde el último número corresponde al residuo que es este caso es 49

Así que el resultado es: Cociente = $C(x) = 5x^2 + 10x + 26$ y el residuo es 49.

Ejemplo 2) Dividir el polinomio $R(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7$ entre x + 3.

Solución

1º) Colocamos los coeficientes de x horizontalmente escribiendo cero para el coeficiente de la potencia faltante. Y ahora como es entre x + 3 escribimos –3 ya sea al principio o al final.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

2º) Bajamos el 1 al tercer renglón

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

3º) Empezamos a multiplicar por –3 y a sumar hasta llegar al 7.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ & & -3 & 0 & 6 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 6 & -11 \end{array}$$

El cociente es: $C(x) = x^3 - 2x + 6$ y el residuo es -11

Ejercicio 1) Encuentra el cociente y el residuo en cada una de las siguientes divisiones usando división sintética.

a) $(x^3 - 9x^2 - 7x + 3) \div (x + 2)$ b) $(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1) \div (x - 1)$

c) $(3x^3 - x^2 + 4x - 5) \div (x + 1)$ d) $(x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 1) \div (x - 3)$

Con lo anterior ya podemos encontrar los ceros o raíces de una función polinomial de grado 3 si nos dan una de las raíces, también podemos encontrar las raíces si estas son enteras o al menos una es entera, evaluando con la división sintética y haciendo uso de los teoremas anteriores, veamos otros ejemplos.

Ejemplo 3) Si -3 es una raíz de la función $T(x) = 2x^3 - 7x^2 - 24x + 45$ encuentra sus otras dos raíces.

Solución

Si -3 es un cero o raíz de T(x) entonces $x + 3$ es un factor de T(x) y al hacer la división de T(x) entre $x + 3$ el residuo debe ser cero, así que usando la división sintética tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & -7 & -24 & 45 \\ & & -6 & 39 & -45 \\ \hline & 2 & -13 & 15 & 0 \end{array}$$

Entonces $T(x) = (x + 3)(2x^2 - 13x + 15)$ ahora lo que nos queda es encontrar las raíces del segundo factor que es de segundo grado o sea resolver la ecuación: $2x^2 - 13x + 15 = 0$, (por fórmula general a=2, b=–13 y c=15)

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{4}, \quad x_1 = 5 \quad \text{y} \quad x_2 = 3/2$$

Las tres raíces de T(x) son $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ y $x_3 = 3/2$

Ejercicio 2) Encuentra las raíces que se te piden.

a) Si 4 es raíz del polinomio $R(x) = 3x^3 - 5x^2 - 26x - 8$ las otras dos raíces son:
b) Si 5 es raíz del polinomio $Z(x) = x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 60x$ encuentra sus otras 3 raíces.
c) Si -7 es una raíz del polinomio $S(x) = x^3 + 9x^2 - x - 105$ encuentra sus otras dos raíces.

Ejemplo 4) Encontrar las raíces de la función polinomial $F(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Solución

Por medio de la división sintética empecemos a evaluar en los enteros positivos

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & 1 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 4 & -2 & -10 \end{array} \; F(1) = -10 \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & 2 & 10 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 0 \end{array} \; F(2) = 0$$

Ya encontramos un cero o raíz y esta es $x = 2$ y como la función es cubica nos faltan dos raíces que son las que resultan al resolver la ecuación de segundo grado: $x^2 + 5x + 4 = 0$ resolvámosla por factorización, dos números que multiplicados den 4 y sumados den 5, estos son 4 y 1 así que:

$$x^2 + 5x + 4=(x + 4)(x +1) = 0$$

las soluciones de esta ecuación son $x = -4$ y $x = -1$

Las raíces de la función F(x) son: $x = 2$, $x= -4$ y $x = -1$

Si al ir evaluando en los positivos resulta que el residuo va creciendo y que además los números del tercer renglón todos son positivos ya no debes continuar con los positivos porque ya no vas a encontrar raíces positivas, la función sigue creciendo o decreciendo (todos los números del tercer renglón son negativos) según el signo del término principal.

Si cuando evalúas en los negativos resulta que en el tercer renglón los signos de estos números se encuentran de forma alterna positivo y negativo entonces ya no continúes con los negativos porque ya no hay raíces negativas.

Ejercicio 3) Traza un bosquejo de las gráficas de las funciones del ejemplo 3 y 4 así como las del ejercicio 2.

Ejercicio 4) Encuentra todos los ceros de cada una de las siguientes funciones y traza un bosquejo de su gráfica.

a) $G(x) = x^3 + 2x^2 -3$ b) $K(x) = x^4 -2x^3 - 2x^2 + 8x -8$

c) $M(x) = 2x^3 - 14x^2 + 14x + 30$ d) $L(x) = -x^4 + 5x^3 + 13x^2 - 77x + 60$

Regla de Descartes y Obtención de Raíces Racionales

Hasta aquí ya puedes encontrar los ceros de una función polinomial siempre y cuando la puedas factorizar, o si te dan las suficientes raíces y las que faltan las puedes encontrar resolviendo una ecuación de segundo grado o por ensayo y error siempre y cuando sean enteras (las necesarias), pero esto es algo tardado y aveces no resulta, así que para evitarnos trabajos en vano existen otros métodos que nos dan más información sobre los ceros de una función de este tipo por ejemplo la *Regla de los Signos de Descartes* junto con el *Teorema de las raíces racionales* nos ayudarán a encontrar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros, si es que las tiene.

La Regla de los Signos de Descartes dice:

Si tenemos una función polinomial f(x) con sus términos escritos en orden descendente con respecto a las potencias de x, entonces se afirma que:

- El número de **raíces positivas** de $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de f(x) o es menor que ese número en un entero par.
- El número de **raíces negativas** de $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$ o es menor que ese número en un entero par.

Primero te debe de quedar claro que es lo de las variaciones de signo de f(x), esta variación de signo se presenta cuando dos términos consecutivos tienen signos opuestos siempre y cuando el polinomio esté escrito en orden descendente con respecto a las potencias de x.

Ejemplo 1) La función polinomial $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ tiene dos variaciones de signo:

1ª variación: de x^3 a $-2x^2$

2ª variación: de $-5x$ a $+3$

como tiene dos variaciones de signo aplicando la regla anterior Q(x) tiene dos raíces positivas o ninguna.

Para investigar cuántas raíces negativas tiene, sustituimos x por –x y tenemos: $Q(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 - 5(-x) + 3 = -x^3 - 2x^2 - 5x + 3$

Q(–x) sólo tiene una variación que es de – 5x a +3

Por la regla de Descartes la función Q(x) tiene exactamente una raíz negativa.
Entonces concluimos que Q(x) tiene una raíz negativa y, o dos raíces positivas o dos raíces complejas.

Ejemplo 2) La función $R(x) = 2x^5 - 5x^4 - x^3 + 2x^2 - 4$ tiene tres variaciones de signo:

1ª variación: ____________________

2ª variación: ____________________

3ª variación: ____________________

aplicando la regla de Descartes R(x) puede tener 3 o 1 raíces positivas.
Para las raíces negativas sustituimos x por –x y tenemos:

$$R(-x) = 2(-x)^5 - 5(-x)^4 - (-x)^3 + 2(-x)^2 - 4 = -2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 - 4$$

Tiene dos variaciones que son: ____________________

____

por la regla de descartes R(x) tiene: ____ o ____ raíces negativas
Concluimos que R(x) tiene las siguientes posibilidades de raíces:

- tres positivas y dos negativas o,
- Tres positivas, ninguna negativa, entonces tendrá dos complejas o,
- Una raíz positiva y dos negativas, y en consecuencia dos complejas o,
- Una raíz positiva y ninguna negativa y entonces tendrá 4 complejas.

Esta regla sólo nos da información de cómo pueden ser las raíces, más no nos dice cuales son, pero con el siguiente teorema podremos encontrar las raíces racionales de un polinomio si es que las tiene.

Teorema de las Raíces Racionales

Sea $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1x^1 + a_0$ $(a_0 \neq 0)$ un polinomio de grado n con coeficientes enteros. Si $\frac{p}{q}$ en su mínima expresión es una raíz racional de $f(x) = 0$, entonces p es factor de a_0 y q es factor de a_n.

Con algunos ejemplos veremos como se utiliza este Teorema para encontrar los ceros de una función polinomial.

Ejemplo 3) Encuentra todas las raíces racionales de la función P y traza un bosquejo de su gráfica:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$$

Solución

Las raíces racionales si es que las hay, deben de ser de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es un factor de a_0 y q un factor de a_n.

Primero: Observa que a_0 es el término independiente y en este caso a_0 = -3 y a_n es el coeficiente del término con mayor potencia de x, a_n = 2.

Segundo: Como p es factor de –3 los posibles valores de p son : ±1, ±3.

Como q es factor de 2 los posibles valores de q son : ±1, ±2

Tercero: Entonces las posibles raíces son:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{-1}, \frac{3}{-2}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{-1}, \frac{-3}{-2}$$

Simplificando las posibles raíces son: $1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 3,\ \frac{3}{2},\ -3,\ -\frac{3}{2}$

Cuarto: Aplicando la regla de Descartes, vemos que hay una sola variación de signo para P(x), entonces hay una raíz positiva. En P(–x) hay dos variaciones de signo, entonces tiene o dos raíces negativas o ninguna. Así que lo más seguro es que tenga 1 positiva y las otras dos pueden ser negativas o complejas.

Quinto: Usando división sintética podemos verificar cuales son raíces, recuerda que para que un número sea raíz el residuo debe ser cero.

Empecemos con los enteros positivos

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ & & 2 & -1 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & -9 & -12 \end{array} \quad F(1) = -12$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ & & 6 & 9 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad F(3) = 0$$

3 es una raíz, x – 3 es un factor de P

$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x + 1)$

Ya conocemos una raíz por lo tanto las otras dos las encontramos resolviendo la ecuación de segundo grado: $2x^2 + 3x + 1 = 0$ (a= 2, b=3 y c= 1)

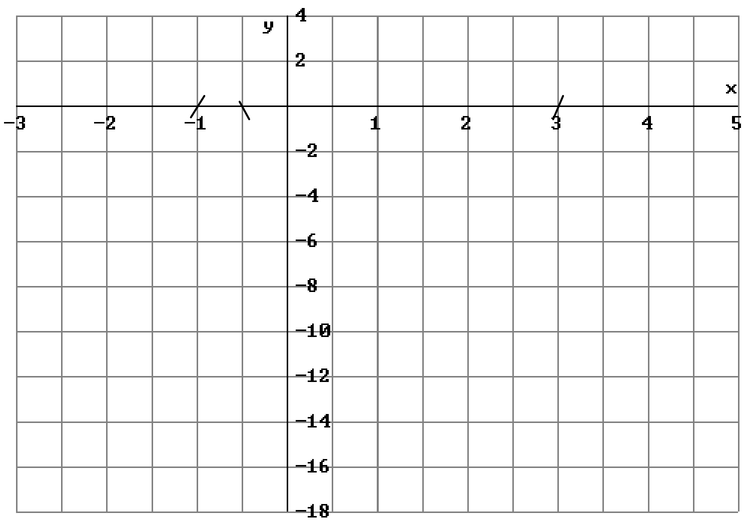
$$x_2 = \frac{(\ \ ) + \sqrt{\ \ }}{\ \ } \qquad x_3 = \frac{(\ \ ) - \sqrt{\ \ }}{\ \ }$$

las soluciones son: $x_2 = -1/2$ y $x_3 = -1$

Los tres ceros de P(x) son: $x_1 = 3$, $x_2 = -1/2$ y $x_3 = -1$

Todas se encuentran en la lista de las posibles raíces

Para hacer un bosquejo de su gráfica recordamos que como es cubica y el término principal tiene signo positivo, la rama de la izquierda se extiende hacia abajo y la de la derecha hacia arriba, así que evalúa la función en otros puntos que consideres convenientes para que te quede mejor.



P(0) = -3
P(1)= -12

Ejemplo 4) Encontrar todos los ceros racionales (si es que tiene) de la función y hacer un bosquejo de su gráfica.

$$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 9$$

Solución

Primero: Localizamos los valores del término independiente y del coeficiente principal: $a_0 = 9$ y $a_n = 2$

Segundo: Como p es factor de 9 los posibles valores de p son: ±1, ±3 y ±9
Como q es factor de 2 los posibles valores de q son: ±1 y ±2

Tercero: Las posibles raíces son:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{-1},\frac{1}{-2},\frac{-1}{1},\frac{-1}{2},\frac{-1}{-1},\frac{-1}{-2},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{3}{-1},\frac{3}{-2},\frac{-3}{1},\frac{-3}{2},\frac{-3}{-1},\frac{-3}{-2},\frac{9}{1},\frac{9}{2},\frac{9}{-1},\frac{9}{-2},\frac{-9}{1},\frac{-9}{2},\frac{-9}{-1},\frac{-9}{-2}$$

sin repetir son: $1, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, -3, -\frac{3}{2}, 9, \frac{9}{2}, -9, -\frac{9}{2}$

Cuarto: Aplicando la regla de Descartes, vemos que hay cuatro variaciones de signo para Q(x), entonces hay 4, dos o ninguna raíz positiva. En Q(-x) no hay variaciones de signo, $Q(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^3 + 10(-x)^2 - 13(-x) + 9 = 2x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 13x + 9$, entonces **no tiene raíces negativas,** así que solo probaremos con las posibles raíces positivas que son: $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, 9, \frac{9}{2}$

Quinto: Usando división sintética podemos verificar cuales de estas son raíces.

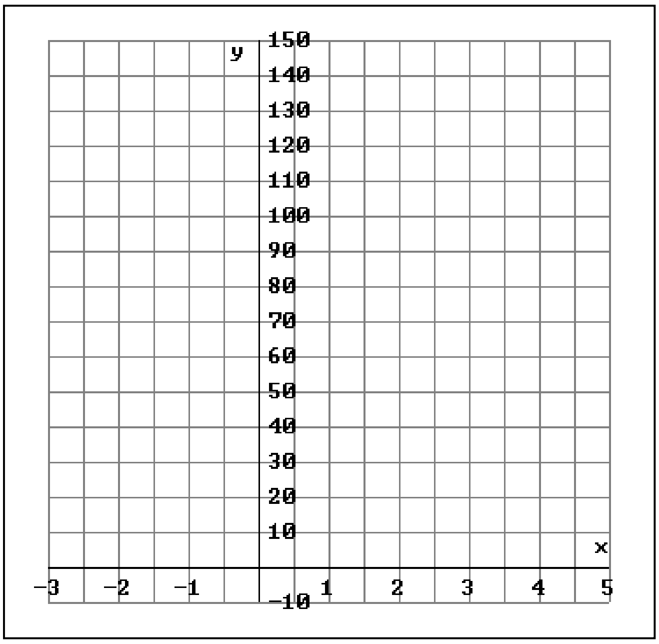
$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 2 & -1 & 9 & -4 \\ \hline & 2 & -1 & 9 & -4 & 5 \end{array} \quad F(1) = 5 \qquad \begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 6 & 9 & 57 & 132 \\ \hline & 2 & 3 & 19 & 44 & 141 \end{array} \quad F(3) = 141$$

Si observas todos los números del tercer renglón son positivos por lo tanto no hay que seguirle con los positivos 9/2 y 9 ya que el residuo va a ser cada vez más grande mejor nos regresamos a ½ y 3/2

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1/2 & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 1 & -1 & 9/2 & -17/4 \\ \hline & 2 & -2 & 9 & -17/2 & 19/4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} 3/2 & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 3 & 0 & 15 & 3 \\ \hline & 2 & 0 & 10 & 2 & 12 \end{array}$$

F(1/2) = 19/4 F(3/2) = 12

Tampoco son raíces, por lo tanto Q(x) no tiene ceros o raíces racionales.
Para trazar su gráfica, como es de grado 4 y el coeficiente principal tiene signo positivo, las dos ramas se extienden hacia arriba, evalúa en algunos valores negativos y te darás cuenta que la gráfica se encuentra por arriba del eje x o sea que nunca lo cruza por lo que sus 4 raíces son complejas.



Ejercicios) Encontrar todos los ceros racionales de cada una de las funciones y hacer un bosquejo de su gráfica.

1) $f(x) = 9x^3 – 18x^2 – 31x +12$ 2) $g(x) = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 2x – 3$
3) $h(x) = x^5 –5x^3 + 2x^2 + 6x – 4$ 4) $k(x) = x^4 – 2x^3 – 3x^2 + 8x – 4$
5) $m(x) = x^3 – x^2 –10x – 8$ 6) $n(x) = –2x^3 – 3x^2 + 17x + 30$
7) $p(x) = –6x^4 +17x^3 – 7x^2 – 8x + 4$ 7) $q(x) = –3x^4 + 22x^3 – 41x^2 + 4x + 28$

Aproximaciones Sucesivas

Existen muchos métodos para encontrar los ceros irracionales de una función polinomial, estos métodos nos determinan los ceros por medio de procesos de aproximación de tal forma que podemos encontrar los ceros con la exactitud que deseemos, aquí solo veremos el de aproximaciones sucesivas en donde primero se localiza el cero entre enteros consecutivos, luego entre décimos consecutivos y luego entre centésimos consecutivos es indispensable el uso de tu calculadora. A Continuación te mostraremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1) Determina los valores aproximados de los ceros de $f(x) = x^3 – 2x – 5$

Solución

1º) Nos ayudaremos de la regla de los signos de Descartes para saber como son los ceros de la función.

- En $f(x)= x^3 – 2x - 5$ sólo hay un cambio de signo de $+0x^2$ a $–2x$, entonces tiene una raíz positiva (como f es de tercer grado podemos deducir que las otras dos raíces son negativas o son complejas).
- Ahora $f(-x) = (–x)^3 – 2(–x) – 5 = – x^3 + 2x – 5$ tiene dos cambios de signo, de $–x^3$ a $+0x^2$ y de $+2x$ a $–5$, entonces tiene dos raíces negativas o ninguna.
- Las raíces pueden ser: ___positiva y ____negativas
  ___positiva y ____ complejas

2º) Por lo anterior busquemos una raíz positiva.

Recuerda que queremos encontrar un valor para x que al sustituirlo en f(x) nos dé cero, o muy cerca de cero.

Evaluemos:

f(0) = –5, f(1) = $(1)^3$ –2(1) – 5 = – 6 bajo más, f(2) =$(2)^3$ – 2(2) – 5 = –1 ahora subió, f(3) = $(3)^3$ – 2(3) – 5 = 16 cambio de signo, así que podemos afirmar que **entre 2 y 3 hay un cero**

Seguimos con los décimos

Evaluemos a la mitad f(2.5) = $(2.5)^3$ – 2(2.5) –5 = 5.625 es positivo así que debemos disminuir ya que f(2) era negativo; f(2.3) = _______ ; f(2.2) = _______

f(2.1) = 0.061; **hay un cero entre 2.0 y 2.1**

Ahora con los centésimos

F(2.05)= –0.484875 todavía es negativo; f(2.06)= ____________; f(2.07)= ______;

F(2.08) = __________; f(2.09) = –0.050671; el cero se encuentra entre **2.09 y 2.10**

Podemos seguirle con los milésimos

f(2.095) = 0.005007; f(2.094) = –0.0061534 esta más cercano a cero f(2.095) así que **la raíz aproximada es *x* = 2.095**, ahora hagamos la división sintética para ver cuál es la ecuación de segundo grado que tenemos que resolver para encontrar las dos raíces restantes.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2.095 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ & & 2.095 & 4.389025 & 5.005007 \\ \hline & 1 & 2.095 & 2.389025 & 0.005007 \end{array}$$

$$f(2.095) = 0.005007$$

La ecuación de segundo grado aproximada es:

$x^2 + 2.095x + 2.389025 = 0$; a= 1, b= 2.095 y c= 2.389025

$$x \approx \frac{-2.095 \pm \sqrt{2.095^2 - 4(1)(2.389025}}{2(1)} \approx \frac{-2.095 \pm \sqrt{-5.131975}}{2}$$

$$x_2 \approx \frac{-2.095 + \sqrt{-5.167075}}{2}$$

y $$x_3 \approx \frac{-2.095 - \sqrt{-5.167075}}{2}$$

estos son los dos ceros complejos aproximados

f tiene un cero real (irracional) $x \approx 2.095$ **y dos ceros complejos**

Ejercicio 1) Traza un bosquejo de la gráfica de la función anterior f(x) = $x^3 - 2x - 5$

Ejemplo 2) Determina los valores de los ceros aproximados de la función

$$F(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x - 1$$

Solución

1°) De acuerdo a la regla de Descartes

F(x) tiene 1 cambio de signo, por lo que debe de tener un cero positivo

F(-x) = $(-x)^4 - 3(-x)^3 - 6(-x)^2 - 3(-x) - 1 = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3x - 1$, aquí hay tres cambios de signo, así que puede tener 3 ceros negativos o uno.

Los ceros pueden ser: ____positivo, _____negativo y _____complejos,
____positivo, _____negativos,

2º) Empezamos por buscar un cero positivo (aproximado), si tiene raíces racionales estas deben ser o 1 o –1 ¿por qué?

1⌋	1	-3	-6	-3	-1
		1	-2	-8	-11
	1	-2	-8	-11	-12

F(1) = -12

-1⌋	1	-3	-6	-3	-1
		-1	4	2	1
	1	-4	-2	-1	0

F(-1) = 0

Ya encontramos **un cero x_1= -1**, así que: F(x) =(x + 1)($x^3 - 4x^2 - 2x - 1$)
Sigamos evaluando en los números positivos.

2⌋	1	-3	-6	-3	-1
		2	-2	-16	-38
	1	-1	-8	-19	-39

F(2) = -39

3⌋	1	-3	-6	-3	-1
		3	0	-18	-63
	1	0	-6	-21	-64

F(3) = -64

4⌋	1	-3	-6	-3	-1
		4	4	-8	-44
	1	1	-2	-11	-45

F(4) = -45

5⌋	1	-3	-6	-3	-1
		5	10	20	85
	1	2	4	17	84

F(5) = 84

Aquí tenemos un cambio de signo por lo tanto **hay un cero entre 4 y 5 y es irracional.**

F(4.5) = ___________; F(4.4) = _____________
Esta más cerca de 4.5

F(4.47) = ____________; F(4.48)____________; F(4.49) = -0.55751499

Vamos con los milésimos.

F(4.495) = 0.06312; F(4.494) =-0.0613 este se acerca más a cero así que **otro cero es** $x_2 \approx 4.494$

hagamos la división sintética para llegar a la ecuación de segundo grado

4.494⌋	1	-4	-2	-1
		4.494	2.22	0.9888
	1	0.494	0.22	-0.0112

F(4.494) = -0.0112

la ecuación de segundo grado que nos queda es:

$x^2 + 0.494x + 0.22 = 0$; a= 1, b = 0.494 y c= 0.22

resolviendo tenemos $x_{3,4} \approx \dfrac{-0.494 \pm \sqrt{(0.494)^2 - 4(1)(0.22)}}{2} = \dfrac{-0.494 \pm \sqrt{-0.635964}}{2}$